18498

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

Als Fortsetzung des von

A. L. Crelle

gegründeten Journals

herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass

von

C. W. Borchardt.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

Siebzigster Band.

In vier Heften.

Mit einer Figurentafel.

Berlin, 1869.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Inhaltsverzeichniss des siebzigsten Bandes.

Bestimmung des Potentials eines homogenen Ellipsoids. Von Herrn *F. Mertens* zu Krakau. . . . . Seite 1

Bemerkungen über die verschiedenen Werthe, welche eine Function zweier reellen Variabeln erhält, wenn man diese Variabeln entweder nach einander oder gewissen Beziehungen gemäss gleichzeitig verschwinden lässt. Von Herrn *Paul du Bois-Reymond* in Heidelberg. . . . . — 10

Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades. Von Herrn *E. B. Christoffel* in Zürich. . . . . — 46

Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von *n* Differentialen. Von Herrn *R. Lipschitz* in Bonn. . . . . — 71

Remarques sur les fonctions entières à diviseurs binômes. Par M. *Hill* à Lund. — 103

Ueber einige Abbildungsaufgaben. Aus einer Mittheilung an Herrn *Richelot* in Königsberg. Von Herrn *H. A. Schwarz* in Halle. . . . . — 105

Conforme Abbildung der Oberfläche eines Tetraeders auf die Oberfläche einer Kugel. Von Demselben. . . . . — 121

Ueber die einfachste Correlation in zwei räumlichen Gebieten. Von Herrn *Richelot* in Königsberg. . . . . — 137

Ueber einige allgemeine Eigenschaften der geometrischen Curven. Von Herrn *A. Olivier* in Schaffhausen. . . . . — 156

Ueber die Differentialquotienten der Kugelfunctionen. Von Herrn *R. Most* in Stettin. . . . . — 163

Ueber eine algebraische Aufgabe, welche einer Gattung geometrischer Probleme zu Grunde liegt. Von den Herren *Rosanes* und *Pasch* in Breslau. — 169

Note zu dem Aufsatze, „über eine Eigenschaft von Functionaldeterminanten“ Bd. 69, p. 355 dieses Journals. Von Herrn *A. Clebsch* in Göttingen. . — 175

Sur une équation du 16ème degré. Par M. *Camille Jordan* à Paris. . . — 182

Sur les assemblages de lignes. Par le même. . . . . — 185

Ueber relative Primzahlen. Von Herrn *Victor Schemmel*. . . . . — 191

Ueber das Additionstheorem der *Abel*schen Functionen. Von Herrn *H. Weber* in Heidelberg. . . . . — 193

Untersuchungen über das Flächennetz zweiter Ordnung. Von Herrn *Rudolf Sturm* in Bromberg. . . . . Seite 212
Ueber ein die Transformation homogener Differentialausdrücke zweiten Grades betreffendes Theorem. Von Herrn *E. B. Christoffel.* . . . — 241
Zur Potential-Theorie. Von Herrn *Kronecker.* . . . . . — 246
Ueber die Flächen vierten Grades, welche eine Doppelcurve zweiten Grades haben. Von Herrn *C. F. Geiser* in Zürich. . . . . — 249
Beiträge zur Theorie der durch die *Heine*sche Reihe:

$$1+\frac{1-q^a}{1-q}\cdot\frac{1-q^b}{1-q^c}\cdot x+\frac{1-q^a}{1-q}\cdot\frac{1-q^{a+1}}{1-q^2}\cdot\frac{1-q^b}{1-q^c}\cdot\frac{1-q^{b+1}}{1-q^{c+1}}\cdot x^2+\cdots$$

darstellbaren Functionen. Von Herrn *J. Thomae* in Halle. . . . . — 258
Note sur les indices à module composé et sur une table d'une nouvelle espèce de logarithmes. Par M. *Hill* à Lund. . . . . — 282
Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen. Von Herrn *G. Kirchhoff* in Heidelberg. — 289
Ueber die Integration lineärer totaler Differentialgleichungen, denen durch ein Integral Genüge geschieht. Von Herrn *Paul du Bois-Reymond* in Heidelberg. . . . . — 299
Zur Theorie der Umkehrung der *Abel*schen Integrale. Von Herrn *H. Weber* in Heidelberg. . . . . — 314
Ueber eine Darstellung des Imaginären in der Geometrie. Von Herrn *S. Lie* in Christiania. . . . . — 346
Zur Integration der gleichzeitigen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Von Herrn *F. E. Prym* in Würzburg. . . . . — 354
Ueber die Vertheilung der Reste und Nichtreste einer Primzahl von der Form $4n+3$ innerhalb des Intervalles 1 bis $\frac{p-1}{2}$. Von Herrn *Götting* in Torgau. . . . . — 363
Ueber ternäre quadratische Formen. Von Herrn *Paul Bachmann* in Breslau. — 365
Inhaltsverzeichniss der Bände 61 bis 70. . . . . — 372

Druckfehlerverzeichniss.

Pag. 219, Zeile 1 v. o. statt „Geraden G“ lese man „Gerade G“.
- 219, - 12 u. 14 v. o. statt „Ordnung“ lese man „Klasse“.
- 226, - 7 v. u. statt „oder“ lese man „und“.
- 240, - 9 v. o. statt „3 Gerade, welche“ lese man „3 Gerade $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$, welche“.
- 240, - 16 v. o. statt „also unär“ lese man „also $\alpha'\,\beta'\,\gamma'$ unär“.

Bestimmung des Potentials eines homogenen Ellipsoids.

(Von Herrn *F. Mertens* zu Krakau.)

Ich werde in dem Folgenden versuchen, das Potential eines homogenen Ellipsoids in einem beliebigen Punkte des Raumes durch directe Integration zu bestimmen.

Die Substitution, die in dem Falle eines äusseren Punktes zur Rationalmachung des zu integrirenden Elementes dienen wird, ist einem Briefe von *Jacobi* an *Liouville* entnommen, den man in dem zwölften Bande des *Liouville*schen Journals findet und der überhaupt diesen Versuch angeregt hat.

Bevor ich aber zu dem eigentlichen Gegenstande dieses Aufsatzes übergehe, will ich auf den Ausdruck eines Doppelintegrales aufmerksam machen, auf welchen ich mich im Folgenden öfters werde berufen müssen.

Für das über die ganze Oberfläche einer Kugel vom Halbmesser 1 zu erstreckende Integral $\iint \frac{d\sigma}{(A\xi^2+B\eta^2+C\zeta^2)^{\frac{3}{2}}}$, worin $d\sigma$ ein unbestimmtes Element dieser Kugelfläche und ξ, η, ζ dessen rechtwinklige Coordinaten sind, findet man leicht den Ausdruck $\frac{4\pi}{\sqrt{ABC}}$, wenn man

$$\xi = \cos\vartheta, \quad \eta = \sin\vartheta\cos\psi, \quad \zeta = \sin\vartheta\sin\psi,$$
$$d\sigma = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi$$

setzt.

Hat man nun den Werth des allgemeineren Integrales $\iint \frac{d\sigma}{\varphi^{\frac{3}{2}}}$ zu bestimmen, worin φ von der Form $A\xi^2+B\eta^2+C\zeta^2+2A'\eta\zeta+2B'\zeta\xi+2C'\xi\eta$ ist und beständig positiv bleibt, so denke man sich die Function φ durch eine lineare orthogonale Substitution auf die Form $\mathfrak{A}\xi'^2+\mathfrak{B}\eta'^2+\mathfrak{C}\zeta'^2$ gebracht. Das vorgelegte Integral geht dann über in

$$\iint \frac{d\sigma}{(\mathfrak{A}\xi'^2+\mathfrak{B}\eta'^2+\mathfrak{C}\zeta'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4\pi}{\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}}.$$

Bekanntlich ist aber

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = ABC+2A'B'C'-AA'^2-BB'^2-CC'^2$$
$$= \Delta\varphi,$$

wenn mit $\Delta\varphi$ die Determinante der quadratischen Form φ bezeichnet wird.

Somit wird

$$\iint \frac{d\sigma}{\varphi^{\frac{3}{2}}} = \frac{4\pi}{\sqrt{\Delta\varphi}}.$$

Ersetzt man hierin φ durch $s\varphi+\xi^2+\eta^2+\zeta^2$ und integrirt die Gleichung

$$ds\iint \frac{d\sigma}{(s\varphi+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4\pi\, ds}{\sqrt{\Delta(s\varphi+\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}}$$

nach s von $s=0$ bis $s=\infty$, so ergiebt sich

$$(1.)\quad \iint \frac{d\sigma}{\varphi} = 2\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{\Delta(s\varphi+\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}},$$

$$\begin{aligned}\Delta(s\varphi+\xi^2+\eta^2+\zeta^2) = {} & (ABC+2A'B'C'-AA'^2-BB'^2-CC'^2)s^3\\ & +(BC+CA+AB-A'^2-B'^2-C'^2)s^2\\ & +(A+B+C)s+1.\end{aligned}$$

Die Herleitung dieser Formel stammt aus *Jacobi*s zweiter Abhandlung über die Transformation vielfacher Integrale.

§. 1.

Es sei ein homogenes Ellipsoid mit der Massendichtigkeit 1 gegeben, dessen Gleichung bezogen auf irgend drei durch den Mittelpunkt desselben gehende zu einander senkrechte Axen die Gestalt habe

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy = 1$$

oder kürzer

$$f(x, y, z) = 1.$$

Um den angezogenen Punkt O, welcher die Masse 1 und die Coordinaten a, b, c haben möge, beschreibe man mit dem Halbmesser 1 eine Kugelfläche K, bezeichne die rechtwinkligen Coordinaten eines unbestimmten Punktes derselben (auf den Punkt O als Anfangspunkt bezogen) mit ξ, η, ζ und bestimme die Lage jedes Punktes P im Raume durch seine Entfernung r vom Punkte O und den durch die Verbindungslinie OP aus der Kugelfläche K ausgeschnittenen Punkt (ξ, η, ζ). Bedeutet dann $d\sigma$ ein Element der Fläche K, dem der Punkt (ξ, η, ζ) angehört, so wird das Potential V des gegebenen Ellipsoides im Punkte O gleich dem über den ganzen ellipsoidischen Körper auszudehnenden Integrale $\int r\,dr\,d\sigma$.

§. 2.

Es sei der angezogene Punkt O zunächst ein innerer.

Die Ausführung der Integration nach r giebt, wenn die Abkürzungen

$$(2.)\quad \begin{cases} f(\xi,\eta,\zeta) = f, \\ \xi f'a+\eta f'b+\zeta f'c = 2g, \\ f(a,b,c) = f_0, \\ g^2-(f_0-1)f = R \end{cases}$$

eingeführt werden, für V das über die ganze Kugelfläche K zu erstreckende Integral

$$\tfrac{1}{2}\iint r^2\,d\sigma = \tfrac{1}{2}\iint \frac{2g^2-(f_0-1)f-2g\sqrt{R}}{f^2}\,d\sigma,$$

welches nach Weglassung des verschwindenden mit $\sqrt{R}$ behafteten Theiles die einfache Gestalt annimmt

$$\iint \frac{g^2}{f^2}\,d\sigma+\frac{1-f_0}{2}\iint\frac{d\sigma}{f}.$$

Der erste Theil ist der Coefficient von ω in der Entwickelung des Integrals $\int\frac{d\sigma}{f-\omega g^2}$ nach steigenden Potenzen von ω. Da $f-\omega g^2$ eine quadratische Form von ξ,η,ζ ist, so ist der Gleichung (1.) der Einleitung zufolge

$$(3.)\quad \iint\frac{d\sigma}{f-\omega g^2} = 2\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{\chi(s)}},$$

worin $\chi(s)$ die Determinante der quadratischen Form $f-\omega g^2$ bedeutet. Setzt man nun

$$(4.)\quad \begin{cases} D(s) = (ABC+2A'B'C'-AA'^2-BB'^2-CC'^2)\,s^3 \\ \qquad +(BC+CA+AB-A'^2-B'^2-C'^2)\,s^2 \\ \qquad +(A+B+C)s+1, \\ F(u,v,w) = [(BC-A'^2)s^2+(B+C)s+1]u^2+2[(B'C'-AA')s^2-A's]vw \\ \qquad +[(CA-B'^2)s^2+(C+A)s+1]v^2+2[(C'A'-BB')s^2-B's]wu \\ \qquad +[(AB-C'^2)s^2+(A+B)s+1]w^2+2[(A'B'-CC')s^2-C's]uv, \end{cases}$$

so findet man durch eine leichte Rechnung:

$$(5.)\quad \begin{cases} \chi(s) = D(s)-\omega s\,F(\frac{1}{2}f'a,\ \frac{1}{2}f'b,\ \frac{1}{2}f'c) \\ \qquad = D(s)-\omega\Big(f_0-\dfrac{a^2+b^2+c^2}{s}+\dfrac{F(a,b,c)}{sD(s)}\Big)D(s). \end{cases}$$

Die Entwickelung beider Seiten der Gleichung (3.) nach steigenden Potenzen von ω und die Vergleichung der Coefficienten von ω giebt sodann

$$(6.)\quad \iint \frac{g^2}{f^2}\,d\sigma = \pi \int_0^\infty \left(f_0 - \frac{a^2+b^2+c^2}{s} + \frac{F(a,b,c)}{sD(s)}\right)\frac{ds}{\sqrt{D(s)}}.$$

Ferner wird nach (1.)

$$(7.)\quad \frac{1-f_0}{2}\iint \frac{d\sigma}{f} = (1-f_0)\,\pi \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{D(s)}}.$$

Die Summe der Gleichungen (6.) und (7.) giebt endlich

$$(8.)\quad V = \pi \int_0^\infty G(s)\,\frac{ds}{\sqrt{D(s)}},$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$(9.)\quad 1 - \frac{a^2+b^2+c^2}{s} + \frac{F(a,b,c)}{sD(s)} = G(s).$$

Man sieht, dass zur Bestimmung des Potentials eines inneren Punktes die Kenntniss der Hauptaxen des Ellipsoides nicht erfordert wird, ein Resultat, welches sich schon in den „Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik“ von *Dirichlet* (Bd. 58 pag. 181 dieses Journals) vorfindet.

§. 3.

Es liege zweitens der Punkt O ausserhalb des Ellipsoides.

Die Ausführung der Integration nach r giebt

$$V = \tfrac{1}{2}\iint (r_2^2 - r_1^2)\,d\sigma,$$

wo unter Beibehaltung der Bedeutungen (2.) der Zeichen f, g, f_0, R die auf die beiden Durchschnittspunkte des Leitstrahls r mit der Oberfläche des Ellipsoides sich beziehenden Werthe r_2 und r_1 aus der quadratischen Gleichung

$$fr^2 + 2gr + f_0 - 1 = 0$$

zu bestimmen sind, so dass also

$$r_2^2 - r_1^2 = -\frac{4g\sqrt{R}}{f^2} = -(f_0-1)^2\left[\frac{1}{(g-\sqrt{R})^2} - \frac{1}{(g+\sqrt{R})^2}\right]$$

und

$$V = -\tfrac{1}{2}(f_0-1)^2 \iint \left[\frac{1}{(g-\sqrt{R})^2} - \frac{1}{(g+\sqrt{R})^2}\right]d\sigma$$

wird. Das Integrationsgebiet ist die Fläche derjenigen unter den zwei durch die Gleichung $R=0$ dargestellten sphärischen Ellipsen, auf welcher die Function g negative Werthe besitzt.

Man denke sich jetzt statt ξ, η, ζ die Coordinaten ξ', η', ζ' eingeführt, welche sich auf die Hauptaxen des von dem Punkte O an das Ellipsoid gelegten Berührungskegels beziehen, und drücke die Grössen R und g durch diese neuen Coordinaten aus. Wählt man die ξ'-Axe so, dass ihr positiver Theil durch den Mittelpunkt der eben erwähnten sphärischen Ellipse geht, so nehmen R und g die Formen an

$$(10.) \qquad \begin{cases} R' = \lambda\xi'^2 + \mu\eta'^2 + \nu\zeta'^2, \\ g' = l\xi' + m\eta' + n\zeta', \end{cases}$$

in denen λ eine positive, μ, ν und l aber negative Grössen sein werden. Da ferner das Element $d\sigma$ von dem Coordinatenwechsel unabhängig ist, so wird

$$V = -\tfrac{1}{2}(f_0-1)^2 \iint \left[\frac{1}{(g'-\sqrt{R'})^2} - \frac{1}{(g'+\sqrt{R'})^2}\right] d\sigma$$

mit den Grenzbedingungen $R' > 0$, $\xi' > 0$.

In dem ersten Theile dieses Integrales darf man η', ζ' beziehlich durch $-\eta'$, $-\zeta'$ ersetzen; zieht man ihn hierauf mit dem zweiten Theile zusammen, so ergiebt sich

$$V = -2l(f_0-1)^2 \iint \frac{(\sqrt{R'} + m\eta' + n\zeta')\xi' d\sigma}{[l^2\xi'^2 - (\sqrt{R'} + m\eta' + n\zeta')^2]^2}.$$

Aus dieser Form von V erhellt sogleich, dass eine Integration ausführbar wird, wenn man η', ζ' als Integrationsvariable einführt, weil dann $\xi' d\sigma = d\eta' d\zeta'$ wird, also $\sqrt{R'}$ die einzige Irrationalität ist, die in dem zu integrirenden Elemente vorkommt. Es ist indessen zweckmässiger folgenden Weg einzuschlagen.

Man setze, um die Wurzelgrösse $\sqrt{R'}$ zu entfernen, mit *Jacobi*

$$\sqrt{R'} = \sqrt{\lambda}\xi'', \quad \eta' = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda-\mu}}\eta'', \quad \zeta' = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda-\nu}}\zeta''$$

und fasse ξ'', η'', ζ'' wieder als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes in der Kugelfläche K auf, was der Relation $\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2 = 1$ zufolge gestattet ist. Die sphärische Ellipse, für welche $R' > 0$, $\xi' > 0$ ist, bildet sich dann auf dieser Kugelfläche als die Kugelhälfte ab, in der $\xi'' > 0$ ist, und welche somit das neue Integrationsgebiet darstellt; dies letztere kann jedoch, wie aus der Form des zu integrirenden Elementes ersichtlich ist, über die ganze Kugelfläche ausgedehnt werden, wenn man das resultirende Integral hälftet. Ferner wird, wenn Kürze halber

$$\sqrt{\lambda-\mu}\sqrt{\lambda-\nu} = \varrho,$$

$$\varphi = l^2\xi''^2 + \mu\frac{l^2\eta''^2}{\mu-\lambda} + \nu\frac{l^2\zeta''^2}{\nu-\lambda},$$

$$\psi = \xi''\sqrt{\lambda} + \frac{m\eta''\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda-\mu}} + \frac{n\zeta''\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda-\nu}}$$

gesetzt und das neue Kugelflächenelement wieder mit $d\sigma$ bezeichnet wird.

$$\sqrt{R'} + m\eta' + n\zeta' = \psi,$$

$$l^2\xi'^2 = \varphi,$$

$$\xi' d\sigma = d\eta'\, d\zeta' = \frac{\lambda}{\varrho}\, d\eta''\, d\zeta'' = \frac{\lambda}{\varrho}\,\xi'' d\sigma$$

und in Folge dessen

$$(11.) \qquad V = -\frac{\lambda l(f_0-1)^2}{\varrho}\iint\frac{\psi\,\xi''\,d\sigma}{(\varphi-\psi^2)^2}.$$

Um die weitere Rechnung zu vereinfachen, betrachte ich statt des zuletzt erhaltenen Integrales das Integral

$$\iint\frac{d\sigma}{\varphi-(\psi+\omega\xi''\sqrt{\lambda})^2},$$

aus welchem durch Entwickelung nach steigenden Potenzen von ω jenes leicht erhalten wird.

Nach Formel (1.) der Einleitung ist

$$(12.) \qquad \iint\frac{d\sigma}{\varphi-(\psi+\omega\xi''\sqrt{\lambda})^2} = 2\pi\int_0^\infty\frac{dt}{\sqrt{\chi(t)}},$$

wenn $\chi(t)$ die Determinante der quadratischen Form

$$t\varphi - t(\psi+\omega\xi''\sqrt{\lambda})^2 + \xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2$$

bedeutet.

Da durch diese Gleichung V auf ein einfaches Integral zurückgeführt wird, so handelt es sich nur noch um eine elegante Form für $\chi(t)$.

Einem bekannten Satze der Invariantentheorie zufolge darf man die Form $t\varphi - t(\psi+\omega\xi''\sqrt{\lambda})^2 + \xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2$, worauf sich die zu berechnende Determinante $\chi(t)$ bezieht, durch beliebige lineare Substitutionen transformiren, wenn nur die Determinante der transformirten Function jedes Mal durch das Quadrat der Substitutionsdeterminante dividirt wird.

Man setze also die neuen Variablen mit ξ', η', ζ' bezeichnend

$$\xi'' = -\frac{l\xi'+m\eta'+n\zeta'}{(1+\omega)\sqrt{\lambda}}, \qquad \eta'' = \sqrt{\frac{\lambda-\mu}{\lambda}}\,\eta', \qquad \zeta'' = \sqrt{\frac{\lambda-\nu}{\lambda}}\,\zeta'.$$

Dadurch wird:

$$\varphi = \frac{l^2(l\xi'+m\eta'+n\zeta')^2}{\lambda(1+\omega)^2} - l^2\frac{\mu}{\lambda}\eta'^2 - l^2\frac{\nu}{\lambda}\zeta'^2,$$

$$(\psi+\omega\xi''\sqrt{\lambda})^2 = l^2\xi'^2,$$

$$\xi''^2+\eta''^2+\zeta''^2 = \frac{(l\xi'+m\eta'+n\zeta')^2}{\lambda(1+\omega)^2}+\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2-\frac{\lambda\xi'^2+\mu\eta'^2+\nu\zeta'^2}{\lambda},$$

also

$$t\varphi - t(\psi+\omega\xi''\sqrt{\lambda})^2+\xi''^2+\eta''^2+\zeta''^2 = \frac{1+tl^2}{\lambda}\left(\frac{l\xi'+m\eta'+n\zeta'}{1+\omega}\right)^2$$
$$-\left(\frac{1+tl^2}{\lambda}\right)(\lambda\xi'^2+\mu\eta'^2+\nu\zeta'^2)+\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2$$
$$= \frac{1+tl^2}{\lambda}\frac{g'^2}{(1+\omega)^2}-\left(\frac{1+tl^2}{\lambda}\right)R'+\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2$$

nach (10.).

Man denke sich zweitens statt ξ', η', ζ' die Substitution gemacht, welche dem Uebergange von den Hauptaxen des Berührungskegels zu den ursprünglichen Axen ξ, η, ζ entspricht. Diese Substitution führt g' in g und R' in $R = g^2-(f_0-1)f$ über (10.), und es wird

$$t\varphi - t(\psi+\omega\xi''\sqrt{\lambda})^2+\xi''^2+\eta''^2+\zeta''^2$$
$$= (f_0-1)\left(\frac{1+tl^2}{\lambda}\right)f+\xi^2+\eta^2+\zeta^2-\frac{(2\omega+\omega^2)}{(1+\omega)^2}\left(\frac{1+tl^2}{\lambda}\right)g^2.$$

Das Quadrat der ersten Substitutionsdeterminante ist gleich $\frac{l^2\varrho^2}{(1+\omega)^2\lambda^3}$, das der zweiten gleich 1; somit ist

$$\chi(t) = \frac{\lambda^3(1+\omega)^2}{l^2\varrho^2}\Delta\left[(f_0-1)\left(\frac{1+tl^2}{\lambda}\right)f+\xi^2+\eta^2+\zeta^2-\frac{2\omega+\omega^2}{(1+\omega)^2}\left(\frac{1+tl^2}{\lambda}\right)g^2\right].$$

Zur weiteren Vereinfachung setze man noch

$$(f_0-1)\frac{1+tl^2}{\lambda} = s,$$

also

$$t = \frac{\lambda s}{(f_0-1)l^2}-\frac{1}{l^2};$$

man erhält dadurch nach leichter Rechnung successive ähnlich wie oben (5.)

$$\chi\left(\frac{\lambda s}{(f_0-1)l^2}-\frac{1}{l^2}\right) = \frac{\lambda^3(1+\omega)^2}{l^2\varrho^2}\Delta\left[sf+\xi^2+\eta^2+\zeta^2-\frac{2\omega+\omega^2}{(1+\omega)^2}\frac{s}{f_0-1}g^2\right]$$
$$= \frac{\lambda^3(1+\omega)^2}{l^2\varrho^2}D(s)-\frac{(2\omega+\omega^2)\lambda^3}{l^2\varrho^2}\frac{s}{f_0-1}F(\tfrac{1}{2}f'a,\tfrac{1}{2}f'b,\tfrac{1}{2}f'c)$$
$$= \frac{\lambda^3}{l^2\varrho^2}\left[D(s)-(2\omega+\omega^2)\left(\frac{s}{f_0-1}F(\tfrac{1}{2}f'a,\tfrac{1}{2}f'b,\tfrac{1}{2}f'c)-D(s)\right)\right]$$
$$= \frac{\lambda^3}{l^2\varrho^2}D(s)\left[1-\frac{2\omega+\omega^2}{f_0-1}G(s)\right],$$

wo $D(s)$, F, $G(s)$ die nämlichen Bedeutungen wie oben (4.), (9.) haben.

Vermöge dieses Werthes von χ wird nun die Gleichung (12.), wenn man statt t die neue Integrationsvariable s einführt und beachtet, dass $\sqrt{l^2} = -l$ zu setzen ist,

$$\iint \frac{d\sigma}{\varphi - (\psi + \omega\xi''\sqrt{\lambda})^2} = -\frac{2\pi\varrho}{l(f_0-1)\sqrt{\lambda}} \int_{\frac{f_0-1}{\lambda}}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{D(s)}\sqrt{1 - \frac{2\omega+\omega^2}{f_0-1}G(s)}}.$$

Entwickelt man beide Seiten nach steigenden Potenzen von ω und vergleicht die Coefficienten von ω, so ergiebt sich endlich

$$\iint \frac{\psi\xi''\,d\sigma}{(\varphi-\psi^2)^2} = -\frac{\pi\varrho}{\lambda l(f_0-1)^2} \int_{\frac{f_0-1}{\lambda}}^{\infty} G(s)\,\frac{ds}{\sqrt{D(s)}}$$

und nach (11.)

$$(13.) \qquad V = \pi \int_{\frac{f_0-1}{\lambda}}^{\infty} G(s)\,\frac{ds}{\sqrt{D(s)}}.$$

Die Grösse λ ist ihrer Definition (10.) nach, wie aus der Theorie der Oberflächen zweiten Grades bekannt ist, die positive Wurzel der Gleichung dritten Grades

$$\Delta[\lambda(\xi^2+\eta^2+\zeta^2) - R(\xi,\eta,\zeta)] = 0;$$

$\frac{f_0-1}{\lambda}$ ist also, da $R = g^2 - (f_0-1)f$, die positive Wurzel der Gleichung dritten Grades in s

$$\Delta\left[(f_0-1)f + \frac{f_0-1}{s}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2) - g^2\right] = 0;$$

weil aber

$$\Delta\left[(f_0-1)f + \frac{f_0-1}{s}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2) - g^2\right] = \left(\frac{f_0-1}{s}\right)^3 \Delta\left[sf + \xi^2+\eta^2+\zeta^2 - \frac{s}{f_0-1}g^2\right]$$
$$= -\frac{(f_0-1)^2}{s^3}G(s)\,D(s)$$

ist, so kann $\frac{f_0-1}{\lambda}$ definirt werden als die positive Wurzel der Gleichung

$$G(s) = 0.$$

§. 4.

Da die in (8.) und (13.) für das Potential eines inneren und äusseren Punktes erhaltenen Formeln ähnlich gebaut sind, so kann man dieselben zu einer einzigen in folgender Weise vereinigen:

$$(14.) \qquad V = \pi \int_{\cdot}^{\infty} G(s)\,\frac{ds}{\sqrt{D(s)}},$$

wo die weggelassene untere Grenze im Falle eines inneren Punktes gleich Null, in dem Falle eines äusseren hingegen der positiven Wurzel der Gleichung $G(s) = 0$ gleich zu nehmen ist.

Ist das gegebene Ellipsoid auf seine Hauptaxen bezogen, lautet also seine Gleichung

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1,$$

so ist

$$D(s) = \left(\frac{s}{A^2}+1\right)\left(\frac{s}{B^2}+1\right)\left(\frac{s}{C^2}+1\right) = \frac{(s+A^2)(s+B^2)(s+C^2)}{A^2B^2C^2},$$

$$G(s) = 1 - \frac{a^2}{s+A^2} - \frac{b^2}{s+B^2} - \frac{c^2}{s+C^2}$$

und

$$V = \pi ABC \int^{x} \left[1 - \frac{a^2}{s+A^2} - \frac{b^2}{s+B^2} - \frac{c^2}{s+C^2}\right] \frac{ds}{\sqrt{(s+A^2)(s+B^2)(s+C^2)}},$$

wo die untere Grenze entweder Null oder die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{a^2}{s+A^2} + \frac{b^2}{s+B^2} + \frac{c^2}{s+C^2} = 1$$

ist, jenachdem der angezogene Punkt innerhalb oder ausserhalb des Ellipsoides liegt.

In dieser Form findet sich der Ausdruck des Potentials eines homogenen Ellipsoids zuerst bei *Dirichlet* vor in der Abhandlung „Ueber eine neue Methode zur Bestimmung vielfacher Integrale."

Krakau, im October 1868.

Bemerkungen über die verschiedenen Werthe, welche eine Function zweier reellen Variabeln erhält, wenn man diese Variabeln entweder nacheinander oder gewissen Beziehungen gemäss gleichzeitig verschwinden lässt.

(Von Herrn *Paul du Bois-Reymond* in Heidelberg.)

Ich unternahm die nachfolgende Untersuchung über die Grenzwerthe $f(0,0)$ einer Function zweier reellen Variabeln $f(x,y)$, in der Absicht über gewisse Punkte im Gebiete der Integralrechnung ins Reine zu kommen, und habe sie auch nur so weit fortgesetzt, bis ich diesen Zweck erreicht hatte. Da indessen einige neue begriffliche Ueberlegungen, die der Gegenstand mit sich bringt, von allgemeinerem Interesse sein dürften, und, vor allen Dingen, da mir hier fernerer Untersuchung ein ergiebiges Feld offen zu stehen scheint, so nehme ich keinen Anstand, diese „Bemerkungen“ der Oeffentlichkeit zu übergeben.

§. 1.

Vorbemerkungen.

Die weit überwiegende Mehrzahl der Functionen zweier Veränderlichen kann für einzelne Werthesysteme dieser Veränderlichen verschiedener Werthe oder auch einer stetigen Folge von Werthen fähig sein, jenachdem man den Veränderlichen die jenen Werthesystemen entsprechenden Werthe in verschiedener Reihenfolge *nacheinander* oder gewissen Beziehungen gemäss *gleichzeitig* ertheilt. So erhält der Ausdruck

$$z = \frac{x+(x+y)^2}{2x+y-(x+y)^2}$$

den Werth Null, wenn man erst x dann y gleich Null setzt, und den Werth

$\frac{1}{2}$, wenn man erst y dann x verschwinden lässt. Setzt man endlich zwischen x und y die Beziehung $y = \alpha x$ fest, vermöge deren beide Veränderliche gleichzeitig verschwinden, schreibt αx für y und setzt dann $x = 0$, so wird $z = \frac{1}{2+\alpha}$, und ist durch Variation von α einer stetigen Folge von Werthen fähig.

Geometrisch ist diese Bemerkung so zu interpretiren, dass die Mehrzahl der durch analytische Functionen darstellbaren Oberflächen $z = f(x, y)$ (x, y, z als orthogonale Coordinaten angesehen) von der auf gewissen Punkten der xy Ebene errichteten z-Ordinate nicht einmal oder eine endliche Anzahl mal geschnitten werden, sondern dass die ganze Ordinate oder doch ein endliches Stück von ihr in der Oberfläche liegt. So liegt z. B. die ganze z-Axe im windschiefen Paraboloid $z = \frac{ax+by}{x+y}$, und die Function $\frac{ax+by}{x+y}$ ist auch für das Werthesystem $x=0$, $y=0$ einer stetigen Folge verschiedener Werthe fähig.

Die Untersuchung der Functionen zweier Variabeln in der Umgebung solcher *Stetigvieldeutigkeitspunkte* hat hauptsächlich analytisches Interesse, und in diesem Sinne werde ich bei den nachfolgenden Betrachtungen mich der geometrischen Construction nur als Hülfsmittel bedienen, und die eigentlichen geometrischen Fragen, die Krümmung der Oberfläche $z = f(x, y)$ in den Stetigvieldeutigkeitspunkten, u. s. w. unberührt lassen.

Folgende Bezeichnungsweise wird öfters angewandt werden. Es wird unter $\lim_{x=x_1} \lim_{y=y_1} f(x, y)$ das verstanden, was aus $f(x, y)$ wird, wenn man darin erst $y = y_1$, dann $x = x_1$ setzt. So ist: $\lim_{y=0} \lim_{x=0} \frac{x+(x+y)^2}{2x+y-(x+y)^2} = 0$, und $\lim_{x=0} \lim_{y=0} \frac{x+(x+y)^2}{2x+y-(x+y)^2} = \frac{1}{2}$. Unter $\lim_{x=x_1, y=y_1} f(x, y)$ wird das verstanden, was aus $f(x, y)$ wird, wenn man darin, gemäss einer nebenbei gegebenen Beziehung zwischen x und y, den Grössen x und y gleichzeitig die Werthe x_1, y_1 ertheilt. So ist $\lim_{x=0, y=0} \frac{x+(x+y)^2}{2x+y-(x+y)^2} = \frac{1}{2+\alpha}$ für $y = \alpha x$.

Ferner werde ich im Folgenden als den Punkt, für welchen eine Function $f(x, y)$ stetig-vieldeutig wird, immer den Punkt $x = 0$, $y = 0$ annehmen, da es stets möglich ist solche Variabeln für x und y einzuführen, deren verschwindenden Werthen die Stetigvieldeutigkeitsstelle von $f(x, y)$ entspricht.

Endlich werde ich der kürzeren Darstellung wegen sagen: „Eine Relation $\varphi(x, y) = 0$ führt zum Grenzwerth z_1 von $z = f(x, y)$," wenn $f(x, y)$, sobald in ihr die Variablen x und y derart gleichzeitig verschwinden, dass sie dabei stets die

Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ erfüllen, den Werth z_1 für $x = 0$, $y = 0$ erhält. So führt die Relation $y - \alpha x = 0$ zum Grenzwerth $\frac{1}{2+\alpha}$ von $z = \frac{x+(x+y)^2}{2x+y-(x+y)^2}$, die Relation $y^5 - \alpha x^2 = 0$ führt zum Grenzwerth α von $z = \frac{y^5+xy^3}{x^2}$. Endlich führt die Relation $y - x - \alpha x^3 = 0$ zum Grenzwerth $\sqrt{3\alpha}$ von $z = \frac{x^4+y\sqrt{y^3-x^3}}{y^4+x\sqrt{x^5+y^5}}$.

§. 2.

Construction aller Werthe, deren eine Function $f(x, y)$ für $x = 0$, $y = 0$ fähig ist. Limitale.

Es giebt ein sehr einfaches Mittel, um sämmtliche Werthe zu construiren, die eine Function $f(x, y)$ für $x = 0$, $y = 0$ annehmen kann. Wir denken uns die Function wieder durch eine Oberfläche $z = f(x, y)$ dargestellt, indem x, y, z rechtwinklige Coordinaten bedeuten.

Dann construiren wir eine Cylinderfläche mit kreisförmiger Basis, deren Axe die z-Axe des Coordinatensystems ist, und die wir uns in der Richtung der positiven und der negativen z unbegrenzt denken. Der Halbmesser der Cylinderfläche sei ε. Sie schneidet die Oberfläche $z = f(x, y)$ in einer Curve, die wir die Curve C_ε nennen wollen. Nun stellen wir uns den Halbmesser ε kleiner und kleiner und schliesslich unendlich klein werdend vor, so dass jedem in der z-Axe gelegenen Werth von $f(x, y)$ ein von ihm unendlich wenig verschiedener Werth von z in der Curve C_ε entspricht. Diese Curve ist dann in der That die Darstellung aller in der z-Axe gelegenen Werthe von $f(x, y)$. Man übersieht leicht, dass diese Werthe stetig aufeinander folgen können, auch Unterbrechungen erleiden, und doppelt und mehrfach liegen können. Allein ein unendlich dünner Cylinder ist in diesem Falle eine für Vorstellung und Rechnung gleich unbequeme Fiction, weshalb wir durch eine kleine Erweiterung der Construction uns die Reihenfolge der Werthe von $f(x, y)$ in der z-Axe besser versinnlichen wollen, und zwar indem wir die Curve C_ε mit vergrösserten horizontalen (der xy-Ebene parallelen) Dimensionen auf einem den ersten Cylinder umschliessenden Cylinder abbilden, dessen Axe ebenfalls die z-Axe ist, und dessen kreisförmige Basis den Halbmesser 1 hat. Die Abbildung geschieht so.

Von einem beweglich gedachten Punkt auf der z-Axe lassen wir der xy-Ebene parallel einen Strahl ausgehen, der die Curve C_ε schneidet. Dieser Strahl wird den äusseren Cylinder in einem Punkt $\mathfrak{P}$ schneiden. Nun lassen

wir den beweglich gedachten Punkt z die ganze z-Axe von $z=-\infty$ bis $z=+\infty$ durchlaufen, während der von ihm ausgehende Strahl fortwährend der xy-Ebene parallel bleibt und die Curve C_ε schneidet. Dann beschreibt der bewegliche Punkt $\mathfrak{P}$ auf dem äusseren Cylinder eine Curve, die das verlangte vergrösserte Abbild der Curve C_ε ist. Die horizontalen Dimensionen der Curve C_ε sind im Abbild im Verhältniss von $1:\varepsilon$ vergrössert. Der wesentliche Vortheil dieser Art die Curve C_ε abzubilden besteht in Folgendem. Es sei ε zuerst eine endliche, kleine Grösse. Lassen wir dann ε fort und fort abnehmen, so wird das Abbild der Curve C_ε auf dem äusseren Cylinder, je kleiner ε wird, sich mehr und mehr einer Grenzgestalt nähern, und für $\varepsilon=0$ in diese Grenzgestalt übergehen. Diese Grenzgestalt ist dann das wirkliche Abbild der Werthe von $f(x,y)$ in der z-Axe, und für jeden Punkt der Grenzgestalt des Abbildes giebt die Richtung des ihn passirenden horizontalen Strahles die Richtung an, welche auf der Oberfläche $z=f(x,y)$ zu dem jenem Punkt zugehörigen Werth von $f(x,y)$ in der z-Axe führt. Da diese Grenzgestalt des Abbildes eine wesentliche Rolle in dieser Theorie spielt, so erlaube ich mir ihr einen besonderen Namen zu geben: ich werde sie die *Limitale* der Function oder der Oberfläche $z=f(x,y)$ nennen.

Nehmen wir zuerst an, dass die Function $f(x,y)$ für $x=0,\ y=0$ eindeutig und in der Umgebung dieses Punktes stetig ist. Dann ist für ein sehr kleines ε die Curve C_ε nahebei eine Ellipse, nämlich nahebei die Schnittlinie des inneren Cylinders mit der Tangentialebene an die Oberfläche $z=f(x,y)$ für den Punkt $x=0,\ y=0$. Das Abbild von C_ε ist aber eine sehr wenig von einer ebenen horizontalen abweichende Curve und geht für $\varepsilon=0$ in einen horizontalen Kreis über, und zwar in die Schnittlinie der Ebene $z=f(0,0)$ mit dem äusseren Cylinder, die also dann die Limitale der Oberfläche $z=f(x,y)$ für den Punkt $x=0,\ y=0$ ist. Wenn jedoch $f(x,y)$, wie bei den eingangs angeführten Beispielen, für $x=0,\ y=0$ stetig-vieldeutig ist, so wird die Limitale eine andere Curve sein, deren Gleichung man findet, wie folgt: Wir setzen $x=\varepsilon\cos\varphi,\ y=\varepsilon\sin\varphi$. Dann ist $z=f(\varepsilon\cos\varphi,\varepsilon\sin\varphi)$ die Gleichung der Curve C_ε, und dies ist auch die Gleichung ihres Abbildes auf dem äusseren Cylinder. Die Gleichung der Limitale ist $z=\lim_{\varepsilon=0} f(\varepsilon\cos\varphi,\varepsilon\sin\varphi)$. Es sei z. B.

$$z=\frac{ax+by}{a_1x+b_1y}.$$

Führen wir hier ε und φ statt x und y ein und setzen noch $a=a'\sin\alpha$,

$b = a' \cos\alpha$, $a_1 = a_1' \sin\alpha_1$, $b_1 = a_1' \cos\alpha_1$, so wird:

$$z = \frac{a'}{a_1'} \frac{\sin(\varphi+\alpha)}{\sin(\varphi+\alpha_1)}$$

die Gleichung der Limitale. Nehmen wir u. a. an $\alpha_1 = \alpha + \frac{1}{2}\pi$ oder $aa_1 - bb_1 = 0$, so wird die Gleichung der Limitale $z = \frac{a'}{a_1} \operatorname{tg}(\varphi+\alpha)$ und lässt sich auf dem aufgewickelten äusseren Cylinder, einem Flächenstreifen, dessen Breite 2π beträgt, leicht aufzeichnen.

§. 3.

Zwei Modificationen in der Construction der Limitale.

Eine so gute geometrische Uebersicht über den Inbegriff sämmtlicher Werthe, deren eine Function $f(x, y)$ für $x=0$, $y=0$ fähig ist, die mitgetheilte Construction auch gewähren mag, so ist sie analytisch weniger vortheilhaft, wegen der trigonometrischen Functionen oder der ihnen entsprechenden algebraischen Wurzelgrössen, mit denen sie die Rechnung beschwert. Folgende Constructionen der Limitale gestatten zwar nur die Darstellung eines Theils der Grenzwerthe $f(x, y)$ für $x=0$, $y=0$, sind aber, bei ebenfalls guter Uebersichtlichkeit, für die Rechnung wesentlich bequemer.

Wie bei der Construction des vorigen Paragraphen das Bild, nämlich die Curve C_ε, auf einem Cylinder erhalten und das Abbild auf einem zweiten Cylinder entworfen wurde, so werden wir jetzt auf zwei verschiedene Weisen das Bild auf einer Ebene herstellen und das Abbild auf eine Ebene projiciren.

1) Wir errichten, senkrecht auf die xy-Ebene, die Ebenen $x+y=\varepsilon$ und $x+y=1$, welche die x-Axe und y-Axe in den Entfernungen ε resp. 1 vom Nullpunkt schneiden. ε denken wir uns wieder ziemlich klein. Die Ebene $x+y=\varepsilon$ wird die Oberfläche $z=f(x, y)$ in einer Curve schneiden, deren Endpunkte ich mit $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ bezeichnen will, und zwar hat $\mathfrak{P}_1$ die Coordinaten

$$x=\varepsilon, \quad y=0, \quad z=f(\varepsilon, 0)$$

und $\mathfrak{P}_2$ hat die Coordinaten:

$$x=0, \quad y=\varepsilon, \quad z=f(0, \varepsilon).$$

Die diese Punkte verbindende Schnittcurve will ich die Curve $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ nennen. Wir bilden sie wieder vergrössert auf der Ebene $x+y=1$ ab, indem wir von der z-Axe einen horizontalen Strahl ausgehen lassen, der die ganze Curve $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ durchläuft. Dieser Strahl zeichnet auf der Ebene $x+y=1$ ein horizontal

vergrössertes Abbild der Curve $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$, welches für $\varepsilon = 0$ in eine Grenzgestalt übergeht, die wir wieder die *Limitale* nennen. Für eine Oberfläche, die im Punkt $x=0$, $y=0$ eindeutig und stetig ist, wird die Limitale eine horizontale Gerade, für andere Oberflächen findet man ihre Gleichung, wie folgt.

Nennen wir $\zeta\sqrt{2}$ die variable Entfernung eines Punktes der Linie $x+y=\varepsilon$, $z=0$ vom Punkt $x=\varepsilon$, $y=0$, $z=0$, so ist

$$z = f(\varepsilon-\zeta, \zeta)$$

die Gleichung der Curve $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$. Es sei ferner $\gamma\sqrt{2}$ die variable Entfernung eines Punktes der Linie $x+y=1$, $z=0$ vom Punkt $x=1$, $y=0$, $z=0$, so dass $\zeta:\gamma = \varepsilon:1$. Man hat mithin in der Gleichung $z=f(\varepsilon-\zeta,\zeta)$ der Curve $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ nur $\varepsilon\gamma$ statt ζ zu schreiben, um die Gleichung ihres vergrösserten Abbildes zu erhalten, die mithin lautet:

$$z = f(\varepsilon(1-\gamma), \varepsilon\gamma);$$

auch ist $x=\varepsilon(1-\gamma)$, $y=\varepsilon\gamma$. Lässt man in der vorstehenden Gleichung ε verschwinden, so folgt die Gleichung der Limitale, welche ich mit

$$z = L(\gamma)$$

bezeichnen werde.

2) Ein drittes Verfahren sich eine Limitale zu verschaffen werde ich hier nur kurz andeuten, weil erst in den späteren Abschnitten dieser Arbeit davon Gebrauch gemacht wird. Man bildet nämlich die Schnittlinie der Ebene $x=\varepsilon$ mit der Oberfläche $z=f(x,y)$ auf der Ebene $x=1$ ab. Die Limitale wird hier freilich eine sich ins Unendliche erstreckende Curve, was indessen dann keine Unbequemlichkeiten macht, wenn es sich allein um ihre Gestalt in der Nähe des Punktes $x=1$, $y=0$ handelt. Dann ist die analytische Behandlung der Function $f(x,y)$ für $x=0$, $y=0$ noch einfacher als bei der vorigen Abbildung, da die Gleichung der Schnittlinie von $x=\varepsilon$ mit $z=f(x,y)$ lautet: $z=f(\varepsilon,y)$, die des Abbildes auf $x=1$: $z=f(\varepsilon,\eta\varepsilon)$, wo η die Entfernung eines Punktes der Linie $x=1$, $z=0$ vom Punkt $x=1$, $y=0$, $z=0$ bedeutet. Aus $z=f(\varepsilon,\eta\varepsilon)$ folgt alsdann die Gleichung der Limitale, indem man $\varepsilon=0$ setzt.

§. 4.

Charakter der Limitale im Allgemeinen. Ihre Stetigvieldeutigkeitspunkte.

Indem wir uns nun zu der eigentlichen Discussion der Limitale wenden, wollen wir, um die Untersuchung nicht unnöthig zu verwickeln, über die Function $f(x,y)$ gewisse Voraussetzungen machen. Wir werden annehmen,

dass $f(x, y)$ für keinen Punkt des positiven Quadranten, dessen Modulus $\sqrt{x^2+y^2}$ einen gewissen, beliebig klein zu denkenden Werth nicht überschreitet, unbestimmt werde, sondern für jeden so beschaffenen Werth von x und y einen, und nur einen, völlig bestimmten Werth habe, mit Ausnahme eben des Punktes $x=0$, $y=0$, für welchen $f(x, y)$ stetig-vieldeutig wird.

Wir wählen das zweite Abbildungsverfahren, um daraus die Limitale zu erhalten: d. i. wir construiren die Ebenen $x+y=\varepsilon$, $x+y=1$, bilden die Curve $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ (die Schnittcurve von $x+y=\varepsilon$ mit der Oberfläche $z=f(x, y)$) auf der Ebene $x+y=1$ mit einer horizontalen Vergrösserung von $1:\varepsilon$ ab, und lassen dann ε verschwinden. Bevor ε den Werth Null erreicht, sagt unsere Voraussetzung über $f(x, y)$ von der Curve $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ aus, dass dieselbe für keinen Punkt $x=\varepsilon-\zeta$, $y=\zeta$ eine endliche der z-Axe parallele Strecke habe. Denn nur dann könnte eine z-Ordinate der Oberfläche $z=f(x, y)$ oder der Curve $z=f(\varepsilon-\zeta, \zeta)$ unbestimmt werden. Das Nämliche gilt von dem Abbild der Curve $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ auf der Ebene $x+y=1$, deren Gleichung $z=f(\varepsilon(1-\gamma), \varepsilon\gamma)$ ist. Unter der obigen Voraussetzung wird für keinen von Null verschiedenen Werth von ε eine endliche Strecke dieses Abbildes der z-Axe parallel laufen können.

Lassen wir ε kleiner und kleiner werden, so wird das Abbild der Curve $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ sich mehr und mehr seiner Grenzgestalt nähern. Es wird einen gewissen kleinen Werth von ε geben, von welchem an bei fernerer Abnahme von ε Anzahl und Reihenfolge der Maxima und Minima und sonstigen Singularitäten des Abbildes sich nicht mehr verändern. Wenn ε verschwindet, rückt vielleicht ein Maximum ins Unendliche, eine Unstetigkeit, die für ein unendlich kleines ε unendlich klein war, verschwindet, kurz für sehr kleine endliche Werthe von ε wird das Abbild mit seiner Grenzgestalt für $\varepsilon=0$ im Allgemeinen grosse Aehnlichkeit haben. Nur ein wesentlicher Unterschied zwischen dem Abbild und der Limitale kann eintreten. Von dem Abbild hatten wir vorausgesetzt, dass es keine senkrecht (der z-Axe parallel) verlaufenden Strecken habe. Die Voraussetzung der Bestimmtheit von $f(x, y)$ erstreckte sich nicht auf den Punkt $x=0$, $y=0$. Ebenso kann auch nicht von der Grenzgestalt des Abbildes vorausgesetzt werden, dass sie keine senkrechten Strecken habe. Es wird vielmehr Strecken des Abbildes geben können, die bei Abnahme von ε sich mehr und mehr der z-Axe parallelen Geraden nähern und für $\varepsilon=0$ darin übergehen. Diese Vermuthung, deren Richtigkeit später durch genauere Betrachtungen als richtig erkannt werden wird, ist leicht

vorläufig durch Beispiele zu bestätigen, indem wir zeigen, dass die Limitale für gewisse Punkte stetig-vieldeutig wird. Es sind dies einfach die Werthe von γ, für welche die Function zweier Variabeln $f(\varepsilon(1-\gamma), \varepsilon\gamma)$, wenn darin $\varepsilon = 0$ und der betreffende Werth von γ gesetzt wird, sich ihrerseits stetig-vieldeutig erweist. Wir wählen folgende Functionen:

$$\frac{ax^2+bxy+cy^2}{a_1x^2+b_1xy+c_1y^2}, \qquad \frac{ay^2+bx+cy}{a_1y^2+b_1x+c_1y}, \qquad \frac{(x+y)^4+2xy^2+x^2y}{(x+y)^5+xy^2+x^2y}.$$

Hierin $\varepsilon(1-\gamma)$ statt x und $\varepsilon\gamma$ statt y gesetzt, werden sie:

$$\frac{\gamma^2(a-b+c)+\gamma(b-2a)+a}{\gamma^2(a_1-b_1+c_1)+\gamma(b_1-2a_1)+a_1}, \qquad \frac{\varepsilon\gamma^2a+\gamma(c-b)+b}{\varepsilon\gamma^2a_1+\gamma(c_1-b_1)+b_1},$$

$$\frac{\varepsilon+2(1-\gamma)\gamma^2+(1-\gamma)^2\gamma}{\varepsilon^2+(1-\gamma)\gamma^2+(1-\gamma)^2\gamma}.$$

Die ersteren beiden Brüche liefern für jeden zwischen 0 und 1 gelegenen Werth von γ, sobald ε gleich Null gesetzt wird, eine völlig bestimmte Function $L(\gamma)$, und haben also keinen Stetigvieldeutigkeitspunkt. Der letztere Bruch ist für $\varepsilon = 0$ ebenfalls bestimmt für alle Werthe von γ zwischen $\gamma = 0$ excl. und $\gamma = 1$ excl. Setzt man den einen oder den anderen dieser beiden Werthe in den letzteren Bruch ein und setzt gleichzeitig $\varepsilon = 0$, so wird er stetig-vieldeutig.

Das Interesse der Theorie concentrirt sich in den Stetigvieldeutigkeits-punkten der Limitale. Was sich sagen lässt über die Grenzwerthe für $x = 0$, $y = 0$ einer Function $f(x, y)$, deren Limitale $z = \lim_{\varepsilon=0} f(\varepsilon(1-\gamma), \varepsilon\gamma)$ für keinen Werth von γ stetigvieldeutig wird, oder genauer zu reden, über die Intervalle von γ, in denen die Limitale keinen Stetigvieldeutigkeitspunkt hat, werde ich im folgenden Paragraphen zusammenfassen, um alsdann zur Discussion der Stetigvieldeutigkeitspunkte der Limitale überzugehen.

§. 5.

Ueber die Grenzwerthe von $z = f(x, y)$, zu denen eine gegebene Relation $\varphi(x, y) = 0$ führt in Strecken der Limitale, wo sie eindeutig ist.

Wenn, wie wir der Einfachheit halber annehmen wollen, die Limitale $z = \lim_{\varepsilon=0} f(\varepsilon(1-\gamma), \varepsilon\gamma) = L(\gamma)$ für jeden Werth von γ völlig bestimmt ist, so hat es gar keine Schwierigkeit die Art anzugeben, wie die Variabeln in $f(x, y)$ verschwinden müssen, um beliebig gegebene Grenzwerthe von $f(x, y)$ zu erhalten, oder anzugeben, zu welchem Grenzwerth eine beliebig gegebene Relation $\varphi(x, y) = 0$ führt, vermöge deren die Variabeln x und y gleichzeitig

verschwinden können. Wir denken uns senkrecht auf die xy-Ebene eine Ebene durch den positiven Quadranten gelegt, die in der z-Axe endigt. Ihre Gleichung sei $y-\alpha x=0$. Diese Ebene wird die Limitale auf der Ebene $x+y=1$ in einem Punkt $z_1=L(\gamma_1)$ schneiden. Dann lässt sich zunächst sowohl geometrisch wie analytisch zeigen, dass auch z_1 der Werth ist, welchen man erhält, wenn man in $f(x, y)$ x und y der Relation $y-\alpha x=0$ gemäss verschwinden lässt.

Die Ebene $y-\alpha x=0$ schneidet die Oberfläche $z=f(x, y)$ in einer Curve, deren Abbild auf der Ebene $x+y=1$ (nach dem schon mehrmals angewandten Abbildungsverfahren gezeichnet) eine senkrechte Gerade ist, die in der Limitale endet. Dieser Endpunkt in der Limitale ist aber der Punkt $z_1=L(\gamma_1)$, und ist das Abbild des Punktes, in dem die Schnittlinie der Ebene $y-\alpha x=0$ mit der Oberfläche $z=f(x, y)$ in der z-Axe anlangt.

Ferner ist $\gamma_1=\frac{\alpha}{1+\alpha}$. Der Werth von $z=f(x, y)$, welchen man erhält, wenn x und y der Relation $y-\alpha x=0$ gemäss verschwinden, ist $\lim_{x=0} f(x, \alpha x)$. Es ist aber:

$$L(\gamma_1)=L\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)=\lim_{\varepsilon=0} f(\varepsilon(1-\gamma), \varepsilon\gamma)=\lim_{\varepsilon=0}\lambda\left(\frac{\varepsilon}{1+\alpha}, \frac{\varepsilon\alpha}{1+\alpha}\right),$$

wenn $\frac{\alpha}{1+\alpha}$ statt γ geschrieben wird. Da nun offenbar

$$\lim_{\varepsilon=0}\lambda\left(\frac{\varepsilon}{1+\alpha}, \frac{\varepsilon\alpha}{1+\alpha}\right)=\lim_{\frac{\varepsilon}{1+\alpha}=0} f\left(\frac{\varepsilon}{1+\alpha}, \alpha\cdot\frac{\varepsilon}{1+\alpha}\right)$$

ist, so ist auch $L(\gamma_1)=\lim_{x=0} f(x, \alpha x)$, wenn wir x statt $\frac{\varepsilon}{1+\alpha}$ schreiben.

Nun sei eine Beziehung $\varphi(x, y)=0$, vermöge deren die Variabeln x und y gleichzeitig verschwinden können, beliebig gegeben. Der Grenzwerth von $z=f(x, y)$, zu welchem sie führt, lässt sich construiren, wie folgt. Wir errichten senkrecht auf die xy-Ebene in der Curve $\varphi(x, y)=0$ eine Cylinderfläche, die in der z-Axe endigt. Das Abbild ihrer Schnittlinie mit der Oberfläche $z=f(x, y)$ endigt in der Limitale im Punkte, wo die durch die z-Axe gehende Tangentialebene an die Cylinderfläche $\varphi(x, y)=0$ die Limitale schneidet. Dies lehrt in der That eine einfache Ueberlegung. Denn legen wir durch den abbildenden Strahl (der von der z-Axe ausgehend horizontal durch die Curve $\varphi(x, y)=0$, $z=f(x, y)$ bis zur Ebene $x+y=1$ geht) und durch die z-Axe eine Ebene, so wird das Abbild jedes Punktes der Curve $\varphi(x, y)=0$, $z=f(x, y)$ in der jedesmaligen Schnittlinie dieser Ebene mit der Ebene $x+y=1$ liegen. Drehen wir nun den abbildenden

Strahl so lange, bis er eben die Curve $\varphi(x, y) = 0$, $z = f(x, y)$ nicht mehr schneidet, d. i. bis diese eben in die z-Axe gelangt, so wird auch die durch die z-Axe und den abbildenden Strahl gelegte Ebene die Cylinderfläche $\varphi(x, y) = 0$ eben nicht mehr schneiden, d. h. sie wird sie berühren, woraus das Gesagte folgt.

Jetzt sei $y - y_0' x = 0$ die Gleichung der die z-Axe enthaltenden Tangentialebene an die Cylinderfläche $\varphi(x, y) = 0$, wo

$$y_0' = -\lim_{x=0, y=0} \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}},$$

in welchem Ausdruck x und y der Relation $\varphi(x, y) = 0$ gemäss gleich Null zu setzen sind. Dem Obigen zufolge führen also die Relationen $y - y_0' x = 0$ und $\varphi(x, y) = 0$ zum nämlichen Punkt: $\gamma = \frac{y_0'}{1+y_0'}$, $z_1 = L\left(\frac{y_0'}{1+y_0'}\right)$ der Limitale, oder die Relation $\varphi(x, y) = 0$ führt zum Grenzwerth $\lim_{x=0} f(x, xy_0')$ von $f(x, y)$.

Dies wird dann ohne Ausnahme der Fall sein, wenn die Limitale für $\gamma_1 = \frac{y_0'}{1+y_0'}$ keinen Stetigvieldeutigkeitspunkt hat, d. h. wenn $f(\varepsilon(1-\gamma), \varepsilon\gamma)$ für $\varepsilon = 0$, $\gamma = \gamma_1$ oder nach dem Obigen $f(x, xy')$ für $x = 0$, $y' = y_1'$ nicht stetigvieldeutig wird. Tritt nämlich das letztere ein, so kann der Punkt nicht angegeben werden, in dem die Ebene $y - xy_0' = 0$ die Limitale schneidet, da diese ein endliches Stück einer senkrechten Geraden ist, welches vollständig in der Ebene $y - xy_0' = 0$ liegt.

Was die Grösse y_0' betrifft, so wird man sie am zweckmässigsten so bestimmen, dass man xy_0' statt y in $\varphi(x, y) = 0$ einsetzt und die Gleichung $\lim_{x=0} \varphi(x, xy_0') = 0$ nach y_0' auflöst. Ist z. B.

$$\varphi(x, y) \equiv x^3 + ay^3 + \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 = 0,$$

so hat man zur Bestimmung von y_0' die Gleichung

$$\gamma y_0'^2 + \beta y_0' + \alpha = 0.$$

Nach allem Diesem gelangen wir zu der einfachen Regel: *Um den Grenzwerth von $z = f(x, y)$ zu finden, zu welchem eine gegebene Relation $\varphi(x, y) = 0$ führt, hat man die beiden Gleichungen zu bilden:*

$$\lim_{x=0} \varphi(x, xy_0') = 0, \quad \lim_{x=0} f(x, xy_0') = z_1,$$

und aus der ersten y_0' in die zweite einzusetzen. z_1 ist dann der gesuchte Grenzwerth. Diese Regel wird nur dann ungültig, wenn $f(x, xy')$ für $x = 0$, $y' = y_0'$ stetigvieldeutig ist.

Man kann die Resultate dieses Paragraphen auch durch Reihenentwicklung ableiten, aber auf weniger sicherem Wege, und ohne sich so leicht Rechenschaft von der Bedeutung der Ausnahmefälle geben zu können.

Wir schreiten nunmehr zur Untersuchung der wichtigsten unter den sehr mannigfaltigen Arten von Stetigvieldeutigkeitspunkten der Limitale.

§. 6.

Beispiele für die Discussion von Limitalen mit Stetigvieldeutigkeitspunkten.

Ich beginne damit, in einer Reihe von besonderen Fällen die Limitale vollständig zu construiren. Wir lernen so deren verschiedenartige Stetigvieldeutigkeiten am schnellsten kennen und werden direct auf die zu beantwortenden Fragen hingewiesen.

Ich werde bei den einzelnen Beispielen den Verlauf der Limitale in tabellarischer Uebersicht angeben. Diesen Verlauf der Limitale finde ich auf indirectem Wege. Die Functionen $f(x, y)$, um deren Grenzwerthe für $x=0$, $y=0$ es sich handeln soll, wähle ich nämlich als Quotienten ganzer rationaler Functionen von x und y, was mich in den Stand setzt, deren sämmtliche Grenzwerthe aufzufinden, indem ich $\alpha x^{\mu}+\alpha_1 x^{\mu_1}+\cdots$ für y oder $\alpha' y^{\mu'}+\alpha_1' y^{\mu_1'}+\cdots$ für x setze und dann x oder y verschwinden lasse. Hat man so sämmtliche Grenzwerthe, d. i. sämmtliche z-Ordinaten der Limitale von $f(x, y)$ und zwar in der richtigen Reihenfolge gefunden, so ist es sehr leicht, die zugehörigen Abscissen γ anzugeben. Denn die Relation $y=\alpha x^{\mu}+\alpha_1 x^{\mu_1}+\cdots$ führe zum Grenzwerth z_1 von z, alsdann ist die zugehörige Abscisse γ_1 bestimmt durch $\gamma_1=\frac{y_0'}{1+y_0'}$, und y_0' ist bestimmt durch $y_0'=\lim_{x=0}\frac{\partial}{\partial x}(\alpha x^{\mu}+\alpha_1 x^{\mu_1}+\cdots)$. Auf diese Weise können wir also die ganze Limitale construiren. Ich werde dies zuerst ausführlich an einem einfachen Beispiel zeigen, und mich bei den ferneren Beispielen darauf beschränken, eine tabellarische Uebersicht vom Verlauf der Limitale zu geben.

I. Es sei zuerst:

$$z=f(x, y)=\frac{x^3+2xy+y^2}{x^3+xy+y^2}$$

(in welchem Falle die äussersten Grenzwerthe $\lim_{x=0}\lim_{y=0}f(x, y)$ und $\lim_{y=0}\lim_{x=0}f(x, y)$ einander gleich und $=1$ sind). Man hat als Gleichung des Abbilds der Curve $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ auf der Ebene $x+y=1$:

$$z=f(\varepsilon(1-\gamma), \varepsilon\gamma)=\frac{\varepsilon(1-\gamma)^3+2\gamma(1-\gamma)+\gamma^2}{\varepsilon(1-\gamma)^3+\gamma(1-\gamma)+\gamma^2}.$$

Für $\varepsilon = 0$, $\gamma = 0$ wird $f(\varepsilon(1-\gamma), \varepsilon\gamma)$ stetig-vieldeutig, ist dagegen für jeden andern Werth von γ im Intervall $\gamma = 0 \ldots \gamma = 1$ bestimmt, und zwar ist dann $\lim_{\varepsilon=0} f(\varepsilon(1-\gamma), \varepsilon\gamma) = 2-\gamma$. Für $\gamma = 0$ wird also die Limitale eine senkrechte Gerade, deren Begrenzungen zu untersuchen sind. Um sämmtliche Grenzwerthe von $z = f(x, y)$ zu finden, reicht es in diesem Falle aus, für y einzusetzen αx^μ, und alle Werthe $\lim_{x=0} f(x, \alpha x^\mu)$ aufzusuchen, wenn μ das Intervall von ∞ bis 0 und α das Intervall von 0 bis ∞ durchläuft.

Es ist:

$$f(x, \alpha x^\mu) = \frac{x^3 + 2\alpha x^{\mu+1} + \alpha^2 x^{2\mu}}{x^3 + \alpha x^{\mu+1} + \alpha^2 x^{2\mu}}.$$

Man erhält nun für $\lim_{x=0} f(x, \alpha x^\mu)$ folgende Reihenfolge von Werthen. Für $\infty > \mu > 2$ und einen beliebigen unendlichen Werth von α ist $\lim_{x=0} f(x, \alpha x^\mu) = 1$. Für $\mu = 2$ wird $\lim_{x=0} f(x, \alpha x^\mu) = \frac{1+2\alpha}{1+\alpha}$. Lässt man jetzt α alle Werthe von 0 bis ∞ durchlaufen, so durchläuft $\frac{1+2\alpha}{1+\alpha}$ alle Werthe von 1 bis 2. Für $2 > \mu > 1$ ist $\lim_{x=0} f(x, \alpha x^\mu) = 2$. Für $\mu = 1$ ist $\lim_{x=0} f(x, \alpha x^\mu) = \frac{2+\alpha}{1+\alpha}$ und durchläuft, während α von 0 bis ∞ geht, alle Werthe von 2 bis 1. Für $\mu < 1$ ist $\lim_{x=0} f(x, \alpha x^\mu) = 1$, und hiermit ist die Reihenfolge der möglichen Grenzwerthe von $f(x, y)$ vollkommen erschöpft, d. i. wir kennen der Reihe nach die Werthe der z-Ordinate der Limitale.

Was nun die entsprechenden Werthe von γ betrifft, so ist $y_0' = \alpha\mu \lim_{x=0} x^{\mu-1}$ Null für $\mu > 1$, α für $\mu = 1$, unendlich für $\mu < 1$. Also hat man für $\mu > 1$, $\gamma = 0$, für $\mu = 1$, $\gamma = \frac{\alpha}{1+\alpha}$, für $\mu < 1$, $\gamma = 1$.

Wir ordnen jetzt die gefundenen Werthe in folgender Tabelle an, deren Bildungsprincip wohl keiner Erklärung bedarf.

$\varphi(x, y) = 0$	γ	z
1) Erst $y = 0$, dann $x = 0$	0	1
2) $y = \alpha x^\mu$, $\infty > \mu > 2$, α beliebig	0	1
3) – , $\mu = 2$, α von 0 bis ∞	0	$\frac{1+2\alpha}{1+\alpha}$, von 1 bis 2
4) – , $2 > \mu > 1$, α beliebig	0	2
5) – , $\mu = 1$, α von 0 bis ∞	von 0 bis 1	$\frac{2+\alpha}{1+\alpha}$, von 2 bis 1
6) – , $0 < \mu < 1$, α beliebig	1	1
7) Erst $x = 0$, dann $y = 0$	1	1

Ich bemerke, dass, wo „α beliebig“ steht, α in der That für jeden durch die

Ungleichheit linker Hand gestatteten Werth von μ alle Werthe zwischen 0 und ∞ erhalten kann. Um die Analogie innezuhalten, verstehe ich im Folgenden unter „α beliebig", dass α für jeden gestatteten Werth von μ von 0 bis ∞ geht.

II. Das zweite Beispiel ist etwas zusammengesetzter:

$$z = f(x, y) = \frac{a(x+y)^4 + bx^2y + cxy^2}{a_1(x+y)^4 + b_1x^2y + c_1xy^2}.$$

Es wird: $$f(\varepsilon(1-\gamma), \varepsilon\gamma) = \frac{a\varepsilon + b\gamma(1-\gamma)^2 + c\gamma^2(1-\gamma)}{a_1\varepsilon + b_1\gamma(1-\gamma)^2 + c_1\gamma^2(1-\gamma)},$$

und die Limitale ist stetigvieldeutig für $\gamma = 0$ und $\gamma = 1$. Für alle übrigen Werthe von γ ist $\lim_{\varepsilon=0} f(\varepsilon(1-\gamma), \varepsilon\gamma)$ bestimmt und gleich $\frac{b+\gamma(c-b)}{b_1+\gamma(c_1-b_1)}$. Es reicht hier wieder die Substitution $y = \alpha x^\mu$ aus, und wir erhalten die Tabelle:

$\varphi(x, y) = 0$	γ	z
1) Erst $y=0$, dann $x=0$	0	$\frac{a}{a_1}$
2) $y=\alpha x^\mu$, $\infty > \mu > 2$, α beliebig	0	$\frac{a}{a_1}$
3) - , $\mu=2$, α von 0 bis ∞	0	$\frac{a+\alpha b}{a_1+\alpha b_1}$ von $\frac{a}{a_1}$ bis $\frac{b}{b_1}$
4) - , $2 > \mu > 1$, α beliebig	0	$\frac{b}{b_1}$
5) - , $\mu=1$, α von 0 bis ∞	von 0 bis 1	$\frac{b+\alpha c}{b_1+\alpha c_1}$ von $\frac{b}{b_1}$ bis $\frac{c}{c_1}$
6) - , $1 > \mu > \frac{1}{2}$, α beliebig	1	$\frac{c}{c_1}$
7) - , $\mu=\frac{1}{2}$, α von 0 bis ∞	1	$\frac{\alpha^2 a+c}{\alpha^2 a_1+c_1}$ von $\frac{c}{c_1}$ bis $\frac{a}{a_1}$
8) - , $\frac{1}{2} > \mu > 0$, α beliebig	1	$\frac{a}{a_1}$
9) Erst $x=0$, dann $y=0$	1	$\frac{a}{a_1}$

III. Als drittes Beispiel wählen wir einen Fall, wo die Limitale für einen zwischen 0 und 1 gelegenen Werth von γ stetigvieldeutig wird. Es sei:

$$f(x, y) = \frac{a(x+y)^4 + by^2(y-x) + cy(y-x)^2}{a_1(x+y)^4 + b_1y^2(y-x) + c_1y(y-x)^2}.$$

Dann ist: $$f(\varepsilon(1-\gamma), \varepsilon\gamma) = \frac{a\varepsilon + b\gamma^2(2\gamma-1) + c\gamma(2\gamma-1)^2}{a_1\varepsilon + b_1\gamma^2(2\gamma-1) + c_1\gamma(2\gamma-1)^2},$$

und die Limitale wird für $\gamma = \frac{1}{2}$ stetigvieldeutig. Um die Werthe, deren $f(x, y)$ für diesen Punkt fähig ist, zu finden, müssen solche Functionen $\varphi(x, y) = 0$ substituirt werden, die $y_0' = 1$ ergeben. Dies sind z. B.

$$y = x + \alpha x^{\mu}, \qquad x = y + \beta y^{\mu},$$

und die Anwendung dieser Substitution liefert uns auch die vollständige Limitale, wie die folgende Tabelle zeigt *).

$\varphi(x,y)=0$	γ	z
1) Erst $y=0$, dann $x=0$	0	$\frac{a}{a_1}$
2) $y=\alpha x^{\mu}$, $\infty > \mu > 2$, α beliebig	0	$\frac{a}{a_1}$
3) - , $\mu=2$, α von 0 bis ∞	0	$\frac{a+\alpha c}{a_1+\alpha c_1}$ von $\frac{a}{a_1}$ bis $\frac{c}{c_1}$
4) - , $2>\mu>1$, α beliebig	0	$\frac{c}{c_1}$
5) - , $\mu=1$, α von 0 bis 1 excl.	von 0 bis $\frac{1}{2}$	$\frac{b\alpha+c(\alpha-1)}{b_1\alpha+c_1(\alpha-1)}$ von $\frac{c}{c_1}$ bis $\frac{b}{b_1}$
6) $y=x-\alpha x^{\mu}$, $1<\mu<2$, α beliebig †	$\frac{1}{2}$	$\frac{b}{b_1}$
7) - , $\mu=2$, α von ∞ bis 0	$\frac{1}{2}$	$\frac{8a-b\alpha}{8a_1-b_1\alpha}$ von $\frac{b}{b_1}$ bis $\frac{a}{a_1}$
8) - , $2<\mu<\infty$, α beliebig †	$\frac{1}{2}$	$\frac{a}{a_1}$
9) $y=x$,	$\frac{1}{2}$	$\frac{a}{a_1}$
10) $y=x+\alpha x^{\mu}$, $\infty>\mu>2$, α beliebig	$\frac{1}{2}$	$\frac{a}{a_1}$
11) - , $\mu=2$, α von 0 bis ∞	$\frac{1}{2}$	$\frac{8a+b\alpha}{8a_1+b_1\alpha}$ von $\frac{a}{a_1}$ bis $\frac{b}{b_1}$
12) - , $2>\mu>1$, α beliebig	$\frac{1}{2}$	$\frac{b}{b_1}$
13) $y=\alpha x^{\mu}$, $\mu=1$, α von 1 excl. bis ∞	von $\frac{1}{2}$ bis 1	$\frac{b\alpha+c(\alpha-1)}{b_1\alpha+c_1(\alpha-1)}$ von $\frac{b}{b_1}$ bis $\frac{b+c}{b_1+c_1}$
14) - , $1>\mu>0$	1	$\frac{b+c}{b_1+c_1}$
15) Erst $x=0$, dann $y=0$	1	$\frac{b+c}{b_1+c_1}$

IV. Die bisher betrachteten Stetigvieldeutigkeiten wurden durch *eine* Substitution aufgelöst. Ich werde noch ein dem vorigen ähnliches Beispiel geben, bei welchem die Limitale für $\gamma = 0$ eine Stetigvieldeutigkeit hat, die

*) Bei den mit einem † versehenen Substitutionen in den folgenden Tabellen bedeutet „α beliebig“, dass α für jeden gestatteten Werth von μ von ∞ bis 0 gehend gedacht wird.

nur durch *zwei* verschiedene Substitutionen aufgelöst werden kann. Es sei

$$f(x,y) = \frac{ax^7+by^2(y-x^2)+cy(y-x^2)^2}{a_1x^7+b_1y^2(y-x^2)+c_1y(y-x^2)^2}.$$

Man hat:

$$f(\varepsilon(1-\gamma),\varepsilon\gamma) = \frac{a\varepsilon^4(1-\gamma)^7-b\gamma^2(\gamma^2-\gamma+1)+c\gamma(\gamma^2-\gamma+1)^2}{a_1\varepsilon^4(1-\gamma)^7-b_1\gamma^2(\gamma^2-\gamma+1)+c_1\gamma(\gamma^2-\gamma+1)^2}.$$

Die Limitale hat also nur für $\gamma=0$ eine Stetigvieldeutigkeit, da $\gamma^2-\gamma+1$ zwischen den Grenzen $\gamma=0$ und $\gamma=1$ nicht verschwindet. Folgendes ist die tabellarische Uebersicht ihres Verlaufs:

$\varphi(x,y)=0$	γ	z
1) Erst $y=0$, dann $x=0$	0	$\frac{a}{a_1}$
2) $y=\alpha x^\mu$, $\infty>\mu>3$, α beliebig	0	$\frac{a}{a_1}$
3) – , $\mu=3$, α von 0 bis ∞	0	$\frac{a+\alpha c}{a_1+\alpha c_1}$ von $\frac{a}{a_1}$ bis $\frac{c}{c_1}$
4) – , $3>\mu>2$, α beliebig	0	$\frac{c}{c_1}$
5) – , $\mu=2$, α von 0 bis 1	0	$\frac{b\alpha+c(\alpha-1)}{b_1\alpha+c_1(\alpha-1)}$ von $\frac{c}{c_1}$ bis $\frac{b}{b_1}$
6) $y=x^2-\alpha x^\mu$, $2<\mu<3$, α beliebig †	0	$\frac{b}{b_1}$
7) – , $\mu=3$, α von ∞ bis 0	0	$\frac{a-\alpha b}{a_1-\alpha b_1}$ von $\frac{b}{b_1}$ bis $\frac{a}{a_1}$
8) – , $3<\mu<\infty$, α beliebig †	0	$\frac{a}{a_1}$
9) $y=x^2$	0	$\frac{a}{a_1}$
10) $y=x^2+\alpha x^\mu$, $\infty>\mu>3$, α beliebig	0	$\frac{a}{a_1}$
12) – , $\mu=3$, α von 0 bis ∞	0	$\frac{a+\alpha b}{a_1+\alpha b_1}$ von $\frac{a}{a_1}$ bis $\frac{b}{b_1}$
13) – , $3>\mu>2$, α beliebig	0	$\frac{b}{b_1}$
14) $y=\alpha x^\mu$, $\mu=2$, α von 1 bis ∞	0	$\frac{b\alpha+c(\alpha-1)}{b_1\alpha+c_1(\alpha-1)}$ von $\frac{b}{b_1}$ bis $\frac{b+c}{b_1+c_1}$
15) – , $2>\mu>1$, α beliebig	0	$\frac{b+c}{b_1+c_1}$
16) – , $\mu=1$, α von 0 bis ∞	0 bis 1	$\frac{b+c}{b_1+c_1}$
17) Erst $x=0$ dann $y=0$	1	$\frac{b+c}{b_1+c_1}$

In diesem Falle liegen also für den Punkt $\gamma = 0$ mehrere senkrechte Strecken der Limitale aneinander. Setzen wir z. B. $a=2$, $b=5$, $c=1$, $a_1=b_1=c_1=1$, so ist $\frac{a}{a_1}=2$, $\frac{b}{b_1}=5$, $\frac{c}{c_1}=1$, $\frac{b+c}{b_1+c_1}=3$, und die Limitale fällt für $\gamma=0$ von $z=2$ bis $z=1$, steigt von 1 bis 5, fällt dann von 5 bis 2, steigt wieder bis 5 und fällt schliesslich bis 3, um in dieser Höhe von $\gamma=0$ bis $\gamma=1$ zu verharren. Es liegen also für $\gamma=0$ fünf senkrechte Strecken aneinander.

Die bisher mitgetheilten Beispiele waren so gewählt, dass die Limitale in den Strecken, wo sie eindeutig, nicht entweder stets Null oder stets unendlich war. Zu dem Zwecke mussten die Glieder niedrigster Dimension in Bezug auf die gleich Null zu setzenden Variabeln im Zähler und Nenner der Brüche von gleicher Ordnung sein. Es ist aber ein viel häufigerer Fall, dass dies nicht stattfindet, und so kann man sagen, dass die Limitale im Allgemeinen mit Ausnahme ihrer Stetigvieldeutigkeitspunkte die Gleichung $z=0$ oder $z=\infty$ hat. In den Stetigvieldeutigkeitspunkten concentrirt sich also in der That das Interesse der Limitale. Ich werde noch ein paar ganz einfache Beispiele von Limitalen geben, die in ihren eindeutigen Strecken Null oder unendlich sind.

V. Es hat $\varepsilon\frac{\gamma+\varepsilon}{\gamma-\varepsilon}$ für $\gamma=0$, $\varepsilon=0$ eine Stetigvieldeutigkeit. Setzen wir z. B. $\gamma=\varepsilon+\gamma_1$, so wird dieser Ausdruck $\varepsilon+2\frac{\varepsilon^2}{\gamma_1}$ und ist für $\varepsilon=0$, $\gamma_1=0$ evident stetigvieldeutig. In $\varepsilon\frac{\gamma+\varepsilon}{\gamma-\varepsilon}$ statt ε geschrieben $x+y$, statt γ $\frac{y}{x+y}$, erhält man

$$f(x,y) = (x+y)\frac{y+(x+y)^2}{y-(x+y)^2}.$$

Ich werde hier keine tabellarische Uebersicht mehr geben. Es genügt zu sagen, dass nach einander die Functionen $y=x^2\mp\alpha x^3$ und $y=\alpha x$ die ganze Limitale liefern. Die erstere in $f(x,y)$ eingesetzt, giebt:

$$\lim_{x=0} f(x, x^2\mp\alpha x^3) = \frac{2}{\mp\alpha-2}.$$

Lässt man α in $\frac{2}{\alpha-2}$ von $-\infty$ bis $+\infty$ gehen, so geht $\frac{2}{\alpha-2}$ von 0 bis $-\infty$, springt von $-\infty$ auf $+\infty$, und geht dann von $+\infty$ bis Null, und $\lim_{x=0} f(x,\alpha x)$ bleibt dann Null. Die Werthe $-\infty$ und $+\infty$ müssen als zusammenhangend angesehen werden.

VI. Endlich hat $\frac{1}{\varepsilon}\frac{\varepsilon-\gamma}{\varepsilon+\gamma}$ für $\varepsilon=0$, $\gamma=0$ eine Stetigvieldeutigkeit. Wenn $f(\varepsilon(1-\gamma),\varepsilon\gamma)=\frac{1}{\varepsilon}\frac{\varepsilon-\gamma}{\varepsilon+\gamma}$ ist, so haben wir:

$$f(x,y) = \frac{1}{x+y}\,\frac{y-(x+y)^2}{y+(x+y)^2}.$$

Für erst $y=0$, dann $x=0$ wird dieser Ausdruck $-\infty$, umgekehrt erhält man $+\infty$. Statt y geschrieben $x^2 \mp \alpha x^3$ und $x=0$ gesetzt, erhält man:

$$\lim_{x=0} f(x, x^2 \mp \alpha x^3) = \frac{\mp\alpha - 2}{2}.$$

Lässt man α in $\frac{\alpha-2}{2}$ von $-\infty$ bis $+\infty$ gehen, so durchläuft dieser Ausdruck gleichfalls alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$. Dann in $f(x,y)$ statt y geschrieben αx, verbleibt die Limitale bis $\gamma=1$ im Unendlichen. Sie beginnt also für $\gamma=0$ im Punkt $\varepsilon=-\infty$, steigt senkrecht auf bis $z=+\infty$ und geht mit diesem Werth horizontal weiter bis $\gamma=1$.

Die angeführten Beispiele waren Quotienten ganzer rationaler Functionen, es lassen sich aber alle algebraischen Functionen ähnlich behandeln. Transcendente Functionen verhalten sich anders. Während wir nämlich sahen, dass die Stetigvieldeutigkeiten der bisher untersuchten Functionen durch eine Reihe Substitutionen der Form $y=\alpha_1 x^{\mu_1}+\alpha_2 x^{\mu_2}+\cdots$ aufgelöst wurden, wo einer der Coefficienten α willkürlich blieb, so sind zur Auflösung der Stetigvieldeutigkeiten transcendenter Functionen im allgemeinen Substitutionen erforderlich, die den willkürlichen Parameter anders als linear enthalten.

VII. Es sei z. B.

$$f(x,y) = x\log\frac{y}{x},$$

$$f(\varepsilon(1-\gamma),\varepsilon\gamma) = \varepsilon(1-\gamma)\log\frac{\gamma}{1-\gamma}.$$

Die Limitale hat also für $\gamma=0$ eine Stetigvieldeutigkeit, und die auflösenden Substitutionen für y müssen so beschaffen sein, dass $y_0'=0$ werde. Es ist ferner $\lim_{x=0}\lim_{y=0} f(x,y) = -\infty$. Die auflösende Substitution ist $y = xe^{-\frac{a}{x}}$ und giebt $f(x, xe^{-\frac{\alpha}{x}}) = \alpha$. Die Limitale beginnt daher für $\gamma=0$ mit $z=-\infty$, steigt senkrecht auf bis $z=0$ und geht mit diesem Werthe horizontal weiter bis $\gamma=1$.

Auf die Theorie der die Stetigvieldeutigkeiten auflösenden Substitutionen beabsichtige ich hier nicht weiter einzugehen und lasse es daher bei den angeführten Beispielen bewenden. Dagegen wünsche ich aber in den folgenden Paragraphen auf andere Bemerkungen, welche uns durch diese Beispiele nahe gelegt werden, die Aufmerksamkeit des Lesers zu lenken, nachdem ich zuerst

den Unterschied zwischen verschieden starkem Verschwinden und Nullwerden der Functionen, auf welchen es hierbei gerade ankommt, klargelegt haben werde.

§. 7.

Unterscheidung der Begriffe des relativen Nullwerdens und Verschwindens der Functionen.

Dem gewöhnlichen Sprachgebrauch gemäss, werden wir sagen: „Von zwei Functionen u und v von x, die beide mit x zugleich Null werden, wird die erstere *u stärker, gleich stark, oder schwächer Null als die zweite v, jenachdem der Quotient* $\frac{u}{v}$ *für* $x=0$ *Null, endlich oder unendlich ist*". Nach dieser Definition giebt es unzählige Functionen, die ebenso stark Null werden, wie eine gegebene Function. Der uns vorliegende Gegenstand erheischt aber eine noch genauere Unterscheidung zwischen den mit x Null werdenden Functionen von x, die ich nun entwickeln werde.

Wir werden sagen: „*Eine Function u von x verschwindet schwächer oder stärker wie eine andere Function v von x, jenachdem ihr Quotient* $\frac{u}{v}$ *von einem beliebig kleinen Werthe von x an bis* 0 *excl. grösser oder kleiner als Eins ist*, oder was auf dasselbe hinauskommt, *jenachdem die Differenz* $u-v$, *unmittelbar bevor sie mit x Null wird, positiv oder negativ ist*". Aus dieser Definition folgt dann auch, dass zwei gleich stark verschwindende Functionen, für die also vor dem Nullwerden von x die Differenz $u-v$ bereits Null ist, einander gleich sein müssen, wenigstens von $x=0$ an bis zu einem endlich verschiedenen Werthe von x, und da in dieser Theorie für's Erste nur von algebraischen oder ihnen ähnlichen Functionen die Rede sein kann, so werden wir zwei gleich stark verschwindende Functionen überhaupt identificiren. Es verschwindet z. B. $2x$ stärker wie $3x$, und $x^3-\alpha x^5$ stärker wie $x^3-\beta x^7$, welche von 0 und ∞ verschiedenen positiven Werthe man α und β auch ertheilen mag. Denn es ist:

$$\frac{u}{v}=\frac{x^3-\alpha x^5}{x^3-\beta x^7}=1-x^2\,\frac{\alpha-\beta x^2}{1-\beta x^4}.$$

Die Grösse $\frac{\alpha-\beta x^2}{1-\beta x^4}$ wird aber unter allen Umständen bei abnehmendem x einmal positiv und bleibt es bis $x=0$, so dass $\frac{u}{v}$ kleiner als Eins wird. Hat man $u=\alpha x^{\mu}+\alpha_1 x^{\mu_1}+\cdots$, $v=\beta x^{\mu}+\beta_1 x^{\mu_1}+\cdots$, $\mu<\mu_1<\ldots$, so ist:

$$u-v=x^{\mu}\{\alpha-\beta+(\alpha_1-\beta_1)\,x^{\mu_1-\mu}+\cdots\},$$

und wir sehen, dass die relative Stärke des Verschwindens von u und v nur von $\alpha-\beta$ abhängt. Ist diese Differenz Null, so hängt sie von $\alpha_1-\beta_1$ ab, u. s. w.

Geometrisch bedeutet die Stärke des Verschwindens folgendes. Man stelle sich unter $y=u=\varphi(x)$, $y_1=v=\psi(x)$ die auf der gemeinschaftlichen Abscissenaxe x errichteten Ordinaten zweier Curven vor, und lasse die Abscisse x gegen Null zu abnehmen. Es wird dann immer einen so kleinen Werth von x geben, von welchem an eine der beiden Ordinaten bis $x=0$ excl. länger bleibt wie die andere. Bleibt u länger wie v, so verschwindet u schwächer wie v, bleibt v länger wie u, so verschwindet u stärker wie v, bleiben die Ordinaten gleich lang, so sind die Curven dieselben. Hierbei ist natürlich angenommen, dass die Curven $y=u$, $y_1=v$ in der Nähe der Werthe $x=0$ nicht unendlich viele Maxima und Minima haben.

Diese geometrische Betrachtung wollen wir indessen noch etwas eingehender durchführen. Es sei nämlich $y=u$ eine Curve von veränderlicher Gestalt, die durch den Punkt $x=0$, $y=0$ geht, und die bei Variation ihrer Gestalt bis zu einer beliebig klein anzunehmenden Entfernung vom Punkt $x=0$, $y=0$ den positiven Quadranten nicht verlässt. Denken wir uns nun die Function u von x sämmtliche Stärken des Verschwindens durchlaufen, so wird zunächst die Tangente an die Curve $y=u$ im Punkt $x=0$, $y=0$ aus der x-Axe allmählich in die y-Axe gelangen, indem sie successive mit der x-Axe alle Winkel von 0^0 bis 90^0 einschliesst. Für jede Lage ihrer Tangenten im Punkte $x=0$, $y=0$ wird aber die Curve $y=u$ an deren beiden Seiten alle Ordnungen der Berührung mit ihr durchlaufen, zuerst an der der x-Axe zugekehrten Seite von der schwächsten zur innigsten Anschmiegung, dann an der der y-Axe zugekehrten Seite in umgekehrter Reihenfolge von der stärksten zur schwächsten Anschmiegung. Nur wenn die x-Axe und die y-Axe die Tangenten sind, finden die Anschmiegungen allein an der dem positiven Quadranten zugekehrten Seite statt.

Alle diese Gestalten der Curve $y=u$ sind eingeschlossen zwischen zwei gebrochenen Linien. Die eine geht von einem Punkt x, y des positiven Quadranten geradlinig zum Punkt $x=x$, $y=0$, von dort zum Punkt $x=0$, $y=0$, die andere von einem Punkt x, y zum Punkt $x=0$, $y=y$, von dort zum Punkt $x=0$, $y=0$. Die erstere entspricht mithin dem stärksten Verschwinden von u mit x, die zweite dem schwächsten Verschwinden. Hat man also eine Function $f(u, v, v_1, v_2\ldots)$ der als variabel gedachten Function u und der gegebenen Functionen v von x, die alle mit x verschwinden, so besteht

das stärkste Verschwinden von u darin, dass man in f erst $u=0$ setzt und dann x (wodurch v, v_1 nach u verschwinden), und das schwächste besteht darin, dass man erst $x=0$ setzt und dann u. Die Reihenfolge aller Stärken des Verschwindens von u beginnt daher mit „erst $u=0$ dann $x=0$“ oder $\lim_{x=0}\lim_{u=0}$ und endigt mit $\lim_{u=0}\lim_{x=0}$, ähnlich wie die Reihenfolge der Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ geht, und ähnlich wie bei den Zahlen die Differenz zwischen jeder folgenden und jeder vorhergehenden positiv ist, verhält es sich auch mit der Reihenfolge der von $\lim_{x=0}\lim_{y=0}$ an schwächer und schwächer verschwindenden Functionen. Die Differenz zwischen einer jeden an einer späteren Stelle stehenden Function und einer jeden vorhergehenden ist positiv unmittelbar vor dem für $x=0$ stattfindenden Nullwerden.

Anlehnend an diese Analogie mit der Zahlenreihe, schlage ich folgende Zeichen

$$u(v,\ v)u$$

vor, um anzugeben, dass u stärker verschwindet wie v und v stärker wie u.

Die Reihenfolge des *Nullwerdens* beginnt ebenfalls mit $\lim_{x=0}\lim_{y=0}$ und endigt mit $\lim_{y=0}\lim_{x=0}$. Die Anordnung der Functionen nach der Stärke ihres Nullwerdens ist nur eine gruppenweise, und wenn eine Function, die stärker Null wird als eine andere, auch stärker verschwindet, so findet das Umgekehrte nicht allgemein statt. Der Begriff des stärkeren oder schwächeren Verschwindens dient folglich dazu, um die einer gegebenen Stärke des Nullwerdens entsprechende Functionengruppe ihrerseits in eine Stufenfolge zu ordnen. Dies geschieht mit voller Sicherheit und ohne jegliche Unbestimmtheit, da zwei gleich stark verschwindende Functionen identisch sind. Es findet also jede zu einer nach der Stärke ihres Verschwindens geordneten Folge von Functionen neu hinzukommende Function in dieser Folge ihre ganz bestimmte Stelle.

Ich schlage noch vor mit den Zeichen

$$u((v,\ v))u$$

zu bezeichnen, dass u stärker Null wird wie v und v schwächer Null wie u.

§. 8.

Allgemeine Folgerungen aus den Beispielen des §. 6.

Auf Grund der Begriffsbestimmungen des vorigen Paragraphen werden wir aus dem Anblick der Beispiele des §. 6 diejenigen allgemeinen Eigenschaften der Grenzwerthe $f(0, 0)$ abstrahiren, deren Darlegung diese Zeilen hauptsächlich gewidmet sind, und sie dann theoretisch genauer begründen.

Ein Blick auf die Tabellen des genannten Paragraphen zeigt, dass die unter $\varphi(x,y)=0$ stehenden Functionen y von x der Reihe nach immer schwächer verschwinden. Nehmen wir z. B. Tabelle IV. und bilden die Differenzen der auf einander folgenden Functionen y ad 3) und 5), ad 5) und 7) oder 9) oder 12), endlich ad 7) oder 9) oder 12) und 14), indem wir die den verschiedenen Functionen y zugehörigen α durch Indices unterscheiden:

$$\alpha x^3-\alpha_1 x^2,\quad 0<\alpha<\infty,\quad 0<\alpha_1<1,$$
$$\alpha_1 x^2-(x^2+\alpha_2 x^3),\quad 0<\alpha_1<1,\quad -\infty<\alpha_2<+\infty,$$
$$(x^2+\alpha_2 x^3)-\alpha_3 x^2,\quad -\infty<\alpha_2<+\infty,\quad 1<\alpha_3<\infty,\quad \text{etc.}$$

so ist, wenn man sie auf die Formen:

$$-x^2(\alpha_1-\alpha x),\quad -x^2\{(1-\alpha_1)+\alpha_2 x\},\quad -x^2\{(\alpha_3-1)+\alpha_2 x\},\quad \text{etc.}$$

bringt, leicht zu erkennen, dass sie von hinreichend kleinen Werthen von x an negativ werden und es bis $x=0$ exclusive bleiben. Während nun die in der Rubrik $\varphi(x,y)=0$ stehenden Functionen successive schwächer und schwächer verschwinden, geht der unter γ stehende Werth dieser Variabeln stetig von 0 bis 1, und der unter z stehende Grenzwerth von $f(x,y)$ durchläuft gleichfalls alle Beträge, deren er fähig ist, nach der Stetigkeit, beginnend mit $\lim_{x=0}\lim_{y=0}f(x,y)$ und endigend mit $\lim_{y=0}\lim_{x=0}f(x,y)$. Diese Bemerkung gestaltet sich verallgemeinert zu folgendem Satze:

Wenn eine Function $f(x,y)$ für $x=0, y=0$ stetigvieldeutig ist, für positive von 0 verschiedene beliebig kleine Werthe von x und y aber stetig, und man lässt x und y successive so gleichzeitig Null werden, dass y als Function von x alle Grade des Verschwindens durchläuft, vom Stärksten beginnend und mit dem Schwächsten endigend, so durchläuft zugleich $\lim_{x=0,y=0}f(x,y)$ nach der Stetigkeit seine sämmtlichen Grenzwerthe für positives Verschwinden der Variabeln x und y, mit $\lim_{x=0}\lim_{y=0}f(x,y)$ beginnend und endigend mit $\lim_{y=0}\lim_{x=0}f(x,y)$.

Dies ist der eine Satz, den wir aus den Beispielen des §. 6 abstrahiren. Die andere Folgerung ist diese. Die Reihenfolge der Grenzwerthe von $z=f(x,y)$ beginnt mit einer *Grenzfunction* Y_0, welche so nahe, wie man will, an den Werth $\lim_{x=0}\lim_{y=0}f(x,y)$ führt, und endigt mit einer *Grenzfunction* Y_1, die beliebig nahe zum Werth $\lim_{y=0}\lim_{x=0}f(x,y)$ führt.

Im ersten Beispiel ist $Y_0=\alpha x^2$, $Y_1=\beta x$, im zweiten ist $Y_0=\alpha x^2$, $Y_1=\beta x^4$, im dritten ist $Y_0=\alpha x^2$, $Y_1=\beta x$, im vierten ist $Y_0=\alpha x^3$, $Y_1=\beta x^2$. In allen diesen Fällen ist α möglichst klein, β möglichst gross zu nehmen, um möglichst nahe an die Grenzwerthe $\lim_{x=0}\lim_{y=0}f(x,y)$ und $\lim_{y=0}\lim_{x=0}f(x,y)$ zu

gelangen. Im fünften und sechsten Beispiel ist $Y_0 = x^2 - \alpha x^3$, $Y_1 = x^2 + \alpha x^3$. Im siebenten Beispiel ist endlich $Y_0 = xe^{-\frac{\alpha}{x}}$, $Y_1 = \alpha x$, und in den beiden letzteren Fällen (Y_1 im Beisp. VII. ausgenommen) führt ein möglichst grosses α zu den äussersten Grenzwerthen von $f(x, y)$.

Alle Functionen y, welche stärker verschwinden wie Y_0 oder schwächer wie Y_1, führen entweder gleichfalls beliebig nahe zu den Werthen $\lim_{x=0}\lim_{y=0} f(x, y)$ oder $\lim_{y=0}\lim_{x=0} f(x, y)$, oder sie führen zu diesen Werthen selbst. So verschwindet $y = x^2 - \alpha x^3 - \beta x^4$ stärker wie $y = x^2 - \alpha x^3$, und beide Functionen führen zu dem Grenzwerth $-\frac{2}{\alpha+2}$ von $f(x,y) = (x+y)\frac{y+(x+y)^2}{y-(x+y)^2}$, also für möglichst grosses α möglichst nahe an den Grenzwerth $0 = \lim_{x=0}\lim_{y=0} f(x,y)$. Dagegen verschwindet auch $x^2 - \beta x^{\frac{5}{2}}$ stärker als $x^2 - \alpha x^3$, denn die Differenz $\alpha x^{\frac{5}{2}}(\beta - \alpha x^{\frac{1}{2}})$ wird positiv, bevor $x = 0$ ist. Aber $y = x^2 - \alpha x^{\frac{5}{2}}$ führt direct zum Grenzwerth $0 = \lim_{x=0}\lim_{y=0} f(x, y)$. Es wird, trotz der Unbestimmtheit, die in Bezug auf die Function herscht, die zum Anfang und zum Ende der Limitale führt, keinen Anstoss erregen, wenn ich von *der einen* und *der andern* Grenzfunction rede, sobald nur festgestellt ist, was darunter zu verstehen. Grenzfunction soll *jede Function* $y = \lambda(x, \alpha)$ *heissen, die für einen bestimmten Werth* α_1 *von* α *z. B. zum Werth* $\lim_{x=0}\lim_{y=0} f(x, y)$ *führt, oder, wenn der Werth* α_1 *selbst dem* α *in* $\lambda(x, \alpha)$ *nicht ertheilt werden kann, ohne dass* y *Null oder unendlich wird, beliebig nahe an* $\lim_{x=0}\lim_{y=0} f(x, y)$ *führt, wenn dem* α *ein von* α_1 *beliebig wenig entfernter Werth ertheilt wird, und welche für von* α_1 *verschiedene Werthe von* α *zu von* $\lim_{x=0}\lim_{y=0} f(x, y)$ *verschiedenen Werthen von* $\lim_{x=0,y=0} f(x, y)$ *führt.* Dies vorausgeschickt spreche ich die zweite Folgerung aus, wie folgt:

Die Reihenfolge der Functionen y*, welche zur stetigen Folge der Grenzwerthe* $\lim_{x=0,y=0} f(x, y)$ *einer Function* $f(x, y)$ *führt, beginnt mit einer Grenzfunction* Y_0*, die stärker wie die folgenden Functionen* y *verschwindet, und endigt mit einer Grenzfunction* Y_1*, die schwächer wie die vorhergehenden Functionen* y *verschwindet. Der Charakter dieser Grenzfunctionen hängt von der Beschaffenheit der Function* $f(x, y)$ *ab. Alle Functionen* y*, welche stärker verschwinden wie* Y_0 *oder schwächer verschwinden wie* Y_1*, führen zu den Grenzwerthen* $\lim_{x=0}\lim_{y=0} f(x, y)$ *oder* $\lim_{y=0}\lim_{x=0} f(x, y)$*, oder sie führen beliebig nahe an diese Grenzwerthe.* Dieser Satz schliesst einen anderen Satz ein, der als Beweismittel in der Theorie der bestimmten Integrale öfters von Nutzen ist, und den ich daher noch besonders hervorhebe.

Wenn eine Function von zwei Variabeln $f(x, y)$ den Werth f_1 erhält, sobald man darin nacheinander erst y und dann x gleich Null setzt, so giebt es auch stets unzählige Beziehungen $\varphi(x, y) = 0$, vermöge deren die Variabeln x und y gleichzeitig *so verschwinden, dass die Function $f(x,y) = 0$ für $x = 0$, $y = 0$ den nämlichen Grenzwerth f_1 erhält.*

§. 9.

Beweis des ersten und dritten Satzes des vorigen Paragraphen.

Was den ersten und dritten Satz des vorigen Paragraphen anbelangt, so sind sie nur sehr nahe liegende Folgerungen aus unserer Construction. Der Einfachheit halber wollen wir über die Function $f(x, y)$ gewisse Voraussetzungen machen, welche aber für die Richtigkeit der Sätze nicht nöthig sind. Wir construiren wieder die Ebenen $x+y=\varepsilon$, $x+y=1$, und auf der ersteren die Curve $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ mit der Gleichung $z = f(\varepsilon-\zeta, \zeta)$ (§. 3). Ihr Abbild auf der Ebene $x+y=1$ ist die Curve $z = f(\varepsilon(1-\gamma), \varepsilon\gamma)$, und die Limitale ist

$$z = \lim_{\varepsilon=0} f(\varepsilon(1-\gamma), \varepsilon\gamma) = L(\gamma).$$

Wir setzen nun voraus, dass $f(x, y)$ für alle positiven, einen gewissen beliebig kleinen Werth nicht überschreitenden und von Null verschiedenen Werthe von x und y endlich und stetig sei, so dass die Curve $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$, wie klein auch ε sei, ebenfalls stetig und durchweg eindeutig ist, d. h. je zwei beliebig nahen Punkten auf der Curve $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ entsprechen zwei verschiedene Punkte als Projectionen auf der Schnittlinie der Ebene $x+y=\varepsilon$ mit der xy-Ebene.

Ferner wollen wir die Definition der Limitale etwas anders fassen, indem wir darunter nicht die Grenzgestalt der Curve $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ oder $z = f(\varepsilon(1-\gamma), \varepsilon\gamma)$ für $\varepsilon = 0$ sondern für $\varepsilon =$ unendlich klein verstehen. In der Sache wird hierdurch nichts geändert, dagegen gestattet uns diese Ausdrucksweise von einer continuirlichen Reihenfolge der Werthe von z in den Stetigvieldeutigkeitspunkten zu reden, und eine grössere und geringere Entfernung eines Punktes in einer senkrechten Strecke der Limitale von den Endpunkten der Limitale zu unterscheiden, die Entfernung natürlich auf der Limitale selbst gemessen. Die Limitale zerfällt dann in der That in den Stetigvieldeutigkeitspunkten in einander unendlich nahe verlaufende senkrechte Strecken, die an ihren oberen und unteren Enden successive so mit einander verbunden sind, dass ein beweglicher Punkt die Limitale von einem Ende zum andern durchlaufen kann, ohne je dieselbe Stelle zweimal zu passiren.

Dies vorausgeschickt, mag $y=\varphi(x)$ stärker als $y_1=\varphi_1(x)$ verschwinden. Auf beiden Curven $y=\varphi(x)$, $y_1=\varphi_1(x)$ errichten wir senkrecht auf die xy-Ebene Cylinderflächen. Nach der Definition des relativen Verschwindens muss von irgend einem hinreichend kleinen Werth von x an bis $x=0$ excl. die Curve $y=\varphi(x)$ zwischen der Curve $y_1=\varphi_1(x)$ und der x-Axe verlaufen, mithin die Cylinderfläche $y=\varphi(x)$ zwischen der Cylinderfläche $y_1=\varphi_1(x)$ und der xz-Ebene ausgespannt sein. Das heisst aber nichts anderes, als dass von irgend einem Werth von ε an für alle kleineren Werthe dieser Grösse die Curve $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ von der Cylinderfläche $y=\varphi(x)$ in einem dem Endpunkt $\mathfrak{P}_1$ näheren Punkt geschnitten wird als von der Cylinderfläche $y_1=\varphi_1(x)$. Dasselbe findet bei unendlich kleinen Werthen von ε statt, nur dass hier die Distanz der beiden Schnittpunkte auf der Curve $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ unendlich klein werden kann, d. h. dass sie zusammenfallen. Thun sie dies nicht, so muss aber immer der Schnittpunkt mit $y=\varphi(x)$ zwischen $\mathfrak{P}_1$ und dem Schnittpunkt mit $y_1=\varphi_1(x)$ liegen. Mit anderen Worten zwei Relationen $y=\varphi(x)$, $y_1=\varphi_1(x)$ führen zu Punkten der Limitale (oder zu Grenzwerthen von z), von denen derjenige dem Endpunkt $\lim_{x=0}\lim_{y=0}f(x,y)$ der Limitale am nächsten liegt — wenn die Punkte nicht etwa zusammenfallen —, zu welchem die von beiden Functionen $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$ am stärksten verschwindende führt. Hieraus folgt umgekehrt, dass, wenn man die Relationen, welche zu den auf einander folgenden Punkten der Limitale von $\lim_{x=0}\lim_{y=0}f(x,y)$ an bis $\lim_{y=0}\lim_{x=0}f(x,y)$ führen, vergleicht, sie successive schwächer und schwächer verschwinden müssen, welches der erste Satz ist.

Die Richtigkeit des dritten Satzes ergiebt sich, wie folgt. Die Oberfläche $z=f(x,y)$ schneidet die xz-Ebene in der Curve $z=f(x,0)$, die in die z-Axe gelangt mit der Ordinate $z_1=\lim_{x=0}\lim_{y=0}f(x,y)$, und sie schneidet die yz-Ebene in der Curve $z=f(0,y)$, die in die z-Axe gelangt mit dem Werthe $z_2=\lim_{y=0}\lim_{x=0}f(x,y)$. Wir können nun von irgend einem Punkt $\mathfrak{P}$ auf der Oberfläche $z=f(x,y)$, ohne je vorher die xz-Ebene oder die yz-Ebene zu berühren und ohne die Oberfläche $z=f(x,y)$ zu verlassen, auf unzähligen Wegen zu einem der Punkte $x=0$, $y=0$, $z=z_1$; $x=0$, $y=0$, $z=z_2$ gelangen. Die Projectionen dieser Wege auf die xy-Ebene entsprechen dann ebenso vielen Relationen, die zu den Grenzwerthen $\lim_{x=0}\lim_{y=0}f(x,y)$, $\lim_{y=0}\lim_{x=0}f(x,y)$ führen. Nach dem zweiten Satz müssen aber alle diese Projectionen zwischen einer äussersten Curve und der x-Axe verlaufen. Diese äusserste Projection ist die *Enveloppe* der übrigen. Ebenso sei z_3 ein zwischen den Endwerthen z_1 und z_2 auf der Limitale gelegener Werth von z, und $x=0$,

$y=0$, $z=z_3$ der ihm entsprechende Punkt der Oberfläche $z=f(x,y)$, so wird man wieder von irgend einem Punkt $\mathfrak{P}$ der Oberfläche, ohne sie zu verlassen, auf unzähligen Wegen zum Punkt $x=0$, $y=0$, $z=z_3$ gelangen können. Die Projectionen aller dieser Wege müssen wieder zwischen zwei äussersten eingeschlossen sein, die einer unter ihnen am stärksten und einer am schwächsten verschwindenden Function y von x entsprechen. Alle Functionen y von x, deren Stärke des Verschwindens zwischen diesen äussersten Functionen liegt, führen zum Grenzwerth z_3 von z. Hiermit ist der dritte Satz bewiesen und vervollständigt.

Um den zweiten Satz abzuleiten, werde ich mich der Umkehrung der Gleichung $z=f(x,y)$ in andere der Form $y=\lambda(x,z)$ bedienen, die auch in der Beziehung lehrreich ist, dass sie zeigt, wie die Stetigvieldeutigkeitspunkte der Limitale entstehen.

§. 10.

Beweis des zweiten Satzes des §. 8.

Da es sich nur um *eine* Grenzfunction handelt, indem die andere auf ganz analoge Weise erhalten werden kann wie die erste, so wählen wir das zweite Abbildungsverfahren des §. 3. Wir bilden nämlich die Schnittlinie $\mathfrak{P}_1\infty$ der Ebene $x=\varepsilon$ mit der Oberfläche $z=f(x,y)$ (der Endpunkt $\mathfrak{P}_1$ der Schnittlinie hat die Coordinaten $x=\varepsilon$, $y=0$, $z=f(\varepsilon,0)$) auf der Ebene $x=1$ ab. Die Coordinaten irgend eines Punktes der Schnittlinie $\mathfrak{P}_1\infty$ bezeichnen wir mit

$$x=\varepsilon, \qquad y=y_\varepsilon, \qquad z=f(\varepsilon,y_\varepsilon)$$

und die irgend eines Punktes ihres Abbildes mit

$$x=1, \quad y=\eta, \quad z=f(\varepsilon,\varepsilon\eta);$$

$z=\lim_{\varepsilon=0} f(\varepsilon,\varepsilon\eta)$ ist dann die Gleichung der Limitale, in der wir indessen wieder ε unendlich klein und nicht gleich 0 annehmen werden. Da es sich für uns nur um die Curve $\mathfrak{P}_1\infty$ in der Nähe des Punktes $\mathfrak{P}_1$ oder ihres Abbildes in der Nähe seines Anfangspunktes $x=1$, $\eta=0$, $z=f(\varepsilon,0)$ handelt, so betrachten wir diese Curven nur im Intervall $y_\varepsilon=0\ldots y_\varepsilon=(Y)$ oder $\eta=0\ldots\eta=(H)$, wo (H) eine beliebig gewählte endliche Grösse vorstellt. Zwischen $\eta=0$ und $\eta=(H)$ denken wir uns die Curve $z=f(\varepsilon,\varepsilon\eta)$ stetig und endlich für alle Werthe von ε von irgend einem noch so kleinen an abwärts bis $\varepsilon=0$. Den grössten Werth, den ε erhalten darf, nehmen wir so klein an, dass bei fernerer Abnahme von ε sich Anzahl und Reihenfolge der Maxima und Minima der

Curve $z = f(\varepsilon, \varepsilon\eta)$ nicht weiter verändert, und führen im Ganzen folgende Bezeichnungen ein:

Es sei $Z_0 = f(\varepsilon, 0)$, und die Werthe von $f(\varepsilon, \varepsilon\eta)$, in denen der Differentialquotient dieser Grösse sein Zeichen wechselt, während η von 0 bis (H) wächst, seien $Z_1, Z_2, \ldots$; die zugehörigen Werthe von y_ε seien $Y_1, Y_2, \ldots$ und von η: $H_1, H_2, \ldots$. Der variable Werth von z zwischen Z_0 und Z_1 heisst z_1, zwischen Z_1 und Z_2: z_2, etc., die variablen Werthe von y_ε und η zwischen 0 und Y_1 oder 0 und H_1 heissen y_1, η_1, zwischen Y_1 und Y_2, H_1 und H_2 heissen y_2, η_2, u. s. w. Für die Limitale bleiben die Bezeichnungen für die Variabeln unverändert, die Bezeichnungen für die Grenzwerthe der festen Coordinaten der Curve $f(\varepsilon, \varepsilon_1\eta)$ nämlich: $Z_0, Z_1, \ldots$; $Y_1, Y_2, \ldots$; $H_1, H_2, \ldots$ erhalten Accente.

Denken wir uns jetzt $z = f(\varepsilon, y)$ nach y aufgelöst, so erhalten wir die Gleichungen:

$$y_1 = \lambda_1(\varepsilon, z_1), \qquad y_2 = \lambda_2(\varepsilon, z_2), \ldots$$

λ_1 wird imaginär, wenn z_1 von Z_0 ausgehend durch Z_1 geht, λ_2, wenn z das Intervall $Z_1 \ldots Z_2$ verlässt, u. s. w. Die Grössen $y_1, y_2, \ldots$ verschwinden mit ε, und die Grössen η_1, η_2 verschwinden auch zum Theil dort, wo Stetigvieldeutigkeitspunkte der Limitale entstehen, worauf ich alsbald zurückkomme.

Wir können nun zunächst ganz leicht den zweiten Satz beweisen. Es sind $y_1 = \lambda_1$, $y_2 = \lambda_2$, ... ebenso viel Relationen, die für y in $z = f(x, y)$ eingesetzt für $x = 0$ nacheinander zu stetig aufeinander folgenden Grenzwerthen von $z = f(x, y)$ führen.

Zuerst $y_1 = \lambda_1(x, z_1)$ führt zu den Grenzwerthen von $z_1 = Z_0$ bis $z_1 = Z_1$, $y_2 = \lambda_2(x, z_2)$ führt zu den Grenzwerthen von $z_2 = Z_1$ bis $z_2 = Z_2$, u. s. f. Nach dem ersten Satz des §. 8 sind also zunächst $\lambda_1(x, z_1)$, $\lambda_1(x, z_2)$, ... Functionen, von denen jede folgende mit x schwächer verschwindet als die vorhergehenden, oder nach der §. 7 vorgeschlagenen Bezeichnungsweise:

$$\lambda_1 \ (\lambda_2 \ (\lambda_3 \ldots .$$

Zweitens führt $\lambda_1(x, z_1)$ für $z_1 = Z_0$ zum Werth $\lim_{x=0}\lim_{y=0} f(x, y) = Z_0$ von $f(x, y)$, und alle Functionen, die stärker verschwinden wie $\lambda_1(x, z_1)$, müssen zum nämlichen Werth führen, da er überhaupt der Anfangswerth der Limitale ist. *Mithin ist auch* $y_1 = \lambda(x, z_1)$ *für* $z_1 = Z_0$ *die eine Grenzfunction von* $f(x, y)$, und ihre Existenz ist dadurch bewiesen, dass wir sie dargestellt haben, womit dann auch der zweite Satz nachgewiesen ist. Setzen wir z. B.

$$z = f(x, y) = x\,\frac{x+y}{x^2-y},$$

so fängt die Limitale mit $z=1$ an, zu welchem Werth $y=\alpha x^2$ für ein unendlich kleines α führt, geht dann, während α von 0 bis ∞ wächst, bis $z=+\infty$ und von $z=-\infty$ bis Null. Die Grenzfunction ist also $y=\alpha x^2$ (α möglichst klein). Andererseits hat man:

$$y = \left(1-\frac{1}{z}\right)x^2\left\{1-\frac{x}{x+z}\right\}.$$

Setzen wir $1-\frac{1}{z}=\alpha$, so ist die vorstehende Function y ebenfalls für α unendlich klein die Grenzfunction von $f(x,y)$, da sie, in $f(x,y)$ eingesetzt, eine von 1 unendlich wenig verschiedene Grösse liefert. Die Grösse $\frac{x}{x+z}$ rechts in der Klammer kann aber fortgelassen werden, da für ein unendlich kleines α sowohl $y=\alpha x^2\left(1-\frac{x}{x+z}\right)$, als auch $y=\alpha x^2$ zum nämlichen Grenzwerth 1 von $f(x,y)$ führen.

Ausser um den Satz II. zu beweisen, dient die obige Betrachtung auch, um sich von der Entstehung der Stetigvieldeutigkeiten und horizontalen Strecken der Limitale Rechenschaft zu geben. Betrachten wir z. B. die Wurzel

$$\eta_r=\frac{y_r}{\varepsilon}=\frac{\lambda(\varepsilon,z_r)}{\varepsilon},$$

und nehmen wir an, das Intervall $Z_r\ldots Z_{r+1}$ sei in gleich lange unendlich kleine Strecken dz_r getheilt, die sich auch nicht verändern, wenn bei Abnahme von ε das Intervall $Z_r\ldots Z_{r+1}$ allmählich gegen das Intervall $Z'_r\ldots Z'_{r+1}$ convergirt. Wir werden allgemein haben:

$$d\eta_r = \frac{\partial}{\partial z_r}\left(\frac{\lambda(\varepsilon,z_r)}{\varepsilon}\right)dz_r.$$

Wird nun bei abnehmenden ε der Differentialquotient $\frac{\partial}{\partial z_r}\left(\frac{\lambda(\varepsilon,z_r)}{\varepsilon}\right)$ unendlich, so wird die Limitale horizontal. Es kann beiläufig bei der Abbildung $z=f(\varepsilon(1-\gamma),\varepsilon\gamma)$ nur für einzelne Werthe von z stattfinden, dass, wenn durch Auflösung nach γ eine Gleichung $\gamma=\lambda_\gamma(\varepsilon,z)$ erhalten wird, $\frac{\partial\lambda_\gamma}{\partial z}$ unendlich werde, wogegen bei der Abbildung $z=f(\varepsilon,\varepsilon\eta)$ es die Regel ist, dass einmal eine Wurzel $\eta_r=\frac{\lambda(\varepsilon,z_r)}{\varepsilon}$ einen mit $\varepsilon=0$ unendlich werdenden Differentialquotienten $\frac{\partial}{\partial z_r}\left(\frac{\lambda(\varepsilon,z_r)}{\varepsilon}\right)$ liefere. Wird also für eine endliche Strecke Σdz_r des Intervalls $Z_r\ldots Z_{r+1}$ der Differentialquotient $\frac{\partial}{\partial z_r}\left(\frac{\lambda(\varepsilon,z_r)}{\varepsilon}\right)$ unendlich gross, so wird es auch das Intervall $H_r\ldots H_{r+1}$. Bleibt der Differentialquotient endlich, so bleibt das Intervall $H_r\ldots H_{r+1}$ endlich und von Null verschieden. Ver-

schwindet mit ε der Differentialquotient im ganzen Intervall $Z_r \ldots Z_{r+1}$, so muss nothwendiger Weise das Intervall $H_r \ldots H_{r+1}$ verschwinden, und an der Grenze steht die Strecke $Z_r' \ldots Z_{r+1}'$ senkrecht auf dem Punkte $x=1$, $\eta = H_r' = H_{r+1}'$, d. i. wir haben einen Stetigvieldeutigkeitspunkt. Setzen wir z. B. wieder

$$z = f(x, y) = x \frac{x+y}{x^2-y},$$

so ist:

$$\eta_1 = \frac{\varepsilon(z_1-1)}{\varepsilon+z_1}$$

die einzige Wurzel, und man hat

$$d\eta_1 = \varepsilon \frac{\varepsilon+1}{(\varepsilon+z_1)^2} dz_1.$$

Es wird also im ganzen Intervall von $z_1=1$ bis $z_1=+\infty$, und $z_1=-\infty$ bis $z_1=0$ mit ε auch $d\eta_1$ verschwinden, und so hat auch die Limitale

$$z = \lim_{\varepsilon=0} \varepsilon \frac{\varepsilon+\varepsilon\eta}{\varepsilon^2-\varepsilon\eta}$$

für $\eta=0$ eine Stetigvieldeutigkeit, welche die genannten Werthe von z sämmtlich enthält.

Was nun die Grenzfunction betrifft, so ist mir nicht unbekannt, dass man sie auch ohne Auflösung der Gleichung $z=f(x, y)$ nach y durch directe Methoden in sehr allgemeinen Fällen finden kann. Indessen sind diese Methoden Beschränkungen unterworfen, deren präcise Formulirung sehr mühsam ist und diese Mittheilung sehr verlängern würde. Ich beschränke mich daher hier darauf, die Existenz der Grenzfunction nachgewiesen zu haben, und glaube dies um so eher thun zu dürfen, als die Anwendung der erwähnten directen Methoden in den Fällen, wo sie hauptsächlich erwünscht wäre, nämlich bei gewissen Fragen der Theorie der bestimmten Integrale, dennoch auf geradezu unüberwindliche Schwierigkeiten stösst. Zum Schluss dieser Betrachtungen werde ich noch ein Problem der Theorie der bestimmten Integrale anführen, bei welchem die Grenzfunction eine wichtige Rolle spielt.

§. 11.

Ueber den Werth, den ein unbestimmtes Integral erhält, wenn man eine Grenze und einen Parameter unendlich werden lässt *).

Wir wollen uns mit der Frage beschäftigen, welchen Werth ein Integral der Form

*) Bei dem genauen Zusammenhange, in welchem diese Untersuchung mit derjenigen steht, welche ich im vorigen Bande dieses Journals in der Abhandlung „über

$$\int_0^z \Phi(x, h)\, dx$$

erhält, jenachdem man z und h in verschiedener Reihenfolge nach einander, oder gewissen Beziehungen gemäss gleichzeitig unendlich werden lässt, jedoch unter dieser Voraussetzung, dass $\lim_{h=\infty} \Phi(x, h) = \Phi_1(x)$ nur für einzelne Werthe von x unbestimmt oder stetigvieldeutig sei, und dass unter den Stetigvieldeutigkeitswerthen ∞' nicht enthalten sei, endlich dass:

$$\int_0^\infty \Phi_1(x)\, dx$$

ein convergentes Integral sei. Ich setze:

$$\frac{\partial F(x, h)}{\partial x} = \Phi(x, h),$$

so hat man:

$$\int_0^z \Phi(x, h)\, dx = F(z, h) - F(0, h).$$

Lässt man z und h unendlich werden, so erhält $F(0, h)$ in völlig eindeutiger Weise den Werth $\lim_{h=\infty} F(0, h)$, dagegen kann, je nach der Beziehung des relativen Unendlichwerdens von z und h oder Verschwindens von $\frac{1}{z}$ und $\frac{1}{h}$, die Function $F(x, h)$ gegen sehr verschiedene Grenzwerthe convergiren. Dem Begriffe des stärkeren oder schwächeren Verschwindens entsprechend, werden wir sagen, eine Function u von x *convergirt* für irgend einen festen Werth dieser Veränderlichen stärker gegen ∞, oder *nähert* sich stärker ∞ als eine andere Function v, wenn unmittelbar vor dem Unendlichwerden der Functionen u und v ihre Differenz $u - v$ positiv ist. Dann verschwindet auch $\frac{1}{u}$ stärker

---

die allgemeinen Eigenschaften der *Fourier*schen Doppelintegrale" veröffentlicht habe, ist es am Ort, bei dieser Gelegenheit zu erwähnen, dass, wie mir erst jetzt bekannt geworden ist, die daselbst vorkommende Formel

$$\lim \int_0^a f(x)\, \frac{\Phi(xh)}{x}\, dx = f(0) \int_0^x \frac{\Phi(x)}{x}\, dx$$

(Gleichung (10.) p. 84) sich bereits in einer Abhandlung des Herrn *Winckler* (Sitzungsberichte der Wiener Akademie 1865) findet. Dieselbe ist übrigens nicht wesentlich von der Verallgemeinerung der *Fourier*schen Formel verschieden, welche Herr *Liouville* im ersten Bande seines Journals in der „Note sur une manière de généraliser la formule de *Fourier*" veröffentlicht hat. Ich habe mich bemüht diese nützliche Formel in aller Strenge abzuleiten und die Grenze der Geltung ihrer Verallgemeinerungen festzustellen, was mit Hülfe eines neuen Mittelwerthsatzes, auf den ich bei dieser Gelegenheit geführt wurde, und welcher dergleichen allgemeine Beweise ermöglicht, §. 4 meiner oben genannten Abhandlung gelang. In Betreff der Bedingung für die Gültigkeit der obigen Formel befinde ich mich mit Herrn *Liouville* in Uebereinstimmung.

wie $\frac{1}{v}$, da auch $\frac{1}{u}-\frac{1}{v}=\frac{v-u}{uv}$ unmittelbar vor dem Verschwinden von $\frac{1}{u}$ und $\frac{1}{v}$ negativ ist. Wegen dieser Correlation beider Begriffe kann man alles bisher von den Functionen zweier verschwindenden Variabeln Gesagte ohne Weiteres auf die Functionen zweier unendlich werdenden Variabeln übertragen. Danach wird, um es kurz anzugeben, $F(z, h)$, wenn diese Function für $z=\infty$, $h=\infty$ stetigvieldeutig ist *), und man für z eine Reihenfolge von Functionen $\lambda(h)$ von h einsetzt, die alle Grade der, mit h verglichen, schwächeren und stärkeren Annäherung an ∞ durchlaufen, folgende Werthe annehmen. Zunächst wird für „erst $h=\infty$, dann $z=\infty$“ $\lim_{z=\infty}\lim_{h=\infty}F(z, h)$ der Grenzwerth von $F(z, h)$. Dann wird es eine Stufenfolge der schwächeren und stärkeren Annäherung von $z=\lambda(h)$ an ∞ geben, die mit der schwächsten beginnt und, bis zu einer gewissen Stärke gediehen, immer zum Werth $\lim_{z=\infty}\lim_{h=\infty}F(z, h)$ führt, von dieser Stärke an aber zu anderen Werthen führt, endlich zum Werth $\lim_{h=\infty}\lim_{z=\infty}F(z, h)$ und bei fernerem Wachsthum bei diesem Werthe verharrt. Auf unser Integral bezogen, hat dies folgende Bedeutung. Das Integral

$$\int_0^z \Phi(x, h)\,dx$$

wird, wenn wir erst $h=\infty$, dann $z=\infty$ setzen,

$$\int_0^{\lim_{h=\infty} z} \lim_{h=\infty}\Phi(x, h)\,dx = \int_0^{\infty}\Phi_1(x)\,dx.$$

Wenn wir aber z und h gleichzeitig unendlich werden lassen, so findet die Gleichheit:

$$\lim_{h=\infty}\int_0^z \Phi(x, h)\,dx = \int_0^{\lim_{h=\infty} z} dx \lim_{h=\infty}\Phi(x, h)$$

im Allgemeinen nicht mehr statt, sondern nur von den schwächsten Graden des Unendlichwerdens von z (verglichen mit dem Unendlichwerden von h) an bis zu einer gewissen von der Beschaffenheit des Integrals abhängigen Stärke der Annäherung von z an ∞, in einem Worte *bis zur ersten Grenzfunction* $z=\lambda_1(h)$ *des Integrals.* Von dieser an wird bei stärkerer Annäherung

*) Um eine Function $F(x, y)$ darauf zu prüfen, ob sie für $x=\infty$, $y=\infty$ stetigvieldeutig ist, muss man die reciproken Werthe der Variabeln einführen.

von $\varkappa$ an ∞ das Integral eine Reihenfolge verschiedener Werthe annehmen können, bis endlich ein Schlusswerth erreicht wird, bei dem $\lim_{h=\infty}\int_0^{\varkappa}\Phi(x,h)\,dx$ bei noch weiter getriebener Annäherung von $\varkappa$ an ∞ verharrt. Diesen Schlusswerth findet man, indem man das Integral $\int_0^{\infty}\Phi(x,h)\,dx$ ausführt, und hinterher $h=\infty$ setzt. *Die beiden äussersten Werthe, welche* $\lim_{h=\infty}\int_0^{\varkappa}\Phi(x,h)\,dx$ *erhalten kann, sind also:*

$$\int_0^{\infty}dx\lim_{h=\infty}\Phi(x,h), \qquad \lim_{h=\infty}\int_0^{\infty}\Phi(x,h)\,dx.$$

Zu der Betrachtung dieses Paragraphen werde ich einige Beispiele geben. Setzen wir $\varkappa=\frac{1}{\xi}$, $h=\frac{1}{\eta}$, $F(\varkappa,h)=F_1(\xi,\eta)$. Es sei zunächst:

$$F(\varkappa,h)=F(\xi,\eta)=\frac{a\varkappa h+b\varkappa^2+c}{a_1\varkappa h+b_1\varkappa^2+c_1}=\frac{a\xi+b\eta+c\xi^2\eta}{a_1\xi+b_1\eta+c_1\xi^2\eta}.$$

Dann ist $F(0,h)=\frac{c}{c_1}$, $\lim_{\xi=0}\lim_{\eta=0}F_1(\xi,\eta)=\frac{a}{a_1}$, $\lim_{\eta=0}\lim_{\xi=0}F_1(\xi,\eta)=\frac{b}{b_1}$. Die Limitale von $F(\xi,\eta)$ hat keine Stetigvieldeutigkeit, und wir erhalten alle Grenzwerthe von $F(\xi,\eta)$, indem wir α in $\frac{a+\alpha b}{a_1+\alpha b_1}$ von 0 bis ∞ wachsen lassen. Das Integral $\int\frac{\partial F(x,h)}{\partial x}dx$, genommen von 0 bis zum Werthe αh^{μ}, wird:

$$\int_0^{\alpha h^{\mu}}\Phi(x,h)\,dx=\int_0^{\alpha h^{\mu}}dx\,\frac{2(bc_1)x+(ac_1)h+(ba_1)x^2h}{(a_1xh+b_1x^2+c_1)^2},$$

wo z. B. (bc_1) die Determinante bc_1-b_1c bedeutet. Die Function $\Phi(x,h)$ ist für alle Werthe von x excl. $x=0$ und für $h=\infty$ bestimmt und gleich Null. Für $x=0$, $h=\infty$ ist $\Phi(x,h)$ stetigvieldeutig. Setzen wir $h=\frac{1}{\eta}$, so ist:

$$\Phi\left(x,\frac{1}{\eta}\right)=\eta\,\frac{2(bc_1)x\eta+(ba_1)x^2+(ac_1)}{(a_1x+b_1x^2\eta+c_1\eta)^2},$$

und unter den Stetigvieldeutigkeits-Werthen von $\lim_{x=0,\eta=0}\Phi\left(x,\frac{1}{\eta}\right)$ kommt allerdings auch ∞ vor, denn es ist $\lim_{\eta=0}\lim_{x=0}\Phi\left(x,\frac{1}{\eta}\right)=\infty$, $\lim_{x=0}\lim_{\eta=0}\Phi\left(x,\frac{1}{\eta}\right)=0$. Die Grenzwerthe des Integrals $\int_0^{\alpha h^{\mu}}\Phi(x,h)\,dx$ ordnen sich, wie folgt.

Für $0 < \mu < 1$ ist

$$\lim_{h=\infty} \int_0^{\alpha h^\mu} \Phi(x, h)\, dx = \frac{a}{a_1} - \frac{c}{c_1},$$

also unabhängig von α. Für $\mu = 1$ ist das Integral gleich $\frac{a\alpha + b}{a_1 \alpha + b_1} - \frac{c}{c_1}$, also abhängig von α und durchläuft, während α von ∞ bis 0 geht, alle Werthe von $\frac{a}{a_1} - \frac{c}{c_1}$ bis $\frac{b}{b_1} - \frac{c}{c_1}$, welchen letzteren Werth es für $1 < \mu < \infty$ behält, wo es also wieder von α unabhängig ist. Ich habe dieses Beispiel, welches gerade unter die eingangs dieses Paragraphen ausgenommenen Fälle gehört, gewählt, um daran den Sinn dieser Ausnahmen zu zeigen. Wir haben nämlich wegen der Stetigvieldeutigkeit von $\Phi(x, h)$ für $x = 0$ noch nicht alle Werthe erschöpft, die das vorgelegte Integral annehmen kann. Die übrigen würden wir erhalten, wenn wir die untere Grenze des Integrals sich der Null verschieden stark nähern liessen, während h unendlich wird.

Zweitens sei

$$F(x, h) = F_1(\xi, \eta) = \frac{axh + bx^2 + ch}{a_1 xh + b_1 x^2 + c_1 h} = \frac{a\xi + b\eta + c\xi^2}{a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \xi^2}.$$

Behandeln wir dieses Beispiel wie das vorige, so ist:

$$\lim_{h=\infty} \int_0^{\alpha h^\mu} \Phi(x, h)\, dx = \lim_{h=\infty} \int_0^{\alpha h^\mu} dx\, h \frac{2(bc_1)x + (ac_1)h + (ba_1)x^2}{(a_1 xh + b_1 x^2 + c_1 h)^2}.$$

$\Phi(x, h) = \Phi\left(x, \frac{1}{\eta}\right)$ erhält hier den Werth:

$$\frac{2(bc_1)x\eta + (ba_1)x^2\eta + (ac_1)}{(a_1 x + b_1 x^2 \eta + c_1)^2},$$

ist also für $\eta = 0$ und (ohne besondere Voraussetzungen über die Constanten zu machen) für keinen endlichen Werth von x stetigvieldeutig, und $\lim_{h=\infty} \Phi(x, h)$ ist gleich $\frac{(ac_1)}{(a_1 x + c_1)^2}$. Das Integral $\lim_{h=\infty} \int_0^{\alpha h^\mu} \Phi(x, h)\, dx$ durchläuft nun folgende Werthe. Für $0 < \mu < 1$ ist:

$$\lim_{h=\infty} \int_0^{\alpha h^\mu} \Phi(x, h)\, dx = \int_0^{\infty} \frac{(ac_1)}{(a_1 x + c_1)^2} dx = \frac{a}{a_1} - \frac{c}{c_1}.$$

Für $\mu = 1$ wird $\lim_{h=\infty} \int_0^{\alpha h^\mu} \Phi(x, h)\, dx = \frac{a\alpha + b}{a_1 \alpha + b_1} - \frac{c}{c_1}$, und endlich für $1 < \mu < \infty$ wird das Integral gleich $\frac{b}{b_1} - \frac{c}{c_1}$.

Drittens betrachten wir ein Integral mit einer Exponentialfunction:

$$\lim_{h=\infty} \int_0^{\alpha h^\mu} \frac{dx}{h}\, e^{-\frac{x}{h}}.$$

Es ist $\int_0^{\lim_{h=\infty} \alpha h^\mu} dx \lim_{h=\infty} \frac{e^{-\frac{x}{h}}}{h}$ offenbar stets Null, da $\lim_{h=\infty} \frac{e^{-\frac{x}{h}}}{h}$ für jeden endlichen Werth von x Null ist. Führt man die Integration aus, so findet man aber, dass das Integral Null ist für $0 < \mu < 1$, für $\mu = 1$ den Werth $1 - e^{-\alpha}$ erhält und für $1 < \mu < \infty$ gleich 1 wird.

Endlich sei:

$$\int_0^{\alpha h^\mu} \Phi(x, h)\, dx = \int_0^{\alpha h^\mu} \frac{\sin\frac{x}{h} + \sin x}{x}\, dx.$$

Man hat:

$$\int_0^{\alpha h^\mu} \frac{\sin\frac{x}{h} + \sin x}{x}\, dx = \int_0^{\alpha h^{\mu-1}} \frac{\sin x}{x}\, dx + \int_0^{\alpha h^\mu} \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

woraus man erkennt, dass $\lim_{h=\infty} \int_0^{\alpha h^\mu} \Phi(x, h)\, dx$ für $0 < \mu < 1$ den Werth $\frac{1}{2}\pi$ hat, für $\mu = 1$ gleich $\frac{1}{2}\pi + \int_0^{\alpha} \frac{\sin x}{x}\, dx$ ist und für $1 < \mu < \infty$ gleich π ist und bleibt.

In Fällen wie bei den drei ersten Beispielen kann man die unendlich werdende Grösse durch Substitutionen aus den Grenzen unter das Integral schaffen, und so die Stetigvieldeutigkeit desselben auf solche der zu integrirenden Function reduciren. In Fällen wie beim letzten Integral (wenn es nicht zerlegt wird) würde dies nicht möglich sein, man würde es nicht mit Stetigvieldeutigkeiten, sondern mit Unbestimmtheiten des Arguments zu thun haben. (S. Anhang.)

A n h a n g.

Erläuterung des Unterschiedes zwischen Unbestimmtheit und Stetigvieldeutigkeit durch ein Beispiel.

Dass ich statt des nahe liegenden Ausdrucks „Unbestimmtheit“ den schleppenderen „Stetigvieldeutigkeit“ für die uns beschäftigende Singularität gewählt habe, geschah, weil dies in der That zwei verschiedene Dinge

sind. Wenn (wie $\sin\frac{1}{x}$ oder $\sin\frac{1}{x^2+y^2}$ für $x=0,\ y=0$) eine Function einer oder mehrerer Variabeln für gewisse letzteren ertheilte Werthe eine stetige Folge von Werthen gleichzeitig repräsentirt, ohne dass es möglich ist, durch nebenher aufgestellte Bestimmungen diese Werthe zu trennen, durch zwischen den Variabeln festgesetzte Beziehungen einen oder doch eine endliche Zahl dieser Werthe einzeln zu erhalten, so ist die Function für das betreffende Werthesystem der Variabeln offenbar ganz unbestimmt. Wenn indessen wie in den bisher betrachteten Fällen die Unbestimmtheiten durch geeignete Substitutionen in gesetzmässige Werthefolgen sich auflösen lassen, so liegt keine eigentliche Unbestimmtheit vor, sondern nur eine Vieldeutigkeit. An folgendem Beispiel zeigt sich der Unterschied beider Begriffe sehr deutlich. Wir setzen:

$$z = f(x, y) = \frac{y \sin\frac{1}{x}}{\sin\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$$

Die Curve $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ hat die Gleichung:

$$z = f(\varepsilon(1-\gamma), \varepsilon\gamma) = \frac{\varepsilon}{\frac{1}{\gamma}\sin\frac{\gamma}{1-\gamma}} \sin\frac{1}{\varepsilon(1-\gamma)} + \frac{\gamma}{1-\gamma}.$$

Für $\gamma = 0$ hat die Limitale keine Stetigvieldeutigkeit, dann aber jedesmal, wenn $\frac{\gamma}{1-\gamma} = m\pi$ wird. Es fragt sich, ob es Relationen zwischen x und y giebt, vermöge deren man in den Stetigvieldeutigkeitspunkten der Limitale zu bestimmten Werthen von:

$$\lim_{x=0,y=0} \frac{y \sin\frac{1}{x}}{\sin\frac{y}{x}}$$

gelangen kann, indem wir vorerst dem Gliede $\frac{y}{x}$ weiter keine Aufmerksamkeit schenken. Diese Relationen müssten die Form haben:

$$y = m\pi x \pm \varphi(x),$$

wo $\varphi(x)$ stärker *Null wird* wie x und von einem Parameter α abhängen kann, den wir jedoch nicht hinschreiben. Denn da vermöge obiger Relation $y_0' = m\pi$ ist, so führt sie zu den Stetigvieldeutigkeitspunkten der Limitale. Wir betrachten zuerst den Factor $\frac{y}{\sin\frac{y}{x}}$ von $f(x, y) - \frac{y}{x}$. Für $y = m\pi x \pm \varphi(x)$ wird er:

$$\frac{m\pi \pm \frac{\varphi(x)}{x}}{\cos m\pi} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x}\sin \pm \frac{\varphi(x)}{x}}.$$

Aus dieser Form geht hervor, dass er für $x=0$ entweder 0, oder von 0 und ∞ verschieden, oder ∞ ist, jenachdem $\lim_{x=0} \frac{\varphi(x)}{x^2}$ gleich ∞, oder von 0 und ∞ verschieden, oder 0 ist. Da nun $\sin\frac{1}{x}$ für $x=0$ völlig *unbestimmt* wird, so ist zunächst:

$$\lim_{x=0,y=0} \frac{y}{\sin\frac{y}{x}} \cdot \sin\frac{1}{x}$$

für $y=m\pi x \pm \varphi(x)$ gleich 0 oder *unbestimmt*, jenachdem $\frac{\varphi(x)}{x^2}$ für $x=0$ gleich ∞ oder von 0 und ∞ verschieden ist. Der dritte Fall nämlich, wo $\lim_{x=0}\frac{\varphi(x)}{x^2}$ verschwindet, bedarf noch einer besonderen Betrachtung, da alsdann $\frac{1}{\frac{1}{x}\sin\pm\frac{\varphi(x)}{x}}$ unendlich wird, und es sich fragt, ob $\lim \frac{1}{\frac{1}{x}\sin\pm\frac{\varphi(x)}{x}} \sin\frac{1}{x}$ nur $\pm\infty$ ist oder unbestimmt, welcher letztere Fall deshalb stattfinden kann, weil $\lim \sin\frac{1}{x}$ bei seiner Unbestimmtheit auch Null wird.

Es handelt sich nur um den zweiten Factor rechter Hand in:

$$\frac{y\sin\frac{1}{x}}{\sin\frac{y}{x}} = \frac{m\pi \pm \frac{\varphi(x)}{x}}{\cos m\pi} \cdot \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}\sin\pm\frac{\varphi(x)}{x}}.$$

Wir setzen

$$\frac{1}{x} = l\pi + \delta,$$

wo l eine grösser und grösser werdende ganze Zahl bedeutet und $\delta < \pi$ ist. Es wird:

$$\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}\sin\pm\frac{\varphi(x)}{x}} = \frac{(-1)^l \sin\delta}{(l\pi+\delta)\sin\pm\frac{\varphi(x)}{x}}.$$

Wir setzen noch $\frac{1}{l\pi} = \nu$, $\frac{\varphi(x)}{x} = \psi(\nu) + \delta\psi_1(\nu,\delta)$. Da $x = \frac{\nu}{1+\nu\delta}$ für $\nu=0$ verschwindet, so verschwindet auch $\frac{\psi(\nu)}{\nu}$ und $\frac{\psi_1(\nu,\delta)}{\nu}$ für $\nu=0$. Wir erhalten nun:

$$\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}\sin\pm\frac{\varphi(x)}{x}} = (-1)^l \frac{\nu\sin\delta}{(1+\delta\nu)\sin[\psi(\nu)+\delta\psi_1(\nu,\delta)]}.$$

Da der sinus mit seinem Argument gleich stark Null wird, so werden sich die Grenzwerthe des Ausdrucks rechts nach denen von:

$$\frac{\nu\delta}{\psi(\nu)+\delta\psi_1(\nu,\delta)}$$

richten. Es sind δ und ν von einander gänzlich unabhängige Grössen. Wir können, wenn ν mit x verschwindet, zugleich δ beliebig stark verschwinden lassen oder es auch endlich $0<\delta<\pi$ lassen. Lassen wir δ endlich, so wird der vorstehende Bruch für $\nu=0$ unendlich. Lassen wir δ verschwinden, so kann er, wenn z. B. δ stärker Null wird wie ψ und ψ_1, Null werden und kann überhaupt jeden beliebigen Werth erhalten.

Mithin ist für $\lim\frac{\varphi(x)}{x^2}=0$

$$\lim_{x=0,y=0}\frac{y\sin\frac{1}{x}}{\sin\frac{y}{x}}, \qquad y=m\pi x\pm\varphi(x)$$

dem Werthe und dem Zeichen nach völlig unbestimmt, und $\lim_{x=0,y=0}\frac{y\sin\frac{1}{x}}{\sin\frac{y}{x}}$ ist nur der beiden Werthe 0 und unbestimmt fähig.

Da nun $\frac{y}{x}$ für $y=\alpha x$ alle Werthe von $\alpha=0$ bis $\alpha=\infty$ durchläuft, so haben wir im Ganzen folgende Grenzwerthe von $f(x,y)$: Es erhält

$$\lim_{x=0,y=0} f(x,y) = \lim_{x=0,y=0}\left\{\frac{y\sin\frac{1}{x}}{\sin\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}\right\}$$

für $y=\alpha x$ den Werth α und durchläuft also mit α alle Werthe von 0 bis ∞. Ausserdem aber erhält $\lim f(x,y)$ für alle positiven ganzen Zahlen m und für $y=m\pi x\pm\varphi(x)$, worin $\varphi(x)$ stärker Null wird wie x, allemal den Werth $m\pi$, wenn $\lim\frac{\varphi(x)}{x^2}$ unendlich wird. Wird $\lim\frac{\varphi(x)}{x^2}$ von Null und unendlich verschieden oder Null, so wird der vorstehende Ausdruck gänzlich *unbestimmt*.

Die Function $f(x,y)$ ist also für $x=0$, $y=0$ theils *stetigvieldeutig*, theils *unbestimmt*.

Heidelberg, im Januar 1868.

Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades.

(Von Herrn *E. B. Christoffel* in Zürich.)

1.

Führt man in den Differentialausdruck

$$F = \Sigma\omega_{ik}\,\partial x_i\,\partial x_k; \qquad i,k = 1,2,\ldots n,$$

in welchem die Coefficienten ω beliebige Functionen der von einander unabhängigen Variabeln x_1, x_2, $\ldots$ x_n sind, statt der letztern ein System von einander unabhängiger Functionen der neuen Variabeln x'_1, x'_2, $\ldots$ x'_n ein, so geht F in einen neuen Differentialausdruck

$$F' = \Sigma\omega'_{ik}\,\partial x'_i\,\partial x'_k$$

über, welcher dem ursprünglichen vermöge der ausgeführten Substitution gleich ist.

Sind umgekehrt die beiden Differentialausdrücke F und F' gegeben, so kann man sich die Frage vorlegen, welche Bedingungen erforderlich sind, damit der eine in den andern transformirt werden könne, und falls dies möglich ist, welche Substitutionen die verlangte Transformation leisten.

Wir bezeichnen für diese Untersuchung die Substitutionsdeterminante und die Determinanten von F und F' wie folgt:

$$\begin{aligned}
\Sigma\pm \frac{\partial x_1}{\partial x'_1}\,\frac{\partial x_2}{\partial x'_2}\cdots\frac{\partial x_n}{\partial x'_n} &= r,\\
\Sigma\pm\ \omega_{11}\quad \omega_{22}\quad\cdots\quad \omega_{nn} &= E,\\
\Sigma\pm\ \omega'_{11}\quad \omega'_{22}\quad\cdots\quad \omega'_{nn} &= E'.
\end{aligned}$$

Dann findet, wie aus der algebraischen Invariantentheorie bekannt ist, eine und auch nur eine Transformationsbedingung

$$E' = r^2 E$$

statt, und diese würde auch für den vorliegenden Fall ausreichen, wenn die Coefficienten ω von F und die Elemente von r constant wären. Im gegenwärtigen Falle müssen jedoch noch andere Bedingungen erfüllt sein, da nicht jedes System linearer und homogener Functionen von $\partial x'_1$, $\partial x'_2$, $\ldots$ $\partial x'_n$, welches an Stelle von ∂x_1, ∂x_2, $\ldots$ ∂x_n gesetzt F in F' überführt, die ge-

stellte Aufgabe löst, sondern nur ein solches, welches den Integrabilitätsbedingungen genügt, damit die Ausdrücke für ∂x_1, ∂x_2, ... ∂x_n vollständige Differentiale werden.

Wenn allgemein F ein homogener Differentialausdruck von beliebiger, und F' von derselben Ordnung ist, so finden ebenso für die Transformation von F in F', weil für die Differentiale lineare Substitutionen gelten, zunächst die aus der algebraischen Invariantentheorie entspringenden Bedingungsgleichungen statt, und die zugehörigen Formen liefern, wenn die Ordnung von F grösser als 2 ist, im Allgemeinen völlig bestimmte Werthe für die Coefficienten in den Ausdrücken der ursprünglichen Differentiale durch die neu einzuführenden. Aber diese Coefficienten müssen noch den hinzugehörigen Integrabilitätsbedingungen unterworfen werden, wobei die Eigenschaft der zugehörigen Formen, unmittelbar nicht die directe, sondern die transponirte Substitution zu liefern, wesentlich in Betracht kommt (vergl. art. 10).

Vereinfachungen dieser Art finden für die homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades nicht statt, da sich für dieselben aus den algebraischen Bedingungen nur eine Invariante und eine zugehörige Form ergiebt. Ich werde daher im Folgenden die Hülfsmittel auseinandersetzen, mittelst deren dieser auf den verschiedensten Gebieten so wichtige Ausnahmefall sich erledigen lässt, und bemerke nur noch, dass über den Fall, wo $F = \partial x_1^2 + \partial x_2^2 + \partial x_3^2$ ist, ein ausführliches Werk von Herrn *Lamé* existirt (Théorie des coordonnées curvilignes), während die gegenwärtigen Untersuchungen ursprünglich durch die Ausdehnung des Problems der aufeinander abwickelbaren Flächen auf Gebiete von n Dimensionen veranlasst worden sind.

2.

Bei der Untersuchung der Bedingungen, welche für die Möglichkeit der Gleichung

$$(1.) \qquad \Sigma \omega_{ik} \partial x_i \partial x_k = \Sigma \omega'_{ik} \partial x'_i \partial x'_k$$

erforderlich sind und hinreichen, werde ich mich auf den Fall beschränken, wo die Determinanten E und E' dieser Differentialausdrücke nicht identisch gleich 0 sind. Die neuen Variabeln x' werden als die unabhängigen betrachtet und ihre Differentiale constant angenommen.

Ersetzt man nun jedes $\partial x'_i$ durch $\partial x'_i + \delta x'_i$ und bezeichnet die den Differentialen $\delta x'_i$ entsprechenden Zunahmen der ursprünglichen Variabeln x ebenfalls durch δx, so muss in (1.) allgemein ∂x durch $\partial x + \delta x$ ersetzt werden.

Führt man alsdann beiderseits die Quadrate und Producte aus, so ergibt sich nach Beseitigung übereinstimmender Theile

$$(2.) \qquad \Sigma \omega_{ik} \partial x_i \delta x_k = \Sigma \omega'_{ik} \partial x'_i \delta x'_k.$$

Vergleicht man hier die Coefficienten von $\partial x'_g$, so folgt

$$\sum_{ik} \omega_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial x'_g} \delta x_k = \sum_{k} \omega'_{gk} \delta x'_k,$$

und hieraus

$$(3.) \qquad \delta x'_h = \sum_{gik} \omega_{ik} \frac{E'_{gh}}{E'} \frac{\partial x_i}{\partial x'_g} \delta x_k,$$

wo E'_{gh} in bekannter Weise die aus einer Aenderung von ω'_{gh} (nicht von ω'_{hg}) entspringende Unterdeterminante von E' bedeutet.

In der Gleichung (2.) lasse man nun jedes x' um sein Differential $\partial x'$, in (1.) dagegen um $\delta x'$ wachsen, wodurch die Differentiale zur Rechten nicht geändert werden; dann folgt:

$$\Sigma \omega_{ik} \partial^2 x_i \delta x_k + \Sigma \partial \omega_{ik} \partial x_i \delta x_k + \Sigma \omega_{ik} \partial x_i \partial \delta x_k = \Sigma \partial \omega'_{ik} \partial x'_i \delta x'_k,$$
$$\Sigma \delta \omega_{ik} \partial x_i \partial x_k + 2 \Sigma \omega_{ik} \partial x_i \delta \partial x_k = \Sigma \delta \omega'_{ik} \partial x'_i \partial x'_k.$$

Dividirt man die zweite Gleichung durch 2 und subtrahirt sie von der vorangehenden, so folgt

$$\Sigma \omega_{ik} \partial^2 x_i \delta x_k + \Sigma \partial \omega_{ik} \partial x_i \delta x_k - \tfrac{1}{2} \Sigma \delta \omega_{ik} \partial x_i \partial x_k$$
$$= \Sigma \partial \omega'_{ik} \partial x'_i \delta x'_k - \tfrac{1}{2} \Sigma \delta \omega'_{ik} \partial x'_i \partial x'_k.$$

Wird nun zur besseren Uebersicht

$$(4.) \qquad \tfrac{1}{2} \left[\frac{\partial \omega_{gk}}{\partial x_h} + \frac{\partial \omega_{hk}}{\partial x_g} - \frac{\partial \omega_{gh}}{\partial x_k} \right] = \begin{bmatrix} gh \\ k \end{bmatrix}$$

gesetzt, woraus

$$(5.) \qquad \begin{bmatrix} hg \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} gh \\ k \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \omega_{hk}}{\partial x_g} = \begin{bmatrix} gh \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} gk \\ h \end{bmatrix}$$

folgt, und dieselbe Bezeichnung bei der transformirten Form benutzt, so ergiebt sich

$$(6.) \qquad \sum_{ik} \omega_{ik} \partial^2 x_i \delta x_k + \sum_{ikl} \begin{bmatrix} il \\ k \end{bmatrix} \partial x_i \partial x_l \delta x_k = \sum_{\alpha\beta h} \begin{bmatrix} \alpha\beta \\ h \end{bmatrix}' \partial x'_\alpha \partial x'_\beta \delta x'_h.$$

Hier ersetze man $\delta x'_h$ durch seinen Werth aus (3.), wodurch die rechte Seite in

$$\sum_{\alpha\beta h} \begin{bmatrix} \alpha\beta \\ h \end{bmatrix}' \partial x'_\alpha \partial x'_\beta \sum_{gik} \omega_{ik} \frac{E'_{gh}}{E'} \frac{\partial x_i}{\partial x'_g} \delta x_k$$

übergeht. Durch Vergleichung der Coefficienten von δx_k folgt also

$$\sum_{il} \omega_{ik} \partial^2 x_i + \sum_{il} \begin{bmatrix} il \\ k \end{bmatrix} \partial x_i \partial x_l = \sum_{gi\alpha\beta} \omega_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial x'_g} \partial x'_\alpha \partial x'_\beta \sum_{h} \begin{bmatrix} \alpha\beta \\ h \end{bmatrix}' \frac{E'_{gh}}{E'}.$$

Diese Gleichung multiplicire ich mit $\frac{E_{rk}}{E}$ und summire über die Werthe von k. Wird alsdann

$$(7.) \qquad \sum_k \begin{bmatrix} il \\ k \end{bmatrix} \frac{E_{rk}}{E} = \begin{Bmatrix} il \\ r \end{Bmatrix}$$

gesetzt, woraus

$$(8.) \qquad \begin{Bmatrix} li \\ r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} il \\ r \end{Bmatrix}$$

folgt, und die gleiche Bezeichnung bei der transformirten Form angewandt, so ergiebt sich

$$\partial^2 x_r + \sum_{il} \begin{Bmatrix} il \\ r \end{Bmatrix} \partial x_i \partial x_l = \sum_{\alpha\beta g} \begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ g \end{Bmatrix}' \frac{\partial x_r}{\partial x'_g} \partial x'_\alpha \partial x'_\beta,$$

woraus offenbar auch rückwärts die Gleichung (6.) folgt, und es wird hiernach für alle Werthe von α, β und r:

$$(9.) \qquad \frac{\partial^2 x_r}{\partial x'_\alpha \partial x'_\beta} + \sum_{ik} \begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha} \frac{\partial x_k}{\partial x'_\beta} = \sum_\lambda \begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ \lambda \end{Bmatrix}' \frac{\partial x_r}{\partial x'_\lambda}.$$

Diese Gleichung liefert $\frac{n(n+1)}{2}$ Gleichungen für jedes r, also im Ganzen ein System von $n \cdot \frac{n(n+1)}{2}$ simultanen partiellen Differentialgleichungen zur Bestimmung der gesuchten Substitution. Sind dieselben befriedigt, so sind selbstverständlich die Integrabilitätsbedingungen für die linearen Ausdrücke der ursprünglichen durch die neuen Differentiale erfüllt.

Diese Gleichungen vereinfachen sich sehr beträchtlich, wenn alle Coefficienten ω der ursprünglichen Form constant sind, indem in diesem Falle, aber wegen (7.) und (5.) auch nur unter dieser Voraussetzung, alle Ausdrücke $\begin{Bmatrix} ik \\ r \end{Bmatrix}$ verschwinden. Man erhält alsdann für jede ursprüngliche Variable ein System von linearen partiellen Differentialgleichungen, und für alle Variabeln das nämliche System. Das gleiche Resultat hat Herr *Lamé* für den von ihm behandelten oben erwähnten Fall gefunden.

3.

Wenn es nicht möglich ist, die ursprünglichen Variabeln x als Functionen der neuen x' so zu bestimmen, dass die Gleichungen (9.) befriedigt werden, so ist die Transformation von F in F' unmöglich, da diese Gleichungen sich mit Nothwendigkeit ergeben, wenn die Möglichkeit dieser Transformation vorausgesetzt wird.

Sind dagegen die Gleichungen (9.) auf irgend eine Weise erfüllt, so wirft sich die Frage auf, in wie weit sie zum Rückschlusse auf die Gleichung (1.), d. h. auf die Formel $F=F'$ berechtigen. Um dies zu untersuchen, führe man die vorausgesetzte Lösung der Gleichungen (9.) in F ein, woraus

$$F = \Sigma \omega''_{ik} \partial x'_i \partial x'_k = F''$$

folgen möge. Dann handelt es sich darum, welche Beziehungen zwischen den entsprechenden Coefficienten von F'' und F' stattfinden.

Nun sind die Gleichungen (9.) nichts anderes als eine identische Umformung der Gleichung (6.), aus welcher sie selbst folgen, und welche sie auch rückwärts nach sich ziehen. Geht man aber, statt von $F=F'$, jetzt von $F=F''$ aus, so liefert die Rechnung des art. 2 statt des Ausdrucks, welcher dort auf der rechten Seite von (6.) steht, den neuen Ausdruck

$$\sum_{\alpha\beta h} \begin{bmatrix} \alpha\beta \\ h \end{bmatrix}'' \partial x'_\alpha \partial x'_\beta \delta x'_h,$$

und dieser muss dem ursprünglichen gleich sein. Also ergiebt sich allgemein

$$\begin{bmatrix} \alpha\beta \\ h \end{bmatrix}'' = \begin{bmatrix} \alpha\beta \\ h \end{bmatrix}',$$

woraus wegen (5.)

$$\frac{\partial \omega''_{hk}}{\partial x'_g} = \frac{\partial \omega'_{hk}}{\partial x'_g}$$

für alle Werthe von g, h, k folgt. Die entsprechenden Coefficienten von F'' und F' unterscheiden sich demnach nur um additive Constanten. Damit diese Constanten verschwinden, reicht es aus, dass irgend einmal $F''=F'$ werde, mit anderen Worten, dass die Lösung der Gleichungen (9.) den aus der Gleichung (1.) hervorgehenden Transformationsrelationen

$$(10.) \qquad \sum_{ik} \omega_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha} \frac{\partial x_k}{\partial x'_\beta} = \omega'_{\alpha\beta}$$

für irgend ein specielles Werthesystem der neuen Variabeln Genüge leiste. Wir haben also den Satz:

Wenn es möglich ist, die ursprünglichen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ als Functionen der neuen Variabeln $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$ so zu bestimmen, dass das Gleichungssystem (9.) *befriedigt wird, und man unterwirft diese Functionen noch der Anfangsbedingung, dass sie nebst ihren ersten Derivirten für irgend ein specielles Werthesystem der neuen Variabeln den in der Gleichung $F=F'$ enthaltenen Transformationsrelationen Genüge leisten, so finden diese*

Transformationsrelationen und mit ihnen die Gleichung $F = F'$ für alle Werthe der neuen Variabeln statt.

Daraus folgt, dass die in (1.) enthaltenen Transformationsrelationen durch die Gleichungen (9.) bis auf die ihnen zu entnehmende Anfangsbedingung überflüssig gemacht werden, sobald die letztern miteinander verträglich sind.

Das Gleichungssystem (9.) *enthält also, seine Möglichkeit vorausgesetzt, bis auf die erwähnte Anfangsbedingung die sämmtlichen für die Transformation von F in F' nothwendigen und ausreichenden Bedingungen, und ersetzt hiernach gleichzeitig die algebraischen aus* (1.) *hervorgehenden Transformationsrelationen und die hinzugehörigen Integrabilitätsbedingungen.*

4.

Für die Möglichkeit der Gleichungen (9.) sind neue Integrabilitätsbedingungen erforderlich, zu deren Herleitung wir jetzt übergehen. Um zugleich den Nachweis zu führen, dass diese die Gleichungen (9.) nicht rückwärts nach sich ziehen, betrachten wir statt der letztern das System, welches in einer der folgenden Gleichungen enthalten ist:

$$(9'.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x_r}{\partial x'_\alpha \partial x'_\beta} + \sum\limits_{gh} \left\{ \begin{matrix} gh \\ r \end{matrix} \right\} u^g_\alpha u^h_\beta = \sum\limits_{\lambda} \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \lambda \end{matrix} \right\}' u^r_\lambda + \left(\begin{matrix} r \\ \alpha\beta \end{matrix} \right), \\ \dfrac{\partial^2 x_r}{\partial x'_\alpha \partial x'_\gamma} + \sum\limits_{gi} \left\{ \begin{matrix} gi \\ r \end{matrix} \right\} u^g_\alpha u^i_\gamma = \sum\limits_{\lambda} \left\{ \begin{matrix} \alpha\gamma \\ \lambda \end{matrix} \right\}' u^r_\lambda + \left(\begin{matrix} r \\ \alpha\gamma \end{matrix} \right), \end{cases}$$

wo, wie im Folgenden allgemein, die ersten Derivirten

$$\frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha} = u^i_\alpha$$

gesetzt sind, während wir für die höhern Derivirten die gewöhnliche Bezeichnung beibehalten. Aus dem Vorstehenden wird also das System (9.) erhalten, indem man die Grössen $\left(\begin{matrix} r \\ \alpha\beta \end{matrix} \right)$ alle gleich 0 setzt.

Die in Rede stehenden Integrabilitätsbedingungen werden erhalten, wenn man die erste Gleichung (9'.) nach x'_γ, die zweite nach x'_β differentiirt und die Differenz bildet, wobei die dritte Derivirte von x_r wegfällt. Beachtet man, dass auch die Glieder, welche eine nach x'_β und x'_γ genommene zweite Derivirte enthalten, sich wegheben, so folgt:

$$\sum_{ghi}\left[\frac{\partial\left\{\begin{matrix}gh\\r\end{matrix}\right\}}{\partial x_i}-\frac{\partial\left\{\begin{matrix}gi\\r\end{matrix}\right\}}{\partial x_h}\right]u_\alpha^g u_\beta^h u_\gamma^i+\sum_{ph}\left\{\begin{matrix}ph\\r\end{matrix}\right\}\frac{\partial^2 x_p}{\partial x'_\alpha\partial x'_\gamma}u_\beta^h-\sum_{pi}\left\{\begin{matrix}pi\\r\end{matrix}\right\}\frac{\partial^2 x_p}{\partial x'_\alpha\partial x'_\beta}u_\gamma^i$$

$$=\sum_{\lambda}\left[\frac{\partial\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\\lambda\end{matrix}\right\}'}{\partial x'_\gamma}-\frac{\partial\left\{\begin{matrix}\alpha\gamma\\\lambda\end{matrix}\right\}'}{\partial x'_\beta}\right]u_\lambda^r+\sum_{\lambda}\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\\lambda\end{matrix}\right\}'\frac{\partial^2 x_r}{\partial x'_\lambda\partial x'_\gamma}-\sum_{\lambda}\left\{\begin{matrix}\alpha\gamma\\\lambda\end{matrix}\right\}'\frac{\partial^2 x_r}{\partial x'_\lambda\partial x'_\beta}$$

$$+\frac{\partial\binom{r}{\alpha\beta}}{\partial x'_\gamma}-\frac{\partial\binom{r}{\alpha\gamma}}{\partial x'_\beta}.$$

Daraus geht zunächst hervor, dass die Integrabilitätsbedingungen für das System (9′.) genau die nämlichen sein werden wie für die ursprünglichen Gleichungen (9.), sobald die Grössen $\binom{r}{\alpha\beta}$ dem folgenden Gleichungssystem Genüge leisten

$$(11.)\quad\begin{cases}\sum_{ph}\left\{\begin{matrix}ph\\r\end{matrix}\right\}\binom{p}{\alpha\gamma}u_\beta^h-\sum_{pi}\left\{\begin{matrix}pi\\r\end{matrix}\right\}\binom{p}{\alpha\beta}u_\gamma^i\\ =\sum_{\lambda}\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\\lambda\end{matrix}\right\}'\binom{r}{\lambda\gamma}-\sum_{\lambda}\left\{\begin{matrix}\alpha\gamma\\\lambda\end{matrix}\right\}'\binom{r}{\lambda\beta}+\frac{\partial\binom{r}{\alpha\beta}}{\partial x'_\gamma}-\frac{\partial\binom{r}{\alpha\gamma}}{\partial x'_\beta},\end{cases}$$

welches sich leicht in eine symmetrische Form setzen lässt.

Ich setze nun voraus, dass diese Bedingung für alle Werthe von r, α, β und γ erfüllt ist. Werden alsdann in der vorangehenden Gleichung für die zweiten Derivirten ihre Werthe aus (9′.) eingesetzt, so folgt:

$$\sum_{ghi}\left[\frac{\partial\left\{\begin{matrix}gh\\r\end{matrix}\right\}}{\partial x_i}-\frac{\partial\left\{\begin{matrix}gi\\r\end{matrix}\right\}}{\partial x_h}\right]u_\alpha^g u_\beta^h u_\gamma^i$$

$$+\sum_{ph}\left\{\begin{matrix}ph\\r\end{matrix}\right\}u_\beta^h\left(\sum_{\lambda}\left\{\begin{matrix}\alpha\gamma\\\lambda\end{matrix}\right\}'u_\lambda^p-\sum_{gi}\left\{\begin{matrix}gi\\p\end{matrix}\right\}u_\alpha^g u_\gamma^i\right)-\sum_{pi}\left\{\begin{matrix}pi\\r\end{matrix}\right\}u_\gamma^i\left(\sum_{\lambda}\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\\lambda\end{matrix}\right\}'u_\lambda^p-\sum_{gh}\left\{\begin{matrix}gh\\p\end{matrix}\right\}u_\alpha^g u_\beta^h\right)$$

$$=\sum_{\lambda}\left[\frac{\partial\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\\lambda\end{matrix}\right\}'}{\partial x'_\gamma}-\frac{\partial\left\{\begin{matrix}\alpha\gamma\\\lambda\end{matrix}\right\}'}{\partial x'_\beta}\right]u_\lambda^r$$

$$+\sum_{\lambda}\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\\lambda\end{matrix}\right\}'\left(\sum_{\mu}\left\{\begin{matrix}\gamma\lambda\\\mu\end{matrix}\right\}'u_\mu^r-\sum_{pi}\left\{\begin{matrix}pi\\r\end{matrix}\right\}u_\lambda^p u_\gamma^i\right)-\sum_{\lambda}\left\{\begin{matrix}\alpha\gamma\\\lambda\end{matrix}\right\}'\left(\sum_{\mu}\left\{\begin{matrix}\beta\lambda\\\mu\end{matrix}\right\}'u_\mu^r-\sum_{ph}\left\{\begin{matrix}ph\\r\end{matrix}\right\}u_\lambda^p u_\beta^h\right).$$

Hier heben sich alle Glieder weg, in denen das Product aus zwei Derivirten u vorkommt; vereinigt man die übrigen Glieder, indem man rechts λ mit μ vertauscht, so folgt:

$$(12.)\quad\begin{cases}\sum_{ghi}\left(\frac{\partial\left\{\begin{matrix}gh\\r\end{matrix}\right\}}{\partial x_i}-\frac{\partial\left\{\begin{matrix}gi\\r\end{matrix}\right\}}{\partial x_h}+\sum_{p}\left[\left\{\begin{matrix}gh\\p\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}pi\\r\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}gi\\p\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}ph\\r\end{matrix}\right\}\right]\right)u_\alpha^g u_\beta^h u_\gamma^i\\ =\sum_{\lambda}\left(\frac{\partial\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\\lambda\end{matrix}\right\}'}{\partial x'_\gamma}-\frac{\partial\left\{\begin{matrix}\alpha\gamma\\\lambda\end{matrix}\right\}'}{\partial x'_\beta}+\sum_{\mu}\left[\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\\mu\end{matrix}\right\}'\left\{\begin{matrix}\mu\gamma\\\lambda\end{matrix}\right\}'-\left\{\begin{matrix}\alpha\gamma\\\mu\end{matrix}\right\}'\left\{\begin{matrix}\mu\beta\\\lambda\end{matrix}\right\}'\right]\right)u_\lambda^r.\end{cases}$$

Wir haben also das folgende Resultat.

Das Gleichungssystem, welches aus (12.) *hervorgeht, wenn für* r, α, β *und* γ *alle Werthe von* 1 *bis* n *eingesetzt werden, enthält alle für die Möglichkeit des Systems* (9.) *erforderlichen Integrabilitätsbedingungen. Aber es kann die Gleichungen* (9.) *nicht ersetzen, indem aus ihm rückwärts nicht diese, sondern die allgemeinern Gleichungen* (9'.) *folgen, in denen die unabhängigen Glieder* $\left(\begin{smallmatrix} r \\ \alpha\beta \end{smallmatrix}\right)$ *dem Gleichungssystem* (11.) *Genüge leisten.*

5.

Die Gleichungen (12.) müssen für die weitere Untersuchung durch ein anderes, gleichbedeutendes System ersetzt werden. Ich multiplicire für diesen Zweck mit $\omega_{rk} u_\delta^k$ und summire über alle Werthe von k und r. Es ist klar, dass die hieraus folgenden Gleichungen auch wieder zum System (12.) zurückführen, wenn man, nachdem die eben bezeichnete Summation wirklich ausgeführt ist, mit $\frac{\partial x'_\delta}{\partial x_l} \cdot \frac{E_{\varrho l}}{E}$ multiplicirt, hierauf zuerst nach δ, dann nach l summirt und zuletzt $\varrho = r$ setzt.

Bei der angegebenen Operation geht die Gleichung (12.), da wegen (10.)

$$\sum_{rk} \omega_{rk} u_\lambda^r u_\delta^k = \omega'_{\lambda\delta}$$

ist, zunächst in

$$\sum_{ghik} u_\alpha^g u_\beta^h u_\gamma^i u_\delta^k \sum_r \omega_{rk} \left(\frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} gh \\ r \end{smallmatrix} \right\}}{\partial x_i} - \frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} gi \\ r \end{smallmatrix} \right\}}{\partial x_h} + \sum_p \left[\left\{ \begin{smallmatrix} gh \\ p \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} pi \\ r \end{smallmatrix} \right\} - \left\{ \begin{smallmatrix} gi \\ p \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} ph \\ r \end{smallmatrix} \right\} \right] \right)$$

$$= \sum_\lambda \omega'_{\lambda\delta} \left(\frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha\beta \\ \lambda \end{smallmatrix} \right\}'}{\partial x'_\gamma} - \frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha\gamma \\ \lambda \end{smallmatrix} \right\}'}{\partial x'_\beta} + \sum_\mu \left[\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha\beta \\ \mu \end{smallmatrix} \right\}' \left\{ \begin{smallmatrix} \mu\gamma \\ \lambda \end{smallmatrix} \right\}' - \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha\gamma \\ \mu \end{smallmatrix} \right\}' \left\{ \begin{smallmatrix} \mu\beta \\ \lambda \end{smallmatrix} \right\}' \right] \right)$$

über, so dass die noch rückständigen Reductionen für beide Seiten der Gleichung die nämlichen sind. Nun ist nach Gleichung (7.)

$$\sum_r \omega_{rk} \left\{ \begin{smallmatrix} gh \\ r \end{smallmatrix} \right\} = \left[\begin{smallmatrix} gh \\ k \end{smallmatrix} \right],$$

also wird die auf der linken Seite nach r genommene Summe

$$= \frac{\partial \left[\begin{smallmatrix} gh \\ k \end{smallmatrix} \right]}{\partial x_i} - \sum_p \left\{ \begin{smallmatrix} gh \\ p \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial \omega_{pk}}{\partial x_i} - \frac{\partial \left[\begin{smallmatrix} gi \\ k \end{smallmatrix} \right]}{\partial x_h} + \sum_p \left\{ \begin{smallmatrix} gi \\ p \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial \omega_{pk}}{\partial x_h} + \sum_p \left(\left\{ \begin{smallmatrix} gh \\ p \end{smallmatrix} \right\} \left[\begin{smallmatrix} pi \\ k \end{smallmatrix} \right] - \left\{ \begin{smallmatrix} gi \\ p \end{smallmatrix} \right\} \left[\begin{smallmatrix} ph \\ k \end{smallmatrix} \right] \right),$$

wenn in den beiden Summen, welche Derivirten von ω enthalten, p statt r gesetzt wird. Ferner ist nach (5.)

$$\frac{\partial \omega_{pk}}{\partial x_i} = \begin{bmatrix} ip \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ik \\ p \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \omega_{pk}}{\partial x_h} = \begin{bmatrix} hp \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} hk \\ p \end{bmatrix},$$

also

$$\begin{bmatrix} pi \\ k \end{bmatrix} - \frac{\partial \omega_{pk}}{\partial x_i} = -\begin{bmatrix} ik \\ p \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \omega_{pk}}{\partial x_h} - \begin{bmatrix} ph \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hk \\ p \end{bmatrix},$$

und die in Rede stehende Summe wird

$$= \frac{\partial \begin{bmatrix} gh \\ k \end{bmatrix}}{\partial x_i} - \frac{\partial \begin{bmatrix} gi \\ k \end{bmatrix}}{\partial x_h} + \sum_p \left(\begin{Bmatrix} gi \\ p \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} hk \\ p \end{bmatrix} - \begin{Bmatrix} gh \\ p \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} ik \\ p \end{bmatrix} \right).$$

Diesen Ausdruck bezeichne ich von hier ab durch $(gkhi)$, so dass, wenn die Grössen $\begin{Bmatrix} gi \\ p \end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix} gh \\ p \end{Bmatrix}$ mittelst der Gleichungen (7.) weggeschafft werden,

$$(13.) \qquad (gkhi) = \frac{\partial \begin{bmatrix} gh \\ k \end{bmatrix}}{\partial x_i} - \frac{\partial \begin{bmatrix} gi \\ k \end{bmatrix}}{\partial x_h} + \sum_{\alpha\beta} \frac{E_{\alpha\beta}}{E} \left(\begin{bmatrix} gi \\ \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} hk \\ \beta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} gh \\ \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ik \\ \beta \end{bmatrix} \right),$$

oder wenn man die Derivirten ausführt,

$$(14.) \qquad \begin{cases} (gkhi) = \frac{1}{2} \left(\dfrac{\partial^2 \omega_{gi}}{\partial x_h \partial x_k} + \dfrac{\partial^2 \omega_{hk}}{\partial x_g \partial x_i} - \dfrac{\partial^2 \omega_{gh}}{\partial x_i \partial x_k} - \dfrac{\partial^2 \omega_{ik}}{\partial x_g \partial x_h} \right) \\ \qquad + \sum\limits_{\alpha\beta} \dfrac{E_{\alpha\beta}}{E} \left(\begin{bmatrix} gi \\ \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} hk \\ \beta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} gh \\ \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ik \\ \beta \end{bmatrix} \right) \end{cases}$$

wird. In Folge dieser Bezeichnung, welche wir auch für die transformirte Form benutzen, nehmen die Integrabilitätsbedingungen (12.) die folgende Gestalt an:

$$(15.) \qquad (\alpha\delta\beta\gamma)' = \sum_{ghik} (gkhi)\, u^g_\alpha u^h_\beta u^i_\gamma u^k_\delta.$$

Für dieses System von Gleichungen gilt das nämliche Resultat wie für die Gleichungen (12.), dass sie das vollständige System aller zu (9.) gehörigen Integrabilitätsbedingungen bilden, aber nicht die Gleichungen (9.), sondern das allgemeinere System (9′.) unter Voraussetzung der Relationen (11.) nach sich ziehen, also die zu (1.) gehörigen Integrabilitätsbedingungen nicht ersetzen.

Die Coefficienten im vorstehenden Formelnsystem haben folgende Eigenschaften. Vertauscht man in (13.) i mit h, so folgt

$$(16^a.) \qquad (gkih) = -(gkhi).$$

Vertauscht man in (14.) g mit k, so folgt

$$(16^b.) \qquad (kghi) = -(gkhi).$$

Vertauscht man in (14.) g mit i und zugleich k mit h, so ändert sich auf der rechten Seite wegen $E_{\beta\alpha} = E_{\alpha\beta}$ nichts, und es folgt

$$(ihkg) = (gkhi)$$

oder

$$(16^c.) \quad (higk) = (gkhi).$$

Endlich erhält man ohne Weiteres

$$(16^d.) \quad (gkhi)+(ghik)+(gikh) = 0,$$

wobei zu bemerken ist, dass diese vier Formeln auf eine der vorangehenden zurückführen, sobald sich unter den Zahlen $ghik$ zwei gleiche befinden.

Mittelst dieser vier Formeln lässt sich die Anzahl der in (15.) enthaltenen und wesentlich voneinander verschiedenen Relationen leicht bestimmen.

Zunächst sind wegen (*a.*) und (*b.*) alle Fälle auszuschliessen, wo $\alpha=\delta$ oder $\beta=\gamma$ ist, sowie diejenigen, welche durch Vertauschung von α mit δ oder von β mit γ folgen. Für $\alpha\delta$ sowie für $\beta\gamma$ sind demnach nur Combinationen ohne Wiederholung der Zahlen 1, 2, ... n zu nehmen, deren Anzahl gleich $\frac{n(n-1)}{2}=n_2$ ist.

Jetzt zerfallen die Ausdrücke $(\alpha\delta\beta\gamma)'$ in drei Gruppen, die erste von n_2 Ausdrücken, welche der Voraussetzung $\alpha\delta=\beta\gamma$ entsprechen, die zweite von $\frac{n_2(n_2-1)}{2}$ Ausdrücken, in denen $\alpha\delta$ nicht gleich $\beta\gamma$ ist, während die dritte Gruppe von gleichviel Ausdrücken, welche sich aus der zweiten durch Vertauschung von $\alpha\delta$ mit $\beta\gamma$ ergiebt, wegen (*c.*) auszuschliessen ist. Also erhalten wir wegen (*a.*), (*b.*) und (*c.*) nur $\frac{n_2(n_2+1)}{2}$ Ausdrücke $(\alpha\delta\beta\gamma)'$.

Da aber jede Gruppe $\alpha\delta\beta\gamma$, in welcher keine Zahl mehr als einmal vorkommt, eine Gleichung (*d.*) liefert, so lassen sich im Ganzen

$$n_4 = \tfrac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

von den eben erwähnten Ausdrücken durch andere darstellen, und es bleiben nur

$$\frac{n_2(n_2+1)}{2}-n_4 = \frac{n^2(n^2-1)}{12}$$

von einander wesentlich verschiedene Ausdrücke $(\alpha\delta\beta\gamma)'$ übrig; dies ist demnach die Anzahl der Gleichungen (15.), soweit sie nicht auseinander folgen.

Die Anzahl der Gleichungen (10.) ist $\frac{n(n+1)}{2}$; addirt man dies zur vorstehenden Zahl, so erhält man

$$\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n^2(n^2-1)}{12} = n^2+n+\frac{(n+2)(n+1)n(n-3)}{12},$$

und es ist demnach für $n=2$ die Anzahl der Gleichungen (10.) und (15.) kleiner als die Anzahl n^2+n der in ihnen vorkommenden Unbekannten, nämlich der ursprünglichen Variabeln und ihrer ersten Derivirten, für $n=3$ ist sie dieser gleich und für $n>3$ ist sie grösser als die letztere.

6.

Ebenso wie die Gleichungen (10.) als Transformationsrelationen zur Gleichung (1.) oder (2.) gehören, so sind auch die Gleichungen (15.), wie aus ihrer Form hervorgeht, die Transformationsrelationen zu einer Form vierter Ordnung. Bevor wir zur Herstellung dieser Form übergehen, werden wir nachweisen, wie man allgemein aus den zu irgend einer Form gehörigen Transformationsrelationen mittelst der Gleichungen (9.) zu den Transformationsrelationen für eine neue Form gelangen kann, deren Ordnung um Eins grösser ist wie die Ordnung der ursprünglichen Form.

Sei

$$G_\mu = \sum_{i_1 \dots i_\mu} (i_1 i_2 \dots i_\mu) \underset{1}{\partial} x_{i_1} \underset{2}{\partial} x_{i_2} \dots \underset{\mu}{\partial} x_{i_\mu}$$

eine aus den Coefficienten von F abgeleitete und in den Differentialen $\underset{1}{\partial} x$, $\underset{2}{\partial} x, \dots \underset{\mu}{\partial} x$ μ-fach lineare Form, G'_μ ihre transformirte, mithin allgemein

$$(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu)' = \sum_{i_1 \dots i_\mu} (i_1 i_2 \dots i_\mu) u^{i_1}_{\alpha_1} u^{i_2}_{\alpha_2} \dots u^{i_\mu}_{\alpha_\mu},$$

wo wie bisher

$$u^i_\alpha = \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha}$$

zu setzen ist. Differentiirt man nun nach x'_α, so folgt

$$\frac{\partial (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\mu)'}{\partial x'_\alpha} = \sum_{i \dots i_\mu} \frac{\partial (i_1 i_2 \dots i_\mu)}{\partial x_i} u^i_\alpha u^{i_1}_{\alpha_1} \dots u^{i_\mu}_{\alpha_\mu} + P,$$

$$P = \sum_{\lambda i_2 \dots i_\mu} (\lambda i_2 \dots i_\mu) \frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial x'_\alpha \partial x'_{\alpha_1}} u^{i_2}_{\alpha_2} \dots u^{i_\mu}_{\alpha_\mu}$$

$$+ \sum_{i_1 \lambda \dots i_\mu} (i_1 \lambda \dots i_\mu) u^{i_1}_{\alpha_1} \frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial x'_\alpha \partial x'_{\alpha_2}} \dots u^{i_\mu}_{\alpha_\mu} + \dots .$$

Setzt man nun in P für die zweiten Derivirten ihre Werthe

$$\frac{\partial^2 x_\lambda}{\partial x'_\alpha \partial x'_{\alpha_s}} = \sum_r \left\{ \begin{matrix} \alpha \alpha_s \\ r \end{matrix} \right\}' u^\lambda_r - \sum_{i i_s} \left\{ \begin{matrix} i i_s \\ \lambda \end{matrix} \right\} u^i_\alpha u^{i_s}_{\alpha_s}$$

ein, so erhält man für P eine Differenz $U - V$, wo

$$U = \sum_r \left\{ \begin{matrix} \alpha \alpha_1 \\ r \end{matrix} \right\}' \sum_{\lambda i_2 \dots i_\mu} (\lambda i_2 \dots i_\mu) u^\lambda_r u^{i_2}_{\alpha_2} \dots u^{i_\mu}_{\alpha_\mu}$$

$$+ \sum_r \left\{ \begin{matrix} \alpha \alpha_2 \\ r \end{matrix} \right\}' \sum_{i_1 \lambda \dots i_\mu} (i_1 \lambda \dots i_\mu) u^{i_1}_{\alpha_1} u^\lambda_r \dots u^{i_\mu}_{\alpha_\mu} + \dots$$

$$= \sum_r \left[\left\{ \begin{matrix} \alpha \alpha_1 \\ r \end{matrix} \right\}' (r \alpha_2 \dots \alpha_\mu)' + \left\{ \begin{matrix} \alpha \alpha_2 \\ r \end{matrix} \right\}' (\alpha_1 r \dots \alpha_\mu)' + \dots \right]$$

und

$$V = \sum_{i \dots i_\mu} u^i_\alpha u^{i_1}_{\alpha_1} \dots u^{i_\mu}_{\alpha_\mu} \sum_\lambda \left[\left\{ \begin{matrix} i i_1 \\ \lambda \end{matrix} \right\} (\lambda i_2 \dots i_\mu) + \left\{ \begin{matrix} i i_2 \\ \lambda \end{matrix} \right\} (i_1 \lambda \dots i_\mu) + \dots \right]$$

ist. Führt man den hierdurch bestimmten Werth von P ein, und bringt U auf die linke Seite der Gleichung, während auf der rechten alles unter ein Summenzeichen gebracht wird, so ergiebt sich folgendes Resultat:

Unter der Voraussetzung, dass alle Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind, erhält man aus jedem vollständigen System von Transformationsrelationen μ^{ter} Ordnung

$$(17^a.) \qquad (\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\mu)' = \sum_{i_1\ldots i_\mu} (i_1 i_2\ldots i_\mu) u^{i_1}_{\alpha_1} u^{i_2}_{\alpha_2}\ldots u^{i_\mu}_{\alpha_\mu}$$

ein neues vollständiges System von Transformationsrelationen $(\mu+1)^{ter}$ Ordnung

$$(17^b.) \qquad (\alpha\alpha_1\ldots\alpha_\mu)' = \sum_{i\ldots i_\mu} (i i_1\ldots i_\mu) u^{i}_{\alpha} u^{i_1}_{\alpha_1}\ldots u^{i_\mu}_{\alpha_\mu},$$

wenn man

$$(17^c.) \qquad (i i_1\ldots i_\mu) = \frac{\partial(i_1 i_2\ldots i_\mu)}{\partial x_i} - \sum_\lambda \left[\begin{Bmatrix} i i_1 \\ \lambda \end{Bmatrix} (\lambda i_2\ldots i_\mu) + \begin{Bmatrix} i i_2 \\ \lambda \end{Bmatrix} (i_1\lambda\ldots i_\mu) + \cdots\right]$$

setzt und diese Bezeichnung auch für die transformirte Form benutzt.

Mittelst dieses Satzes kann man aus einer Gleichung $G_\mu = G'_\mu$ eine Reihe ähnlicher Gleichungen $G_{\mu+1} = G'_{\mu+1}$, $G_{\mu+2} = G'_{\mu+2}$, u. s. w. ableiten, bis man auf identische Relationen oder solche kommt, die aus früheren zusammengesetzt sind.

Der erste Fall tritt bei der Function F selbst ein. Nimmt man nämlich $(i_1 i_2) = \omega_{i_1 i_2}$, so wird

$$(i i_1 i_2) = \frac{\partial \omega_{i_1 i_2}}{\partial x_i} - \sum_\lambda \left[\begin{Bmatrix} i i_1 \\ \lambda \end{Bmatrix} \omega_{\lambda i_2} + \begin{Bmatrix} i i_2 \\ \lambda \end{Bmatrix} \omega_{i_1\lambda}\right]$$

$$= \frac{\partial \omega_{i_1 i_2}}{\partial x_i} - \begin{bmatrix} i i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i i_2 \\ i_1 \end{bmatrix}$$

nach einer in art. 5. benutzten Formel, und dies ist wegen Gleichung (5.) stets gleich Null.

7.

Wir gehen nun zur Darstellung derjenigen homogenen Form G_4 über, zu welcher die Gleichungen (15.) als Transformationsrelationen gehören. Dieselben lauten

$$(18.) \qquad (\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3)' = \sum_{i\ldots i_3} (i i_1 i_2 i_3) \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial x'_{\alpha_1}} \frac{\partial x_{i_2}}{\partial x'_{\alpha_2}} \frac{\partial x_{i_3}}{\partial x'_{\alpha_3}},$$

und es ist wegen (16.)

$$(19.) \qquad \begin{cases} (i i_1 i_3 i_2) = -(i i_1 i_2 i_3), \quad (i_1 i i_2 i_3) = -(i i_1 i_2 i_3), \quad (i_2 i_3 i i_1) = (i i_1 i_2 i_3), \\ (i i_1 i_2 i_3) + (i i_2 i_3 i_1) + (i i_3 i_1 i_2) = 0. \end{cases}$$

Wir multipliciren die Gleichung (18.) mit $\partial x'_\alpha \delta x'_{\alpha_1} Dx'_{\alpha_2} \Delta x'_{\alpha_3}$, unter ∂, δ, D, Δ verschiedene Differentiationszeichen verstanden, und setzen

$$\sum_{i\ldots i_3} (i i_1 i_2 i_3)\, \partial x_i \delta x_{i_1} Dx_{i_2} \Delta x_{i_3} = G_4;$$

dann folgt aus (18.) durch Summation über alle Werthe der α

$$G'_4 = G_4.$$

Hier ist also G_4 eine quadrilineare Form der Variabelnsysteme ∂x, δx, Dx, Δx, welche alle derselben linearen Substitution unterworfen sind. Aber diese Form ist wegen der Eigenschaften ihrer Coefficienten eine sehr specielle.

Vertauscht man i mit i_1, was nichts ändert, da beide die gleichen Werthe durchlaufen, und ersetzt dann $(i_1 i i_2 i_3)$ durch $-(i i_1 i_2 i_3)$, so folgt, dass G_4 nur sein Zeichen ändert, wenn ∂ mit δ vertauscht wird. Nimmt man für $i i_1$ nur die Combinationen ohne Wiederholung, so folgt

$$G_4 = \Sigma (i i_1 i_3 i_4)(\partial x_i \delta x_{i_1} - \partial x_{i_1} \delta x_i) Dx_{i_3} \Delta x_{i_4}.$$

Das Gleiche ergiebt sich für D und Δ, wenn i_3 und i_4 vertauscht werden, und es folgt

$$(20.) \qquad G_4 = {}'\Sigma (i i_1 i_2 i_3)(\partial x_i \delta x_{i_1} - \partial x_{i_1} \delta x_i)(Dx_{i_2} \Delta x_{i_3} - Dx_{i_3} \Delta x_{i_2}),$$

wenn der Accent am Summenzeichen bedeutet, dass sowohl für $i i_1$, als für $i_2 i_3$ nur die $\frac{n(n-1)}{2}$ Combinationen ohne Wiederholung der Zahlen 1, 2, … n gesetzt werden dürfen.

Vertauscht man nun i mit i_2, i_1 mit i_3 und wendet die Gleichung $(i_2 i_3 i i_1) = (i i_1 i_2 i_3)$ an, so folgt, dass G_4 ungeändert bleibt, wenn allgemein $\partial x_i \delta x_k - \partial x_k \delta x_i$ mit $Dx_i \Delta x_k - Dx_k \Delta x_i$ vertauscht wird. Gleichwohl darf man nicht $D = \partial$ und $\Delta = \delta$ oder eines von beiden setzen, weil sonst die Coefficienten $(i i_1 i_2 i_3)$ und $(i_2 i_1 i i_3)$ oder, was dasselbe ist, $(i i_1 i_2 i_3)$ und $(i i_3 i_2 i_1)$ nicht mehr von einander getrennt bleiben, sondern zu ihrer Summe vereinigt werden, mithin aus $G_4 = G'_4$ nicht mehr alle Transformationsrelationen (18.) hervorgehen können.

Die letzteren ergeben sich auch aus den Formen

$$H_4 = \Sigma (i i_2 i_3 i_1)\, \partial x_i \delta x_{i_1} Dx_{i_2} \Delta x_{i_3} = \Sigma (i i_1 i_2 i_3)\, \partial x_i Dx_{i_1} \Delta x_{i_2} \delta x_{i_3},$$

$$J_4 = \Sigma (i i_3 i_1 i_2)\, \partial x_i \delta x_{i_1} Dx_{i_2} \Delta x_{i_3} = \Sigma (i i_1 i_2 i_3)\, \partial x_i \Delta x_{i_1} \delta x_{i_2} Dx_{i_3},$$

welche aus G_4 durch cyklische Vertauschung von δ, D und Δ hervorgehen, und es ist wegen (19.) identisch

$$G_4 + H_4 + J_4 = 0.$$

8.

Ich setze nun voraus, man habe nach art. 6. aus den Coefficienten $(i_1 i_2 i_3 i_4)$ von G_4 neue Ausdrücke $(i i_1 i_2 i_3 i_4)$ abgeleitet und mittelst derselben eine in den Differentialen ∂x, $\partial_1 x$, $\partial_2 x$, $\partial_3 x$, $\partial_4 x$ fünffach lineare Form G_5 gebildet. Ebenso sei aus G_5 auf demselben Wege eine sechsfach lineare Form G_6, aus dieser eine siebenfach lineare G_7 abgeleitet worden, u. s. w., bis man auf Formen kommt, deren Coefficienten entweder verschwinden oder auf frühere Formen zurückführen. Dann ergiebt sich das Gleichungssystem

$$(A.) \qquad F = F', \quad G_4 = G_4', \quad G_5 = G_5', \quad \ldots,$$

und es geht aus dem Vorangehenden hervor, dass für die Möglichkeit der ersten von diesen Gleichungen die Möglichkeit aller übrigen erforderlich ist.

Damit aber die Gleichung $F = F'$ möglich sei, ist erforderlich und hinreichend, dass die entsprechenden Transformationsrelationen

$$(F.) \qquad (\alpha_1 \alpha_2)' = \sum_{i_1 i_2} (i_1 i_2)\, u^{i_1}_{\alpha_1} u^{i_2}_{\alpha_2}$$

für $(ik) = \omega_{ik}$, und zugleich die Integrabilitätsbedingungen

$$(B.) \qquad \frac{\partial u^i_\alpha}{\partial x'_\beta} = \frac{\partial u^i_\beta}{\partial x'_\alpha}$$

erfüllt sind. Denn wenn beide Gleichungssysteme erfüllt sind, so giebt es n Functionen $v_1, v_2, \ldots v_n$ der Beschaffenheit, dass die Gleichungen $(F.)$ durch die allgemeine Annahme

$$u^i_\alpha = \frac{\partial v_i}{\partial x'_\alpha}$$

befriedigt werden, und die Substitution $x_1 = v_1$, $x_2 = v_2$, $\ldots$ $x_n = v_n$ leistet dann die verlangte Transformation von F in F'.

Damit die Gleichung $G_4 = G_4'$ möglich sei, müssen die Transformationsrelationen

$$(G_4.) \qquad (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)' = \sum_{i_1 \ldots i_4} (i_1 i_2 i_3 i_4)\, u^{i_1}_{\alpha_1} u^{i_2}_{\alpha_2} u^{i_3}_{\alpha_3} u^{i_4}_{\alpha_4}$$

und die Integrabilitätsbedingungen $(B.)$ erfüllt sein.

Ebenso müssen diese letztern neben den Transformationsrelationen

$$(G_5.) \qquad (\alpha \alpha_1 \ldots \alpha_4)' = \sum_{i \ldots i_4} (i i_1 \ldots i_4)\, u^i_\alpha u^{i_1}_{\alpha_1} \ldots u^{i_4}_{\alpha_4}$$

erfüllt sein, damit die Gleichung $G_5 = G_5'$ möglich sei, u. s. w.

Dies festgestellt, würde die Transformation von F in F' schon dann unmöglich sein, wenn die verschiedenen Systeme von Transformationsrelationen $(F.)$, $(G_4.)$, $(G_5.)$, $(G_6.)$, u. s. w. algebraisch nicht mit einander bestehen könnten, abgesehen von den nothwendig hinzuzufügenden Integrabilitätsbedingungen $(B.)$.

Ich setze daher, indem von den Gleichungen $(B.)$ gänzlich Abstand genommen wird, voraus, die verschiedenen Systeme von Transformationsrelationen, deren Herleitung und Aufeinanderfolge oben festgestellt wurde, seien algebraisch erfüllt; dann handelt es sich darum, ob die Integrabilitätsbedingungen $(B.)$, vermittelst deren aus $F = F'$ alle übrigen Gleichungen $(A.)$ folgten, überflüssig sind oder nicht.

9.

Um diese Frage, welche der Kernpunkt des ganzen Transformationsproblems ist, zu erledigen, will ich zur Vermeidung überflüssiger Rechnungen die hier erforderlichen Schlüsse zunächst unter einer bestimmten Voraussetzung darlegen, welche keineswegs festgehalten werden soll, und dann erst zur Behandlung der Frage in derjenigen Form übergehen, in welcher sie gestellt werden muss.

Ich will also voraussetzen, 1) dass die Unbekannten x und u beispielsweise durch das Gleichungssystem $(G_4.)$ vollständig und ohne Widerspruch bestimmt sind, und dass 2) diese Werthe der Unbekannten auch dem folgenden Gleichungssystem $(G_5.)$ genügen.

Nimmt man nun von den Gleichungen $(G_4.)$ die Derivirte nach x'_α, so folgt ein Gleichungssystem

$$(G'_4.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)'}{\partial x'_\alpha} = \sum\limits_{i\ldots i_4} \dfrac{\partial(i_1 i_2 i_3 i_4)}{\partial x_i}\dfrac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha} u^{i_1}_{\alpha_1}\ldots u^{i_4}_{\alpha_4} + \Pi, \\ \Pi = \sum\limits_{\lambda i_2 i_3 i_4} (\lambda i_2 i_3 i_4)\dfrac{\partial u^\lambda_{\alpha_1}}{\partial x'_\alpha} u^{i_2}_{\alpha_2} u^{i_3}_{\alpha_3} u^{i_4}_{\alpha_4} \\ \quad + \sum\limits_{i_1 \lambda i_3 i_4} (i_1 \lambda i_3 i_4) u^{i_1}_{\alpha_1}\dfrac{\partial u^\lambda_{\alpha_2}}{\partial x'_\alpha} u^{i_3}_{\alpha_3} u^{i_4}_{\alpha_4} + \cdots . \end{cases}$$

In Bezug auf dieses System ist zunächst festzustellen, was aus unserer ersten Voraussetzung folgt, dass durch dasselbe die Werthe aller Derivirten

$$\frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha}, \qquad \frac{\partial u^\lambda_{\alpha_s}}{\partial x'_\alpha}$$

völlig bestimmt sind, d. h. dass das System $(G'_4.)$ eine der Anzahl dieser Unbekannten gleiche Anzahl von Gleichungen enthält, welche in Bezug auf jene von einander unabhängig sind, und keine Gleichung dieses Systems mit andern im Widerspruche ist.

Setzt man nun

$$\frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha} - u^i_\alpha = \binom{i}{\alpha}$$

$$\frac{\partial u^\lambda_{\alpha_s}}{\partial x'_\alpha} + \sum_{i i_s} \left\{ \begin{matrix} i i_s \\ \lambda \end{matrix} \right\} u^i_\alpha u^{i_s}_{\alpha_s} - \sum_r \left\{ \begin{matrix} \alpha \alpha_s \\ r \end{matrix} \right\}' u^\lambda_r = \binom{\lambda}{\alpha \alpha_s},$$

so sind $\binom{i}{\alpha} = 0$, $\binom{\lambda}{\alpha\alpha_s} = 0$ die Gleichungen, mittelst deren in art. 6. aus den vorstehenden Gleichungen $(G'_4.)$ die soeben als die Unbekannten dieses Systems bezeichneten Derivirten weggeschafft wurden, wodurch jene in die Gleichungen $(G_5.)$ übergingen.

Schafft man statt dessen diese Derivirten aus den Gleichungen $(G'_4.)$ mittelst der vorstehenden Formeln weg, so erhält man auf der rechten Seite einen in den Grössen $\binom{i}{\alpha}$, $\binom{\lambda}{\alpha\alpha_s}$ linearen Theil U_4, der sich von der ursprünglichen rechten Seite von $(G'_4.)$ nur dadurch unterscheidet, dass $\frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha}$ durch $\binom{i}{\alpha}$, $\frac{\partial u^\lambda_{\alpha_s}}{\partial x'_\alpha}$ durch $\binom{\lambda}{\alpha\alpha_s}$ ersetzt ist. Die übrigen Glieder heben sich gegen die linke Seite weg, da wir voraussetzen, dass die Gleichungen $(G_5.)$ erfüllt sind. Folglich gehen die Gleichungen $(G'_4.)$ über in ein Gleichungssystem

$$U_4 = 0,$$

welches aus jenen erhalten wird, wenn die Unbekannten durch $\binom{i}{\alpha}$, $\binom{\lambda}{\alpha\alpha_s}$ ersetzt, und alle unabhängigen Glieder unterdrückt werden.

Dieses System enthält also ebenfalls eine der Anzahl der Unbekannten $\binom{i}{\alpha}$, $\binom{\lambda}{\alpha\alpha_s}$ gleiche Anzahl von Gleichungen, welche in Bezug auf jene von einander unabhängig sind. Folglich können diese Gleichungen nur dadurch befriedigt werden, dass man allgemein $\binom{i}{\alpha} = 0$, $\binom{\lambda}{\alpha\alpha_s} = 0$, also namentlich für jedes i und α

$$u^i_\alpha = \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha}$$

setzt.

Wenn daher die Gleichungen $(G_4.)$ allein alle Unbekannten völlig bestimmen, und die ihnen genügenden Werthe derselben auch die aus $(G_4.)$ fliessenden Gleichungen $(G_5.)$ befriedigen, so sind alle Integrabilitätsbedingungen erfüllt, so dass bei diesen Voraussetzungen die Gleichungen $(B.)$ überflüssig werden.

10.

Es bedarf nach dem Vorhergehenden keiner neuen Rechnung, um einzusehen, dass diese Folgerungen auch noch stattfinden, wenn alle Unbekannten durch die Gleichungssysteme (G_p), (G_q), (G_r), . . . ohne Widerspruch völlig bestimmt sind und zugleich den Gleichungen (G_{p+1}), (G_{q+1}), (G_{r+1}), . . . Genüge leisten, welche sich aus diesen nach art. 6. ergeben. In der That folgt dann aus jedem System (G_s) mit Rücksicht auf (G_{s+1}) ein Gleichungssystem $U_s=0$, und es muss sich dann unter der Schaar von Gleichungen

$$U_p=0, \quad U_q=0, \quad U_r=0, \quad \ldots$$

eine Gruppe finden, welche ebenso viel Gleichungen enthält als Unbekannte vorhanden sind, und deren Determinante von Null verschieden ist.

Zu den Gleichungen, aus denen man die ursprünglichen Unbekannten x und u zu bestimmen hat, gehören in erster Linie die Transformationsrelationen $(F.)$ selbst; sie unterscheiden sich von den übrigen ausser ihnen zu verwendenden Gleichungssystemen, z. B. von den Gleichungen $(G_4.)$ dadurch, dass die aus ihnen nach art. 6. abzuleitenden Gleichungen identisch erfüllt sind, indem sich für $(i_1 i_2)=\omega_{i_1 i_2}$, $(i i_1 i_2)=0$ ergab. Folglich erhalten wir den Lehrsatz:

Aus dem ursprünglichen Differentialausdrucke F leite man zunächst nach den artt. 5. und 7. die Form G_4 ab, und dann aus dieser nach art. 6. die Formenreihe G_5, G_6, u. s. w. Wenn alsdann durch die Transformationsrelationen, welche zu den Gleichungen

$$F=F', \quad G_4=G_4', \quad G_5=G_5', \quad \ldots \quad G_p=G_p'$$

gehören, die Werthe der Unbekannten x und u ohne Widerspruch völlig bestimmt sind, und die nämlichen Werthe der Unbekannten auch noch den Transformationsrelationen Genüge leisten, welche sich aus der nächstfolgenden Gleichung

$$G_{p+1} = G_{p+1}'$$

ergeben, so sind zugleich alle für die Transformation von F in F' erforderlichen Integrabilitätsbedingungen erfüllt, und es wird allgemein

$$u_\alpha^i = \frac{\partial x_i}{\partial x_\alpha'}.$$

Durch diesen Lehrsatz, welcher in allen Fällen, wo er Anwendung findet, die Frage nach den Integrabilitätsbedingungen überflüssig macht, wird für die Anwendungen der algebraischen Invariantentheorie ein neues und fruchtbares Gebiet eröffnet.

In der That kommt bei der Anwendung dieses Satzes der Umstand nicht mehr in Betracht, dass die Grössen ∂x, ∂x, ... vollständige Differentiale bedeuten, sondern man hat F, G_4, G_5, ... nur noch als algebraische homogene Formen mit den Variabelnsystemen ∂x, ∂x, ... zu betrachten, unter der Voraussetzung, dass alle Variabelnsysteme der nämlichen linearen Substitution unterliegen.

Unter dieser Bedingung hat man nun, was aus rein algebraischen Gründen entschieden wird, die Reihe der aufeinanderfolgenden Formen F, G_4, G_5, ... soweit fortzusetzen, bis sie n absolute Invarianten und ebensoviel zugehörige Formen Ψ_s liefern, von denen die ersten *in Bezug auf die Variabeln* x, die letztern überhaupt von einander unabhängig sind. Sodann hat man noch für die um ein Glied weiter fortgesetzte Formenreihe F, G_4, G_5, ... ein vollständiges System von Invarianten I, I_1, ... zu ermitteln, welche *in Bezug auf die Coefficienten dieser Formen* von einander unabhängig sind.

Dann besteht das System aller für die Möglichkeit der Transformation von F in F' erforderlichen und ausreichenden Bedingungen in den Gleichungen

$$I' = r^{\lambda} I, \quad I_1' = r^{\lambda_1} I_1, \ \ldots,$$

wo r die Substitutionsdeterminante ist, und die Exponenten λ constante Werthe haben.

Es ist angemessen, *diese Invarianten* I, I_1, ... *der hinreichend weit, aber nicht weiter als nöthig fortgesetzten Formenreihe* F, G_4, G_5, ... *auch als ein vollständiges System von Invarianten des Differentialausdruckes* F *zu bezeichnen.*

Seien $U_1, U_2, \ldots U_n$ die Variabeln in den ursprünglichen, $V_1, V_2, \ldots V_n$ dieselben in den transformirten zugehörigen Formen, so dass zur ursprünglichen Substitution

$$\partial x_i = \sum_{\alpha} u_{\alpha}^{i} \partial x_{\alpha}'$$

die transponirte

$$V_{\alpha} = \sum_{i} u_{\alpha}^{i} U_i$$

gehört. Sind unter dieser Voraussetzung die Gleichungen zwischen den zugehörigen Formen die folgenden

$$\Psi_s'(V_1, V_2, \ldots) = r^{\mu_s} \Psi_s(U_1, U_2, \ldots),$$

für $s = 1, 2, \ldots n$ und constante Werthe der μ, so folgen, wenn unter Ω eine beliebige Function der ursprünglichen Variabeln verstanden, und allgemein

$$U_i = \frac{\partial \Omega}{\partial x_i}$$

gesetzt wird, die Gleichungen

$$\Psi'_s\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x'_1}, \frac{\partial\Omega}{\partial x'_2}, \ldots\right) = r^{\mu}{}_s \Psi_s\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x_1}, \frac{\partial\Omega}{\partial x_2}, \ldots\right).$$

Solche, eine willkürliche Function Ω enthaltende Ausdrücke

$$\Psi_s\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x_1}, \frac{\partial\Omega}{\partial x_2}, \ldots\right)$$

müssen als zugehörige Formen des Differentialausdruckes F bezeichnet werden.

Ebenso liefern die Covarianten des Systems F, G_4, G_5, ... n Gleichungen

$$\Phi'_s(\partial x'_1, \partial x'_2, \ldots) = r^{\nu}{}_s \Phi_s(\partial x_1, \partial x_2, \ldots),$$

und *die Differentialausdrücke*

$$\Phi_s(\partial x_1, \partial x_2, \ldots)$$

müssen als Covarianten des Differentialausdruckes F selbst bezeichnet werden.

11.

Um den Inhalt des im vorigen art. gefundenen Satzes genau festzustellen, muss hervorgehoben werden, dass die Bedingungen desselben nicht unter allen Umständen erfüllt werden können. Wenn es sich z. B. um die Frage handelt, ob zwei gegebene Oberflächen auf einander ohne Dehnung abgewickelt werden können, so hat man eine Gleichung $F = F'$ für $n = 2$ zu untersuchen. Wenn nun die Abwickelung einer Fläche auf die andere, also die vorstehende Gleichung möglich ist, so wird man aus den in den Gleichungen $F = F'$, $G_4 = G'_4$, $G_5 = G'_5$, ... enthaltenen Transformationsrelationen, wie weit diese Reihe auch fortgesetzt werden mag, doch in denjenigen Fällen niemals bestimmte Werthe der x und u erhalten, wo die vorgelegten Flächen in sich selbst stetig verschoben werden können, weil in diesen Fällen die Transformationsrelationen, ohne Aenderungen der neuen Variabeln, stetige Aenderungen der ursprünglichen gestatten.

Es ist hiernach leicht, die Bedingungen für den allgemeinen Fall anzugeben, welcher der Verschiebbarkeit einer Fläche in sich selbst entspricht.

Das Grössengebiet der Variabeln x_1, x_2, ... x_n wird ein bei unveränderlichem F in sich verschiebbares genannt, wenn durch das Resultat der Transformation von F die anzuwendende Substitution nicht völlig bestimmt ist. Es ist klar, dass die sämmtlichen Bedingungen für das Stattfinden dieses Falles in identischen Gleichungen zwischen solchen Invarianten und zuge-

hörigen Formen von F bestehen, welche unter den Voraussetzungen des vorigen art. von einander unabhängige Functionen der Variabeln x und u sind.

In diesem Falle werden die Integrabilitätsbedingungen nicht überflüssig, weil man allen Transformationsrelationen genügen kann, ohne die in art. 9. durch $\binom{i}{\alpha}$, $\binom{\lambda}{\alpha\alpha_1}$ bezeichneten Ausdrücke gleich 0 zu setzen.

Für alle übrigen Fälle gilt das schöne, und aus der Natur der Sache keineswegs a priori zu erwartende Resultat, dass alle für die Möglichkeit der Transformation von F in F' nothwendigen und ausreichenden Bedingungen sich als Gleichungen zwischen Invarianten darstellen lassen, wenn dieser Ausdruck zur Bezeichnung der gleichen Formverhältnisse wie in der Algebra angewandt wird, und dass auch bei dem hier behandelten Transformationsproblem zugehörige Formen und Covarianten genau in derselben Bedeutung, wenn auch aus ganz anderer Quelle auftreten, wie bei den analogen algebraischen Problemen.

12.

Als Beispiel zur vorangehenden Theorie behandle ich den Fall $n=3$, bei welchem sich merkwürdige Vereinfachungen darbieten.

Werden wie in Gleichung (20.) für $i_1 i_2$ ebenso wie für $k_1 k_2$ nur Combinationen ohne Wiederholung der Zahlen 123, also z. B. nur die Gruppen 23, 31, 12 genommen, so kann man die Transformationsrelationen (18.) von G_4 in die Form

$$(\beta_1\beta_2\gamma_1\gamma_2)' = {}'\Sigma(i_1 i_2 k_1 k_2)\,(u^{i_1}_{\beta_1} u^{i_2}_{\beta_2} - u^{i_1}_{\beta_2} u^{i_2}_{\beta_1})\,(u^{k_1}_{\gamma_1} u^{k_2}_{\gamma_2} - u^{k_1}_{\gamma_2} u^{k_2}_{\gamma_1})$$

setzen.

Ich bestimme nun vier Zahlen β, γ, i und k durch die Bedingung, dass $\beta\beta_1\beta_2$, $\gamma\gamma_1\gamma_2$, ii_1i_2 und kk_1k_2 positive Permutationen der Zahlen 123 werden, so dass also gleichzeitig z. B.

$$\begin{aligned} &\beta=1, \quad \beta_1=2, \quad \beta_2=3,\\ \text{oder}\quad &\beta=2, \quad \beta_1=3, \quad \beta_2=1,\\ \text{oder}\quad &\beta=3, \quad \beta_1=1, \quad \beta_2=2 \end{aligned}$$

wird. Man erkennt hieraus, dass auch umgekehrt durch den Werth von β sowohl β_1 als β_2 bestimmt ist.

Dies festgestellt, bezeichne ich die aus einer Aenderung von u^i_α hervorgehende Unterdeterminante von r durch r^i_α und setze, da $i_1 i_2$ sowie $k_1 k_2$ durch die Werthe von i und k völlig bestimmt sind,

$$(i_1 i_2 k_1 k_2) = A_{ik},$$

so dass nach (14.)

$$(a.)\quad \begin{cases} A_{11} = \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial^2\omega_{23}}{\partial x_2\partial x_3} - \frac{\partial^2\omega_{22}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2\omega_{33}}{\partial x_2^2}\right) + \sum\limits_{\alpha\beta}\frac{E_{\alpha\beta}}{E}\left(\begin{bmatrix}23\\ \alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}23\\ \beta\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}22\\ \alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}33\\ \beta\end{bmatrix}\right) \\ A_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\omega_{23}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\omega_{11}}{\partial x_2\partial x_3} - \frac{\partial^2\omega_{12}}{\partial x_1\partial x_3} - \frac{\partial^2\omega_{13}}{\partial x_1\partial x_2}\right) + \sum\limits_{\alpha\beta}\frac{E_{\alpha\beta}}{E}\left(\begin{bmatrix}11\\ \alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}23\\ \beta\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}12\\ \alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}13\\ \beta\end{bmatrix}\right) \end{cases}$$

wird, woraus die übrigen durch cyklische Vertauschung von 123 folgen.

Dann nehmen die Transformationsrelationen von G_4 die einfache Form an:

$$(b.)\qquad A'_{\beta\gamma} = \sum_{ik} A_{ik} r^i_\beta r^k_\gamma .$$

In ähnlicher Weise lassen sich die zu $F = F'$ gehörigen Transformationsrelationen, wie z. B. aus der zugehörigen Form von F hervorgeht, durch die folgenden ersetzen:

$$(c.)\qquad E'_{\beta\gamma} = \sum_{ik} E_{ik} r^i_\beta r^k_\gamma .$$

Hierzu gehört die Bemerkung, dass wegen der Gleichungen (19.)

$$(d.)\qquad A_{ki} = A_{ik}$$

ist und, was später zur Anwendung kommt, A_{ik} sein Zeichen wechselt, wenn i_1 und i_2 oder k_1 und k_2 mit einander vertauscht werden.

Die Gleichungen (*b.*) und (*c.*) sind hiernach nichts anderes als die Transformationsrelationen für die simultane Ueberführung der ternären quadratischen Formen

$$I = \sum_{ik} A_{ik} X_i X_k ,$$
$$\Phi = \sum_{ik} E_{ik} X_i X_k$$

in die folgenden

$$I' = \sum_{ik} A'_{ik} \Xi_i \Xi_k ,$$
$$\Phi' = \sum_{ik} E'_{ik} \Xi_i \Xi_k$$

mittelst der linearen Substitution

$$(e.)\qquad X_i = \sum_\beta r^i_\beta \Xi_\beta ,$$

deren Determinante

$$R = r^2$$

ist, und zu welcher die inverse Substitution

$$(e'.)\qquad \Xi_\beta = \sum_i \frac{1}{r} u^i_\beta X_i$$

gehört.

Es ist bekannt, dass dieses Transformationsproblem ein bestimmtes ist, indem vier simultane Invarianten und drei zugehörige Formen existiren, welche in Bezug auf die Variabeln der letztern und die Coefficienten von I, Φ von

einander unabhängig sind. Daraus ergeben sich drei absolute Invarianten; wenn diese auch in Bezug auf die Variabeln x_1, x_2, x_3 von einander unabhängig sind, so ist es nach dem Lehrsatze des art. 10. für die gegenwärtige Untersuchung nur noch nöthig, zu F und G_4 die nächstfolgende Form G_5 abzuleiten. Nun ist nach art. 6.

$$(g i_1 i_2 k_1 k_2) = \frac{\partial (i_1 i_2 k_1 k_2)}{\partial x_g} - \sum_\lambda \left[\left\{ \begin{matrix} g i_1 \\ \lambda \end{matrix} \right\} (\lambda i_2 k_1 k_2) + \left\{ \begin{matrix} g i_2 \\ \lambda \end{matrix} \right\} (i_1 \lambda k_1 k_2) \right.$$
$$\left. + \left\{ \begin{matrix} g k_1 \\ \lambda \end{matrix} \right\} (i_1 i_2 \lambda k_2) + \left\{ \begin{matrix} g k_2 \\ \lambda \end{matrix} \right\} (i_1 i_2 k_1 \lambda) \right].$$

In dieser Summe hat man im ersten Gliede für λ nur die Werthe i_1 und i zu nehmen, da $(i_2 i_2 k_1 k_2) = 0$ ist. Verfährt man ebenso bei den übrigen Gliedern, und vertauscht in den Fällen, wo $\lambda = i$ oder $= k$ gesetzt wird, diesen Index mit dem zugehörigen, so folgt zunächst

$$(g i_1 i_2 k_1 k_2) = \frac{\partial (i_1 i_2 k_1 k_2)}{\partial x_g} - (i_1 i_2 k_1 k_2) \left[\left\{ \begin{matrix} g i_1 \\ i_1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} g i_2 \\ i_2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} g k_1 \\ k_1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} g k_2 \\ k_2 \end{matrix} \right\} \right]$$
$$+ \left\{ \begin{matrix} g i_1 \\ i \end{matrix} \right\} (i_2 i k_1 k_2) + \left\{ \begin{matrix} g i_2 \\ i \end{matrix} \right\} (i i_1 k_1 k_2) + \left\{ \begin{matrix} g k_1 \\ k \end{matrix} \right\} (i_1 i_2 k_2 k) + \left\{ \begin{matrix} g k_2 \\ k \end{matrix} \right\} (i_1 i_2 k k_1).$$

Nun sind $i_1 i_2 i$, $i_2 i i_1$ und $k_1 k_2 k$, $k_2 k k_1$ zugleich mit $i i_1 i_2$ und $k k_1 k_2$ positive Permutationen von 123; also folgt, wenn rechts in der Klammer des Subtrahenden noch $\left\{ \begin{matrix} g i \\ i \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} g k \\ k \end{matrix} \right\}$ addirt wird:

$$(g i_1 i_2 k_1 k_2) = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_g} - 2 A_{ik} \sum_r \left\{ \begin{matrix} g r \\ r \end{matrix} \right\}$$
$$+ \left\{ \begin{matrix} g i \\ i \end{matrix} \right\} A_{ik} + \left\{ \begin{matrix} g i_1 \\ i \end{matrix} \right\} A_{i_1 k} + \left\{ \begin{matrix} g i_2 \\ i \end{matrix} \right\} A_{i_2 k} + \left\{ \begin{matrix} g k \\ k \end{matrix} \right\} A_{ik} + \left\{ \begin{matrix} g k_1 \\ k \end{matrix} \right\} A_{ik_1} + \left\{ \begin{matrix} g k_2 \\ k \end{matrix} \right\} A_{ik_2}.$$

Diesen durch die Werthe g, i, k völlig bestimmten Ausdruck bezeichne ich durch A_{gik}, so dass

$$(g i_1 i_2 k_1 k_2) = A_{gik},$$

und nach der leicht herzuleitenden Formel

$$2 \sum_r \left\{ \begin{matrix} g r \\ r \end{matrix} \right\} = \frac{1}{E} \frac{\partial E}{\partial x_g}$$

$$(f.) \qquad A_{gik} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_g} - \frac{A_{ik}}{E} \frac{\partial E}{\partial x_g} + \sum_\lambda \left[\left\{ \begin{matrix} g \lambda \\ i \end{matrix} \right\} A_{\lambda k} + \left\{ \begin{matrix} g \lambda \\ k \end{matrix} \right\} A_{i \lambda} \right]$$

wird. Dieser Ausdruck hat die Eigenschaft, ungeändert zu bleiben, wenn i mit k, dagegen sein Zeichen zu wechseln, wenn i_1 mit i_2 oder k_1 mit k_2 vertauscht wird. In Folge dessen lassen sich die zu $G_5 = G_5'$ gehörigen Transformationsrelationen

$$A'_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{g i_1 i_2 k_1 k_2} A_{gik} u^g_\alpha u^{i_1}_{\beta_1} u^{i_2}_{\beta_2} u^{k_1}_{\gamma_1} u^{k_2}_{\gamma_2}$$

in die einfachere Form

$$(g.) \qquad A'_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{gik} A_{gik} u^g_\alpha r^i_\beta r^k_\gamma$$

bringen und führen nun zu einem weitern merkwürdigen Resultate.

Sind nämlich für die zugehörigen Formen von I' und Φ $U_1U_2U_3$ die ursprünglichen, $V_1V_2V_3$ die neuen Variabeln, so dass die entsprechende, zu $(e.)$ transponirte Substitution wird

$$(h.) \qquad V_\alpha = \sum_g r^g_\alpha U_g ,$$

woraus durch Umkehrung

$$(h'.) \qquad U_g = \sum_\alpha \frac{1}{r} u^g_\alpha V_\alpha$$

folgt, so erhält man aus der Gleichung $(g.)$, indem man mit $V_\alpha \Xi_\beta \Xi_\gamma$ multiplicirt und nach α, β, γ summirt:

$$\sum_{\alpha\beta\gamma} A'_{\alpha\beta\gamma} V_\alpha \Xi_\beta \Xi_\gamma = r \sum_{gik} A_{gik} U_g X_i X_k .$$

Da aber $r = R^{\frac{1}{3}}$ eine Potenz der Substitutionsdeterminante ist, und in beiden Summen sowohl die Variabeln der ursprünglichen als auch die der zugehörigen Formen vorkommen, so müssen dieselben entsprechende simultane Zwischenformen sein, und wir können demnach den folgenden Lehrsatz aussprechen:

Um die für die Möglichkeit der Transformation eines ternären quadratischen Differentialausdruckes

$$F = \Sigma \omega_{ik} \partial x_i \partial x_k$$

in einen andern

$$F' = \Sigma \omega'_{ik} \partial x'_i \partial x'_k$$

erforderlichen und ausreichenden Bedingungen und, falls dieselben erfüllt sind, die Substitution zu erhalten, welche die verlangte Transformation leistet, bilde man mittelst der Coefficienten von F die drei algebraischen ternären Formen

$$I = \Sigma A_{ik} X_i X_k ,$$
$$\Phi = \Sigma E_{ik} X_i X_k ,$$
$$\Theta = \Sigma A_{gik} U_g X_i X_k ,$$

und für F' in gleicher Weise die entsprechenden Formen I'', Φ', Θ' mit den Variabeln Ξ und V an Stelle von X und U.

Dann sind die verlangten Bedingungen genau die nämlichen, welche erforderlich sind und hinreichen, damit durch eine directe Substitution

$$X_i = \sum_\alpha r'_\alpha \Xi_\alpha$$

Γ in Γ', Φ in Φ' transformirt werde, und unter Voraussetzung der transponirten Substitution

$$V_\alpha = \sum_i r_\alpha^i U_i$$

gleichzeitig Θ und Θ' entsprechende Zwischenformen werden, welche der Gleichung

$$\Theta' = R^{\frac{1}{2}}\Theta$$

genügen.

Dieser Satz findet jedoch nur unter der Voraussetzung statt, dass die sechs absoluten zugehörigen Formen und Invarianten von Γ, Φ von einander unabhängige Functionen der Variabeln $x_1x_2x_3U_1U_2U_3$ sind.

Ist diese Bedingung erfüllt, so erhält man aus den Gleichungen zwischen den ursprünglichen und transformirten Covarianten von Γ, Φ die Coefficienten $\frac{1}{r}u_\beta^i$ der inversen Substitution, also da r durch die Invarianten bestimmt ist, u_β^i selbst und zwar so, dass allgemein

$$u_\beta^i = \frac{\partial x_i}{\partial x_\beta'}$$

wird.

Ist sie nicht erfüllt, so folgt statt des vorstehenden Satzes das Resultat, dass das Grössengebiet der Variabeln $x_1x_2x_3$ ohne Aenderung von F stetig in sich verschoben werden kann.

Aus art. 10. folgt, dass unter den Voraussetzungen des vorstehenden Satzes alle für die Möglichkeit der Transformation von F in F' erforderlichen und ausreichenden Bedingungen sich mittelst der simultanen Invarianten dreier homogenen Formen F, G_4, G_5 und ihrer transformirten darstellen lassen. Dieses Resultat setzt ebenso wie der obige Satz voraus, dass bei der Elimination der Substitutionscoefficienten u_α^i oder r_α^i, aus welcher die in Rede stehenden algebraischen Grundformen hervorgehen, auf Integrabilitätsbedingungen zwischen denselben keinerlei Rücksicht genommen werde.

Nun ist oben gefordert, es sollen sich die Grössen A_{gik} durch die Coefficienten von I' und Φ, und die Grössen A'_{gik} in der gleichen Weise durch die Coefficienten von I'' und Φ' so ausdrücken lassen, dass 1) Θ eine simultane Zwischenform von I' und Φ, 2) Θ' die nämliche simultane Zwischenform von I'' und Φ', und 3) $\Theta' = R^{\frac{1}{2}}\Theta$ wird. Der Exponent von R zeigt, dass diesen Bedingungen nicht genügt werden kann, wenn die Grössen A_{gik} rationale Functionen der Grössen A_{ik}, E_{ik} sind. Andererseits lassen sich diese Bedingungen sicher befriedigen, wenn F' nicht willkürlich gegeben,

sondern aus F durch irgend eine Substitution, z. B. die identische $x_i = x_i'$ abgeleitet worden ist. Also haben wir den Satz:

Man kann für jeden ternären quadratischen Differentialausdruck F die in den Gleichungen (f.) eingeführten Grössen A_{gik} als irrationale Functionen der Coefficienten von I' und Φ so darstellen, dass Θ eine simultane Zwischenform von I' und Φ wird, die zu ihrer transformirten in der Beziehung $\Theta' = R^{\frac{1}{2}}\Theta$ steht.

Fügt man zu dieser die Gleichungen $I'' = I'$, $\Phi' = \Phi$ und

$$\Sigma \pm r_1^1 r_2^2 r_3^3 = R,$$

so erhält man 31 Transformationsrelationen, aus denen sich, obgleich die Variabeln von Θ verschiedenen Substitutionen unterworfen sind, die 9 Substitutionscoefficienten r_α^i so eliminiren lassen, dass alle Eliminationsresultate die Invariantenform

$$I' = R^i I$$

annehmen.

In dem Hauptfalle, wo durch das Resultat der Transformation von I' und Φ die anzuwendende Substitution völlig bestimmt ist, gilt das Gleiche nothwendig auch von den drei Functionen I', Φ und Θ. Alsdann ist die Anzahl der von einander unabhängigen Invarianten 1) von I' und Φ allein gleich 4, 2) von I', Φ und Θ zusammen gleich 22, also 3) die Anzahl derjenigen unter ihnen, welche nothwendig Coefficienten von Θ enthalten, gleich 18.

Nach der in art. 10. angewandten Ausdrucksweise hat also der Differentialausdruck F im gegenwärtigen Falle 22 Invarianten überhaupt und 21 absolute, ausserdem drei von einander unabhängige zugehörige Formen und ebenso viel Covarianten.

Ueber die beim vorigen Lehrsatze ausgeschlossenen Differentialausdrücke F, zu denen unter andern das Quadrat des Linienelementes im Raume von drei Dimensionen gehört, liegt eine Abhandlung aus dem Nachlasse *Riemanns* *) vor, zu welcher Herr *Dedekind* die dort unterdrückten analytischen Entwicklungen in Aussicht gestellt hat.

---

*) *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.* Abh. der Göttinger Ges. d. W. vom Jahre 1867, Band XIII.

3. Januar 1869.

Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von *n* Differentialen.

(Von Herrn *R. Lipschitz* in Bonn.)

Wenn man aus einer gegebenen Anzahl von unabhängig veränderlichen Grössen und den ersten Differentialen derselben eine Function bildet, welche in Bezug auf die letztern rational, ganz und homogen, in Bezug auf die Variabeln aber von beliebiger Beschaffenheit ist, so leuchtet es ein, dass diese Function durch die Einführung eines beliebigen Systems von neuen veränderlichen Grössen an die Stelle der ursprünglichen in eine neue Function von den neuen Variabeln und deren ersten Differentialen verwandelt wird, welche in Bezug auf diese Differentiale ebenfalls ganz, rational, homogen und von demselben Grade ist, wie die ursprüngliche Function. Man kann eine Function von dieser Art mit Rücksicht auf die auftretenden Differentiale als eine algebraische Form, und diejenigen Ausdrücke, mit welchen die Potenzen und die Producte aus den Potenzen der Differentiale multiplicirt erscheinen, als die Coefficienten der Form auffassen. Demgemäss ist der analytische Ausdruck für das Quadrat des Linearelements einer gegebenen Fläche in zwei unabhängigen Veränderlichen, den *Gauss* den *disquisitiones generales circa superficies curvas* zu Grunde gelegt hat, eine quadratische Form von zwei Differentialen. Die hierauf bezüglichen *Gauss*ischen Forschungen haben in dem aus *Riemann*'s Nachlasse publicirten Aufsatz *über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen,* eine merkwürdige Anwendung gefunden, und es ist damit das Interesse an der bezeichneten Gattung von Formen, und in's besondere an denen des zweiten Grades und von beliebig vielen Differentialen, bedeutend gewachsen. Einen Angelpunkt von *Riemann*'s Untersuchungen bildet die Ermittelung der Criterien, von denen es abhängt, ob eine derartige Form durch die Einführung eines neuen Systems von Variabeln in eine Form transformirt werden könne, welche das Aggregat der Quadrate von den Differentialen der neuen Variabeln ist. In dem Falle einer Form von zwei Differentialen besteht das Criterium bekanntlich darin, dass das dem betreffenden Linearelement zugehörige *Gauss*ische Krümmungsmass verschwindet. Sobald

die Zahl der Differentiale die Zwei übertrifft, setzen die von *Riemann* aufgestellten Criterien, wofern ich dieselben richtig erfasst habe, voraus, dass die Auflösung einer mit dem Wesen der Form enge verbundenen Aufgabe der Variationsrechnung vorliegt, und haben insofern einen indirecten Character.

In dem geschlossenen Gebiet von Formen, für welche die Anzahl der Differentiale und der Grad gegebene Werthe haben, kann man zwei Formen als zu derselben Classe oder zu verschiedenen Classen gehörig betrachten, je nachdem es eine Substitution von nicht verschwindender Functionaldeterminante giebt, oder nicht giebt, durch welche die eine Form in die andere Form transformirt werden kann; und es finden auch die übrigen in der Theorie der Transformation der homogenen ganzen Functionen ausgebildeten Grundbegriffe ihr Gegenstück. Innerhalb des bezeichneten Gebietes bilden aber diejenigen Formen einen engern Bezirk, deren Coefficienten von den Variabeln unabhängig, oder, was dasselbe bedeuten soll, constant sind. Eine Form mit constanten Coefficienten geht offenbar durch jede Substitution, bei welcher die neuen Variabeln lineare Functionen der ursprünglichen Variabeln sind, wieder in eine Form mit constanten Coefficienten über. Hier kommt also die bisher entwickelte Theorie der Transformation der homogenen ganzen Functionen durch lineare Substitutionen unmittelbar zur Anwendung. Es erhebt sich nun die Frage nach den Bedingungen, welche darüber entscheiden, ob eine gegebene Form von n Differentialen, deren Coefficienten von den Variabeln abhängen, in eine Form mit constanten Coefficienten transformirt werden könne. Sobald der Grad der Form die Einheit übertrifft, werde ich hiebei voraussetzen, dass diejenige Determinante nicht identisch verschwinde, deren Elemente die zweiten partiellen Differentialquotienten der Form nach ihren Differentialen sind.

Bei den Formen des ersten Grades ist es klar, dass eine Form mit constanten Coefficienten gleich dem Differential einer linearen Function der Variabeln ist. Hier fällt also die aufgeworfene Frage mit der Frage nach den Bedingungen zusammen, unter welchen eine gegebene Form von n Differentialen gleich Einem Differential werden kann. Diese Bedingungen sind festgestellt und erlauben die folgende Fassung. Wenn der Ausdruck

$$a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \cdots + a_n dx_n$$

eine Form des ersten Grades bedeutet, deren Coefficienten a_1, a_2, ... a_n von den Variabeln x_1, x_2, ... x_n beliebig abhängen, so hat die nach den Differentialen dx_1, ... dx_n und den Variationen δx_1, ... δx_n bilineare Form

$$\sum_{a=1,b=1}^{a=n,b=n}\left(\frac{\partial a_a}{\partial x_b}-\frac{\partial a_b}{\partial x_a}\right)dx_a\delta x_b$$

die Eigenschaft, sobald die gegebene Form des ersten Grades und sie selbst durch eine Substitution neuer Variabeln transformirt wird, sich mit der gegebenen Form zusammen so ändern, dass ihre Beziehung zu derselben ungeändert bleibt. Diese bilineare Form ist also das Analogon einer Covariante. Damit die gegebene Form gleich einer Form mit constanten Coefficienten werden könne, ist es nothwendig und hinreichend, dass die aufgestellte, nach den Grössen dx_a und δx_b bilineare, nach den Verbindungen $dx_a\delta x_b-\delta x_a dx_b$ lineare Form identisch verschwinde.

Bei den Formen des zweiten Grades stimmt die angeregte Frage ihrem Inhalte nach mit dem erwähnten Problem der *Riemann*schen Abhandlung überein. Denn jede quadratische Form von n Differentialen und mit constanten Coefficienten kann durch eine lineare Substitution in eine Form verwandelt werden, welche das Aggregat von den Quadraten der Differentiale der neuen Variabeln ist, und zwar durch eine reelle Substitution, wofern es sich, wie bei *Riemann*, um wesentlich positive Formen handelt. Die gegenwärtige Arbeit verfolgt vornehmlich den Zweck, die gestellte Frage in Betreff der Formen zweiten Grades von n Differentialen, deren Determinante zufolge der getroffenen Einschränkung nicht identisch verschwindet, direct zu beantworten, und in diesem Sinne die Theorie des *Gauss*ischen Krümmungsmasses auszudehnen. Das gefundene Resultat entspricht genau dem Satze, in welchen so eben für die Formen des ersten Grades die Bedingungen der Integrabilität zusammengefasst sind. Es zeigt sich nämlich, dass zu jeder gegebenen Form der bezeichneten Art von den Differentialen dx_1, dx_2, ... dx_n eine zweite Form gehört, welche nach vier Systemen von Differentialen der Variabeln x_a, die mit dx_a, δx_b, du_g, δu_b bezeichnet werden mögen, quadrilinear, nach den Verbindungen $dx_a\delta x_b-\delta x_a dx_b$ und $du_g\delta u_b-\delta u_g du_b$ bilinear und symmetrisch ist, und deren Coefficienten mit Hülfe von einmaligen und zweimaligen partiellen Differentiationen der Coefficienten der gegebenen Form in Bezug auf die Variabeln derselben gebildet werden. Diese zweite Form hat die Eigenschaft, sobald die gegebene Form und sie selbst durch die Einführung neuer Variabeln transformirt wird, sich mit der gegebenen Form zusammen so zu verändern, dass ihre Beziehung zu derselben ungeändert bleibt. Das nothwendige und hinreichende Criterium dafür, dass die gegebene Form in eine Form mit constanten Coefficienten transformirt werden könne, besteht darin, dass die in

Rede stehende ihr zugehörige quadrilineare Form identisch verschwindet *). Bei den Formen von zwei Differentialen gehen das Criterium der quadrilinearen Form und das Criterium des Krümmungsmasses in einander über.

Der Gesichtspunkt, von welchem aus die Formen von n Differentialen hier betrachtet sind, lässt die bilineare Form, welche auf die Bedingungen der Integrabilität hinweist, und die quadrilineare Form, welche auf das Krümmungsmass deutet, als die ersten Glieder einer Kette erscheinen; es bleibt das Bedürfniss, diese Reihe directer Methoden zur Lösung der gestellten Aufgabe fortzusetzen. Diese Aufgabe wird dagegen im Folgenden durch eine indirecte Methode, bei der für jede Form ein entsprechendes Problem der Variationsrechnung als gelöst vorausgesetzt ist, allgemein erledigt werden.

1.

Eine Form von den n Differentialen dx_1, dx_2, ... dx_n, deren Grad der p^{te} ist, und deren Coefficienten von den n Variabeln x_1, x_2, ... x_n beliebig, jedoch so abhängen, dass dieselben nach den einzelnen Variabeln partiell differentiirt werden können, werde mit $f(dx)$ bezeichnet. Ein Buchstabe des kleinen deutschen Alphabets $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ... bedeute immer einen Zeiger, der die Reihe der Zahlen von 1 bis n durchlaufen soll. Die n Variabeln $x_\mathfrak{a}$ werden als unabhängige Functionen von n neuen Variabeln $y_\mathfrak{t}$ aufgefasst, so dass zwischen den Differentialen $dx_\mathfrak{a}$ und $dy_\mathfrak{t}$ die n Gleichungen

$$(1.) \qquad dx_\mathfrak{a} = c_{\mathfrak{a},1}dy_1 + c_{\mathfrak{a},2}dy_2 + \cdots + c_{\mathfrak{a},n}dy_n$$

bestehen. Hier ist

$$(2.) \qquad \frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial y_\mathfrak{t}} = c_{\mathfrak{a},\mathfrak{t}}$$

gesetzt, und die Functionaldeterminante

$$C = \Sigma \pm c_{1,1}c_{2,2}\ldots c_{n,n}$$

darf nicht verschwinden. Demnach ist die Darstellung der Grössen $dy_\mathfrak{t}$ durch die Grössen $dx_\mathfrak{a}$ völlig bestimmt; dieselbe liefere die n Gleichungen

$$(1^*.) \qquad dy_\mathfrak{t} = h_{\mathfrak{t},1}dx_1 + h_{\mathfrak{t},2}dx_2 + \cdots + h_{\mathfrak{t},n}dx_n.$$

Werden nun die Variabeln $y_\mathfrak{t}$ als Functionen der Variabeln $x_\mathfrak{a}$ betrachtet, so

---

*) Ob die Resultate der *Riemann*schen Abhandlung so verstanden werden können, dass sie mit diesem Theorem übereinstimmen, ist mir zweifelhaft. Ich trage aber Bedenken, die in jener Abhandlung angewendeten Methoden gegenwärtig einer kritischen Betrachtung zu unterziehen, weil die Abhandlung zum Zwecke eines mündlichen Vortrages niedergeschrieben ist, keine analytischen Ausführungen enthält und von dem Verfasser selbst zum Behufe der Publication nicht durchgearbeitet ist.

gelten die Gleichungen

$$(2^*.) \qquad \frac{\partial y_\mathfrak{t}}{\partial x_\mathfrak{a}} = h_{\mathfrak{t},\mathfrak{a}}.$$

Die Substitution der Variabeln $y_\mathfrak{t}$ in die Form $f(dx)$ möge die Gleichung

$$(3.) \qquad f(dx) = g(dy)$$

hervorbringen, in welcher $g(dy)$ eine Form des p^{ten} Grades von den n Differentialen $dy_\mathfrak{t}$ bedeutet, deren Coefficienten von den Variabeln $y_\mathfrak{t}$ abhängen. Es wird aber die Einschränkung festgehalten, dass für $p \gtreqless 2$ die Determinante

$$(3^a.) \qquad \Delta = \Sigma \pm \frac{\partial^2 f(dx)}{\partial dx_1 \partial dx_1} \cdots \frac{\partial^2 f(dx)}{\partial dx_n \partial dx_n}$$

nicht identisch verschwinde, und es erfüllt dann die Determinante

$$(3^{a*}.) \qquad E = \Sigma \pm \frac{\partial^2 g(dy)}{\partial dy_1 \partial dy_1} \cdots \frac{\partial^2 g(dy)}{\partial dy_n \partial dy_n}$$

in Folge der Gleichung

$$E = C^2 \Delta$$

dieselbe Bedingung.

Bei dem Studium der Form $f(dx)$ schien es mir vor Allem wünschenswerth, solche Functionen kennen zu lernen, welche, wenn sie mit der Form $f(dx)$ gemeinsam transformirt werden, sich mit derselben zusammen so umwandeln, dass die gegenseitige Beziehung unverändert bleibt. Eine Quelle zur Herleituug solcher Functionen glaubte ich in denjenigen Sätzen der Variationsrechnung zu finden, welche *Lagrange* in der mécanique analytique, seconde partie, section IV, zur Transformation der Differentialgleichungen der Mechanik gebraucht hat. Es sei δ die Charakteristik der Variation, d der vollständigen Differentiation, ∂ der partiellen Differentiation, und es werde bei der letztern die Form $f(dx)$ als abhängig von $2n$ independenten Variabeln, nämlich den n Grössen $x_\mathfrak{a}$ und den n Grössen $dx_\mathfrak{a}$, ebenso die Form $g(dy)$ als abhängig von den n Grössen $y_\mathfrak{t}$ und den n Grössen $dy_\mathfrak{t}$ betrachtet. Dann sind die Gleichungen von *Lagrange* die folgenden

$$(4.) \qquad \begin{cases} \delta f(dx) = \sum\limits_\mathfrak{a} \frac{\partial f(dx)}{\partial x_\mathfrak{a}} \delta x_\mathfrak{a} + \sum\limits_\mathfrak{a} \frac{\partial f(dx)}{\partial dx_\mathfrak{a}} \delta dx_\mathfrak{a} \\ \qquad = \sum\limits_\mathfrak{a} \left(\frac{\partial f(dx)}{\partial x_\mathfrak{a}} - d \frac{\partial f(dx)}{\partial dx_\mathfrak{a}} \right) \delta x_\mathfrak{a} + d \sum\limits_\mathfrak{a} \frac{\partial f(dx)}{\partial dx_\mathfrak{a}} \delta x_\mathfrak{a}, \end{cases}$$

$$(4^*.) \qquad \begin{cases} \delta g(dy) = \sum\limits_\mathfrak{t} \frac{\partial g(dy)}{\partial y_\mathfrak{t}} \delta y_\mathfrak{t} + \sum\limits_\mathfrak{t} \frac{\partial g(dy)}{\partial dy_\mathfrak{t}} \delta dy_\mathfrak{t} \\ \qquad = \sum\limits_\mathfrak{t} \left(\frac{\partial g(dy)}{\partial y_\mathfrak{t}} - d \frac{\partial g(dy)}{\partial dy_\mathfrak{t}} \right) \delta y_\mathfrak{t} + d \sum\limits_\mathfrak{t} \frac{\partial g(dy)}{\partial dy_\mathfrak{t}} \delta y_\mathfrak{t}; \end{cases}$$

ferner

$$(5.) \qquad \delta f(dx) = \delta g(dy),$$

$$(6.) \qquad \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial f(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{a}}} \delta x_{\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{t}} \frac{\partial g(dy)}{\partial dy_{\mathfrak{t}}} \delta y_{\mathfrak{t}},$$

und hieraus folgend

$$(7.) \qquad \sum_{\mathfrak{a}} \Big(d \frac{\partial f(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{a}}} - \frac{\partial f(dx)}{\partial x_{\mathfrak{a}}} \Big) \delta x_{\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{t}} \Big(d \frac{\partial g(dy)}{\partial dy_{\mathfrak{t}}} - \frac{\partial g(dy)}{\partial y_{\mathfrak{t}}} \Big) \delta y_{\mathfrak{t}}.$$

Die Variationen $\delta x_{\mathfrak{a}}$ und $\delta y_{\mathfrak{t}}$ sind durch diejenigen Gleichungen verbunden, die aus (1.) oder aus (1*.) entstehen, indem man die Characteristik d durch die Characteristik δ ersetzt.

Um in der Gleichung (7.) für den Fall, dass die Gradzahl p die Einheit übertrifft, diejenigen Glieder, welche die zweiten Differentiale $d^2 x_{\mathfrak{a}}$ und $d^2 y_{\mathfrak{t}}$ enthalten, von den übrigen zu trennen, bilde ich die Gleichungen

$$(8.) \qquad \begin{cases} d \dfrac{\partial f(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{a}}} = \sum\limits_{\mathfrak{b}} \dfrac{\partial^2 f(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{a}} \partial dx_{\mathfrak{b}}} d^2 x_{\mathfrak{b}} + \sum\limits_{\mathfrak{c}} \dfrac{\partial^2 f(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{a}} \partial x_{\mathfrak{c}}} dx_{\mathfrak{c}}, \\ d \dfrac{\partial g(dy)}{\partial dy_{\mathfrak{t}}} = \sum\limits_{\mathfrak{l}} \dfrac{\partial^2 g(dy)}{\partial dy_{\mathfrak{t}} \partial dy_{\mathfrak{l}}} d^2 y_{\mathfrak{l}} + \sum\limits_{\mathfrak{m}} \dfrac{\partial^2 g(dy)}{\partial dy_{\mathfrak{t}} \partial y_{\mathfrak{m}}} dy_{\mathfrak{m}} \end{cases}$$

und setze

$$(9.) \qquad \begin{cases} f_{\mathfrak{a}}(dx) = \sum\limits_{\mathfrak{c}} \dfrac{\partial^2 f(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{a}} \partial x_{\mathfrak{c}}} dx_{\mathfrak{c}} - \dfrac{\partial f(dx)}{\partial x_{\mathfrak{a}}}, \\ g_{\mathfrak{t}}(dy) = \sum\limits_{\mathfrak{m}} \dfrac{\partial^2 g(dy)}{\partial dy_{\mathfrak{t}} \partial y_{\mathfrak{m}}} dy_{\mathfrak{m}} - \dfrac{\partial g(dy)}{\partial y_{\mathfrak{t}}}. \end{cases}$$

Dann entsteht aus (7.) die Gleichung

$$(10.) \qquad \sum_{\mathfrak{a}} \Big(\sum_{\mathfrak{b}} \frac{\partial^2 f(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{a}} \partial dx_{\mathfrak{b}}} d^2 x_{\mathfrak{b}} + f_{\mathfrak{a}}(dx) \Big) \delta x_{\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{t}} \Big(\sum_{\mathfrak{l}} \frac{\partial^2 g(dy)}{\partial dy_{\mathfrak{t}} \partial dy_{\mathfrak{l}}} d^2 y_{\mathfrak{l}} + g_{\mathfrak{t}}(dy) \Big) \delta y_{\mathfrak{t}}.$$

Es mag schon an dieser Stelle eine Eigenschaft der durch (9.) definirten Formen p^{ten} Grades $f_{\mathfrak{a}}(dx)$ erwähnt werden, die später mehrfach in Gebrauch kommt. Da die partielle Differentiation nach $dx_{\mathfrak{b}}$ die Gleichung

$$\frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{b}}} = \sum_{\mathfrak{c}} \frac{\partial^3 f(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{a}} \partial dx_{\mathfrak{b}} \partial x_{\mathfrak{c}}} + \frac{\partial^2 f(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{a}} \partial x_{\mathfrak{b}}} - \frac{\partial^2 f(dx)}{\partial x_{\mathfrak{a}} \partial dx_{\mathfrak{b}}}$$

liefert, so gilt vermöge der Vertauschung der Zeiger $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die Relation

$$(11.) \qquad \frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{b}}} + \frac{\partial f_{\mathfrak{b}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{a}}} = 2 \sum_{\mathfrak{c}} \frac{\partial^3 f(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{a}} \partial dx_{\mathfrak{b}} \partial x_{\mathfrak{c}}} dx_{\mathfrak{c}}.$$

In dem Falle, dass die Gradzahl p gleich der Einheit ist, gehen die Gleichungen (6.) und (7.) beziehlich in die beiden folgenden über:

$$(6^a.) \qquad f(\delta x) = g(\delta y),$$

$$(7^a.) \qquad \delta f(dx) - df(\delta x) = \delta g(dy) - dg(\delta y).$$

Setzt man hier

$$(12.)\qquad \begin{cases} f(dx) = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \cdots + a_n dx_n, \\ g(dy) = e_1 dy_1 + e_2 dy_2 + \cdots + e_n dy_n, \end{cases}$$

so nimmt (7^a.) diese Gestalt an:

$$(7^b.)\qquad \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \left(\frac{\partial a_\mathfrak{a}}{\partial x_\mathfrak{b}} - \frac{\partial a_\mathfrak{b}}{\partial x_\mathfrak{a}}\right) dx_\mathfrak{a}\, \delta x_\mathfrak{b} = \sum_{\mathfrak{i},\mathfrak{l}} \left(\frac{\partial e_\mathfrak{i}}{\partial y_\mathfrak{l}} - \frac{\partial e_\mathfrak{l}}{\partial y_\mathfrak{i}}\right) dy_\mathfrak{i}\, \delta y_\mathfrak{l}.$$

Dieselbe spricht die in der Einleitung angeführte Eigenschaft der bilinearen Form

$$(13.)\qquad \delta f(dx) - df(\delta x) = \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \left(\frac{\partial a_\mathfrak{a}}{\partial x_\mathfrak{b}} - \frac{\partial a_\mathfrak{b}}{\partial x_\mathfrak{a}}\right) dx_\mathfrak{a}\, \delta x_\mathfrak{b}$$

aus, bei einer Substitution neuer Variabeln in unveränderter Beziehung zu der Form $f(dx)$ zu bleiben. Dass das identische Verschwinden von (13.) die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Integrabilität der Form $f(dx)$ enthält, ist bekannt.

In dem Falle, dass die Zahl $p = 2$ ist, gewährt die Darstellung des Krümmungsmasses, welche *Gauss* in art. 11. der angeführten Abhandlung entwickelt hat, einen festen Anhalt für die Aufsuchung von Functionen von der gewünschten Beschaffenheit. Es sollen daher die Elemente dieser Darstellung und die Elemente der Gleichung (10.) sorgfältig mit einander verglichen werden. Bei der Voraussetzung $p = 2$ haben die Formen $f(dx)$ und $g(dy)$ die folgende Gestalt

$$(14.)\qquad \begin{cases} f(dx) = \frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\, dx_\mathfrak{a}\, dx_\mathfrak{b}, \\ g(dy) = \frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{i},\mathfrak{l}} e_{\mathfrak{i},\mathfrak{l}}\, dy_\mathfrak{i}\, dy_\mathfrak{l}; \end{cases}$$

hier ist

$$a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} = a_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}, \quad e_{\mathfrak{i},\mathfrak{l}} = e_{\mathfrak{l},\mathfrak{i}},$$

und es darf die Determinante

$$(15.)\qquad \Delta = \Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots a_{n,n}$$

nicht identisch verschwinden. Für die Determinante

$$(15^*.)\qquad E = \Sigma \pm e_{1,1} e_{2,2} \ldots e_{n,n}$$

gilt dann, nach einer frühern Bemerkung, dasselbe. Es sei ferner

$$(16.)\qquad \begin{cases} f_\mathfrak{a}(dx) = \frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{g},\mathfrak{b}} f_{\mathfrak{a},\mathfrak{g},\mathfrak{b}}\, dx_\mathfrak{g}\, dx_\mathfrak{b}, \\ g_\mathfrak{i}(dy) = \frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}} g_{\mathfrak{i},\mathfrak{p},\mathfrak{q}}\, dy_\mathfrak{p}\, dy_\mathfrak{q}, \end{cases}$$

wo die Ausdrücke $f_{\mathfrak{a},\mathfrak{g},\mathfrak{b}}$ und $g_{\mathfrak{i},\mathfrak{p},\mathfrak{q}}$ wegen (9.) diese Bedeutung haben:

$$(17.)\quad \begin{cases} f_{\mathfrak{a},\mathfrak{g},\mathfrak{h}} = \dfrac{\partial a_{\mathfrak{a},\mathfrak{g}}}{\partial x_{\mathfrak{h}}} + \dfrac{\partial a_{\mathfrak{a},\mathfrak{h}}}{\partial x_{\mathfrak{g}}} - \dfrac{\partial a_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}}{\partial x_{\mathfrak{a}}}, \\ g_{\mathfrak{f},\mathfrak{p},\mathfrak{q}} = \dfrac{\partial e_{\mathfrak{f},\mathfrak{p}}}{\partial y_{\mathfrak{q}}} + \dfrac{\partial e_{\mathfrak{f},\mathfrak{q}}}{\partial y_{\mathfrak{p}}} - \dfrac{\partial e_{\mathfrak{p},\mathfrak{q}}}{\partial y_{\mathfrak{f}}}, \end{cases}$$

und folglich die Gleichungen

$$f_{\mathfrak{a},\mathfrak{g},\mathfrak{h}} = f_{\mathfrak{a},\mathfrak{h},\mathfrak{g}}, \qquad g_{\mathfrak{f},\mathfrak{p},\mathfrak{q}} = g_{\mathfrak{f},\mathfrak{q},\mathfrak{p}}$$

bestehen.

Die *Gauss*ische Untersuchung bezieht sich auf krumme Oberflächen, bei denen die rechtwinkligen Coordinaten eines jeden Punktes durch die unabhängigen Variabeln p und q ausgedrückt sind; das Quadrat des Linearelements ds ist gleich dem Ausdruck

$$E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2$$

gesetzt, das Krümmungsmass wird k genannt. Durch die Substitutionen

$$p = x_1, \qquad q = x_2,$$
$$E = a_{1,1}, \qquad F = a_{1,2}, \qquad G = a_{2,2}$$

gehen diese Bezeichnungen in die Bezeichnungen dieses Aufsatzes für $p = 2$, $n = 2$ über, und es wird

$$ds^2 = 2f(dx).$$

Man erhält ferner für diejenigen Verbindungen, die *Gauss* Δ, m, m', m'', n, n', n'' genannt hat, die Gleichungen

$$EG - FF = \Delta,$$

$$\frac{\partial E}{\partial p} = 2m = f_{1,1,1}, \quad \frac{\partial E}{\partial q} = 2m' = f_{1,1,2} = f_{1,2,1}, \quad 2\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\partial G}{\partial p} = 2m'' = f_{1,2,2},$$

$$2\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial E}{\partial q} = 2n = f_{2,1,1}, \quad \frac{\partial G}{\partial p} = 2n' = f_{2,1,2} = f_{2,2,1}, \quad \frac{\partial G}{\partial q} = 2n'' = f_{2,2,2}.$$

Aus diesen Verbindungen wird der in Rede stehende Ausdruck des Krümmungsmasses vermittelst der folgenden Formel deducirt:

$$k = \frac{\left(\dfrac{\partial m''}{\partial p} - \dfrac{\partial m'}{\partial q}\right)}{\Delta} + \frac{E(n'n' - nn'') + F(nm'' - 2m'n' + mn'') + G(m'm' - mm'')}{\Delta\Delta}.$$

Derselbe lautet daher in den andern Bezeichnungen so:

$$k = \frac{1}{2\Delta}\left(\frac{\partial f_{1,2,2}}{\partial x_1} - \frac{\partial f_{1,2,1}}{\partial x_2}\right)$$
$$+ \frac{1}{4\Delta\Delta}(a_{11}(f_{2,1,2}^2 - f_{2,1,1}f_{2,2,2}) + a_{1,2}(f_{2,1,2}f_{1,2,2} - 2f_{1,1,2}f_{2,1,2} + f_{1,1,1}f_{2,2,2}) + a_{2,2}(f_{1,1,2}^2 - f_{1,1,1}f_{1,2,2})).$$

Die sämmtlichen Bestandtheile dieser Darstellung findet man auf der linken

Seite der Gleichung (10.) unter der Voraussetzung $p=2$, $n=2$. Wird aus den entsprechenden Bestandtheilen der rechten Seite dieser Gleichung ein Ausdruck m gebildet, so stellt derselbe das Krümmungsmass für ein Linearelement dar, dessen Quadrat in den eingeführten Bezeichnungen gleich $2g(dy)$ ist, wofern y_1, y_2 die beiden unabhängigen Coordinaten sind. Weil aber die geometrische Bedeutung des Krümmungsmasses von der Wahl der unabhängigen Coordinaten nicht dependirt, so muss die Gleichung

$$k = m$$

gelten. Das Krümmungsmass k hat also zu der Form $f(dx)$ eine Beziehung, welche bei der Substitution neuer Variabeln ungeändert bleibt.

2.

Wollte man die Gleichung (10.) bei der Voraussetzung $p=2$, $n=2$ benutzen, um die Eigenschaft des Krümmungsmasses, die in der Gleichung $k=m$ ausgesprochen ist, direct zu beweisen, so würde es nahe liegen, dass man mit einer Elimination der Differentiale der zweiten Ordnung d^2x_a und d^2y_t den Anfang machte. Ich werde nun für die allgemeine Voraussetzung $p \gtreqless 2$ eine solche Elimination ausführen, durch die alsdann die Grössen $c_{a,t}$ und die Differentiale $dc_{a,t}$ derselben in die Gleichung eintreten. Aus der Gleichung (1.) folgt durch Differentiation

$$(18.) \qquad d^2x_a = \sum_r c_{a,r} d^2y_r + \sum_r dc_{a,r} dy_r,$$

und durch Verwandlung von d in δ

$$\delta x_a = \sum_q c_{a,q} \delta y_q.$$

Man hat ferner in Folge von (3.) die Gleichung

$$(19.) \qquad \begin{cases} \sum_{a,b} \frac{\partial^2 f(dx)}{\partial dx_a \partial dx_b} \delta x_a \sum_r c_{b,r} d^2y_r = \sum_{a,b} \frac{\partial^2 f(dx)}{\partial dx_a \partial dx_b} \sum_q c_{a,q} \delta y_q \sum_r c_{b,r} d^2y_r \\ \qquad\qquad = \sum_{t,l} \frac{\partial^2 g(dy)}{\partial dy_t \partial dy_l} \delta y_t d^2y_l. \end{cases}$$

Wenn man daher in (10.) den Werth d^2x_b gemäss der Gleichung (18.) ausdrückt und (19.) berücksichtigt, so ergiebt sich die neue Gleichung

$$(20.) \qquad \sum_{a,b} \frac{\partial^2 f(dx)}{\partial dx_a \partial dx_b} \delta x_a \sum_l dc_{b,l} dy_l + \sum_a f_a(dx) \delta x_a = \sum_t g_t(dy) \delta y_t,$$

welche von den Grössen d^2x_b, d^2y_l befreit ist.

Es wird nun darauf ankommen, aus der Gleichung (20.) Folgerungen zu ziehen, bei denen die verloren gegangene Symmetrie zwischen den Functionen

$f(dx)$ und $g(dy)$ wieder eintritt, und bei denen eine Elimination der Differentiale $dc_{\mathfrak{b},\mathfrak{l}}$ zulässig ist.* Man kann die erstere Absicht durch ein einfaches Mittel erreichen, sobald die Zahl $p=2$ ist, und sich dadurch dem Zwecke dieser Untersuchung nähern. Ich führe deshalb die Voraussetzung $p=2$ in die Gleichung (20.) ein, und erhalte nach (14.) die Gleichung

$$(21.)\qquad \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\,\delta x_{\mathfrak{a}} \sum_{\mathfrak{l}} dc_{\mathfrak{b},\mathfrak{l}}\,dy_{\mathfrak{l}} + \sum_{\mathfrak{a}} f_{\mathfrak{a}}(dx)\,\delta x_{\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{t}} g_{\mathfrak{t}}(dy)\,\delta y_{\mathfrak{t}}.$$

Dann reicht es hin, von den beiden Seiten derselben den partiellen Differentialquotienten nach $dy_{\mathfrak{l}}$ und nach $\delta x_{\mathfrak{a}}$ zu nehmen, wo $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{a}$ bestimmte Werthe haben. In Folge der Definitionsgleichung (2.) hat man die Relation

$$\sum_{\mathfrak{l}} dc_{\mathfrak{b},\mathfrak{l}}\,dy_{\mathfrak{l}} = \sum_{\mathfrak{t},\mathfrak{l}} \frac{\partial^2 x_{\mathfrak{b}}}{\partial y_{\mathfrak{t}}\partial y_{\mathfrak{l}}}\,dy_{\mathfrak{t}}\,dy_{\mathfrak{l}},$$

und deshalb

$$\frac{\partial \sum_{\mathfrak{l}} dc_{\mathfrak{b},\mathfrak{l}}\,dy_{\mathfrak{l}}}{\partial dy_{\mathfrak{q}}} = 2dc_{\mathfrak{b},\mathfrak{q}}.$$

Ferner ist

$$\frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(dx)}{\partial dy_{\mathfrak{q}}} = \sum_{\mathfrak{b}} \frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{b}}}\,c_{\mathfrak{b},\mathfrak{q}}.$$

Wenn man also die beiden Seiten der Gleichung (21.) nach einem bestimmten $dy_{\mathfrak{l}}$ partiell differentiirt, so kommt

$$(22.)\qquad 2\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\,dc_{\mathfrak{b},\mathfrak{l}}\,\delta x_{\mathfrak{a}} + \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{b}}}\,c_{\mathfrak{b},\mathfrak{l}}\,\delta x_{\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{t}} \frac{\partial g_{\mathfrak{t}}(dy)}{\partial dy_{\mathfrak{l}}}\,\delta y_{\mathfrak{t}},$$

und wenn man hierauf die partielle Differentiation nach einem bestimmten $\delta x_{\mathfrak{a}}$ ausführt, so ergiebt sich wegen (1*.) die Relation

$$(23.)\qquad 2\sum_{\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\,dc_{\mathfrak{b},\mathfrak{l}} + \sum_{\mathfrak{b}} \frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{b}}}\,c_{\mathfrak{b},\mathfrak{l}} = \sum_{\mathfrak{t}} \frac{\partial g_{\mathfrak{t}}(dy)}{\partial dy_{\mathfrak{l}}}\,h_{\mathfrak{t},\mathfrak{a}}.$$

Hier greift nun die früher abgeleitete Gleichung (11.) wirksam ein. Dieselbe erhält durch die Voraussetzung $p=2$ die Gestalt

$$(11^{a}.)\qquad \frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{b}}} + \frac{\partial f_{\mathfrak{b}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{a}}} = 2\sum_{\mathfrak{c}} \frac{\partial a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}}{\partial x_{\mathfrak{c}}}\,dx_{\mathfrak{c}},$$

oder, zusammengefasst,

$$(11^{b}.)\qquad \frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{b}}} + \frac{\partial f_{\mathfrak{b}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{a}}} = 2da_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}.$$

Multiplicirt man dieselbe mit $c_{\mathfrak{b},\mathfrak{l}}$ und subtrahirt sie danach von (23.), so entsteht das Resultat

$$(24.)\qquad 2d\sum_{\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\,c_{\mathfrak{b},\mathfrak{l}} = \sum_{\mathfrak{b}} \frac{\partial f_{\mathfrak{b}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{a}}}\,c_{\mathfrak{b},\mathfrak{l}} + \sum_{\mathfrak{t}} \frac{\partial g_{\mathfrak{t}}(dy)}{\partial dy_{\mathfrak{l}}}\,h_{\mathfrak{t},\mathfrak{a}}.$$

Hier befindet sich auf der rechten Seite das Aggregat von zwei Summen,

von denen die eine zu der Form $f(dx)$ und den Variabeln x_a die gleiche Beziehung hat, wie die andere zu der Form $g(dy)$ und den Variabeln y_t. In Betreff der linken Seite ist zu bemerken, dass nach einer aus der Theorie der quadratischen Formen bekannten Gleichung

$$\sum_b a_{a,b}\, c_{b,l} = \sum_t e_{l,t}\, h_{t,a}$$

sein muss. Man erhält demnach die mit (23.) und (24.) correspondirenden Gleichungen

$$(23^*.) \qquad 2\sum_t e_{l,t}\, dh_{t,a} + \sum_t \frac{\partial g_l(dy)}{\partial dy_t} h_{t,a} = \sum_b \frac{\partial f_b(dx)}{\partial dx_a} c_{b,l},$$

$$(24^*.) \qquad 2d\sum_t e_{l,t}\, h_{t,a} = \sum_b \frac{\partial f_b(dx)}{\partial dx_a} c_{b,l} + \sum_t \frac{\partial g_l(dy)}{\partial dy_l} h_{t,a}.$$

Die Elimination der Differentiale $dc_{b,l}$ aus der Gleichung (24.) gelingt nunmehr um des Factums willen, dass die linke Seite derselben ein exactes Differential ist. Die rechte Seite derselben muss aus diesem Grunde die Bedingungen der Integrabilität erfüllen, oder, in andern Worten, wenn man nach dem Schema (13.) zu der Form ersten Grades $\sum_b \frac{\partial f_b(dx)}{\partial dx_a} c_{b,l}$ von den Differentialen dx_β, und zu der Form ersten Grades $\sum_t \frac{\partial g_t(dy)}{\partial dy_l} h_{t,a}$ von den Differentialen dy_ρ die entsprechenden bilinearen Formen bildet, und dieselben addirt, so muss ihr Aggregat identisch verschwinden. Dieses Princip liefert die Gleichung

$$(25.) \quad \begin{cases} \sum_b \left(\delta \frac{\partial f_b(dx)}{\partial dx_a} - d\frac{\partial f_b(\delta x)}{\partial \delta x_a}\right) c_{b,l} + \sum_b \left(\frac{\partial f_b(dx)}{\partial dx_a}\delta c_{b,l} - \frac{\partial f_b(\delta x)}{\partial \delta x_a} dc_{b,l}\right) \\ + \sum_t \left(\delta \frac{\partial g_t(dy)}{\partial dy_l} - d\frac{\partial g_t(\delta y)}{\partial \delta y_l}\right) h_{t,a} + \sum_t \left(\frac{\partial g_t(dy)}{\partial dy_l}\delta h_{t,a} - \frac{\partial g_t(\delta y)}{\partial \delta y_l} dh_{t,a}\right) = 0. \end{cases}$$

Weil aber durch die Gleichungen (23.) und (23*.) unter der bestehenden Annahme, dass die Determinanten Δ und E nicht identisch verschwinden, die Grössen $dc_{b,l}$, $\delta c_{b,l}$, $dh_{t,a}$, $\delta h_{t,a}$ als lineare Verbindungen der Grössen $c_{g,b}$ und $h_{p,q}$ dargestellt werden können, so geht aus der Gleichung (25.) ein Resultat hervor, welches die in Rede stehenden Differentiale und Variationen nicht mehr enthält.

3.

Für die adjungirten Elemente der Formen $f(dx)$ und $g(dy)$ mögen diese Bezeichnungen gebraucht werden

$$(26.) \qquad A_{a,b} = \frac{\partial \Delta}{\partial a_{a,b}}, \qquad E_{t,l} = \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial e_{t,l}};$$

dann erhält man die Darstellungen

$$(27.)\quad \begin{cases} 2dc_{\mathfrak{b},\mathfrak{l}} = \sum\limits_{\mathfrak{c}} \frac{A_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{\Delta}\Big(-\sum\limits_{\mathfrak{d}} \frac{\partial f_{\mathfrak{c}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{d}}} c_{\mathfrak{d},\mathfrak{l}} + \sum\limits_{\mathfrak{k}} \frac{\partial g_{\mathfrak{k}}(dy)}{\partial dy_{\mathfrak{l}}} h_{\mathfrak{k},\mathfrak{c}}\Big), \\ 2\delta c_{\mathfrak{b},\mathfrak{l}} = \sum\limits_{\mathfrak{c}} \frac{A_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{\Delta}\Big(-\sum\limits_{\mathfrak{d}} \frac{\partial f_{\mathfrak{c}}(\delta x)}{\partial \delta x_{\mathfrak{d}}} c_{\mathfrak{d},\mathfrak{l}} + \sum\limits_{\mathfrak{k}} \frac{\partial g_{\mathfrak{k}}(\delta y)}{\partial \delta y_{\mathfrak{l}}} h_{\mathfrak{k},\mathfrak{c}}\Big), \\ 2dh_{\mathfrak{k},\mathfrak{a}} = \sum\limits_{\mathfrak{m}} \frac{E_{\mathfrak{m},\mathfrak{k}}}{\mathrm{E}}\Big(-\sum\limits_{\mathfrak{n}} \frac{\partial g_{\mathfrak{m}}(dy)}{\partial dy_{\mathfrak{n}}} h_{\mathfrak{n},\mathfrak{a}} + \sum\limits_{\mathfrak{b}} \frac{\partial f_{\mathfrak{b}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{a}}} c_{\mathfrak{b},\mathfrak{m}}\Big), \\ 2\delta h_{\mathfrak{k},\mathfrak{a}} = \sum\limits_{\mathfrak{m}} \frac{E_{\mathfrak{m},\mathfrak{k}}}{\mathrm{E}}\Big(-\sum\limits_{\mathfrak{n}} \frac{\partial g_{\mathfrak{m}}(\delta y)}{\partial \delta y_{\mathfrak{n}}} h_{\mathfrak{n},\mathfrak{a}} + \sum\limits_{\mathfrak{b}} \frac{\partial f_{\mathfrak{b}}(\delta x)}{\partial \delta x_{\mathfrak{a}}} c_{\mathfrak{b},\mathfrak{m}}\Big). \end{cases}$$

Wenn man diese Gleichungen der Reihe nach mit den Factoren

$$-\frac{\partial f_{\mathfrak{b}}(\delta x)}{\partial \delta x_{\mathfrak{a}}},\quad \frac{\partial f_{\mathfrak{b}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{a}}},\quad -\frac{\partial g_{\mathfrak{k}}(\delta y)}{\partial dy_{\mathfrak{l}}},\quad \frac{\partial g_{\mathfrak{k}}(dy)}{\partial dy_{\mathfrak{l}}}$$

multiplicirt, hierauf addirt und das Resultat in der durch (25.) vorgeschriebenen Weise summirt, so liefern die ersten Terme aus den Klammern der rechten Seiten von (27.) das Aggregat

$$(28.)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\sum\limits_{\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{b}} \frac{A_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{\Delta}\Big(\frac{\partial f_{\mathfrak{c}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{d}}}\frac{\partial f_{\mathfrak{b}}(\delta x)}{\partial \delta x_{\mathfrak{a}}} - \frac{\partial f_{\mathfrak{c}}(\delta x)}{\partial \delta x_{\mathfrak{d}}}\frac{\partial f_{\mathfrak{b}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{a}}}\Big) c_{\mathfrak{b},\mathfrak{l}} \\ + \frac{1}{2}\sum\limits_{\mathfrak{k},\mathfrak{m},\mathfrak{n}} \frac{E_{\mathfrak{m},\mathfrak{k}}}{\mathrm{E}}\Big(\frac{\partial g_{\mathfrak{m}}(dy)}{\partial dy_{\mathfrak{n}}}\frac{\partial g_{\mathfrak{k}}(\delta y)}{\partial \delta y_{\mathfrak{l}}} - \frac{\partial g_{\mathfrak{m}}(\delta y)}{\partial \delta y_{\mathfrak{n}}}\frac{\partial g_{\mathfrak{k}}(dy)}{\partial dy_{\mathfrak{l}}}\Big) h_{\mathfrak{n},\mathfrak{a}}. \end{cases}$$

Ferner liefern die zweiten Terme aus den Klammern der rechten Seiten von (27.) das Aggregat

$$(29.)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\sum\limits_{\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{k}} \frac{A_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{\Delta}\Big(-\frac{\partial f_{\mathfrak{b}}(\delta x)}{\partial \delta x_{\mathfrak{a}}}\frac{\partial g_{\mathfrak{k}}(dy)}{\partial dy_{\mathfrak{l}}} + \frac{\partial f_{\mathfrak{b}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{a}}}\frac{\partial g_{\mathfrak{k}}(\delta y)}{\partial \delta y_{\mathfrak{l}}}\Big) h_{\mathfrak{k},\mathfrak{c}} \\ + \frac{1}{2}\sum\limits_{\mathfrak{k},\mathfrak{m},\mathfrak{b}} \frac{E_{\mathfrak{m},\mathfrak{k}}}{\mathrm{E}}\Big(-\frac{\partial f_{\mathfrak{b}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{a}}}\frac{\partial g_{\mathfrak{k}}(\delta y)}{\partial \delta y_{\mathfrak{l}}} + \frac{\partial f_{\mathfrak{b}}(\delta x)}{\partial \delta x_{\mathfrak{a}}}\frac{\partial g_{\mathfrak{k}}(dy)}{\partial dy_{\mathfrak{l}}}\Big) c_{\mathfrak{b},\mathfrak{m}}. \end{cases}$$

Nun zeigt sich die für die Einfachheit des Resultates günstige Erscheinung, dass wegen der Gleichung

$$\sum_{\mathfrak{c}} \frac{A_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{\Delta} h_{\mathfrak{k},\mathfrak{c}} = \sum_{\mathfrak{m}} \frac{E_{\mathfrak{m},\mathfrak{k}}}{\mathrm{E}} c_{\mathfrak{b},\mathfrak{m}},$$

welche eine Eigenschaft der zu den Formen $f(dx)$ und $g(dy)$ beziehungsweise adjungirten Formen ausdrückt, das ganze Aggregat (29.) den Werth Null hat. In dem Aggregat (28.) mögen die Summationszeiger $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{n}$ mit einander vertauscht werden, alsdann liefert die Einführung desselben in (25.) die gesuchte Gleichung

$$(30.)\quad \begin{cases} \sum\limits_{\mathfrak{b}}\Big(\delta\frac{\partial f_{\mathfrak{b}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{a}}} - d\frac{\partial f_{\mathfrak{b}}(\delta x)}{\partial \delta x_{\mathfrak{a}}} + \frac{1}{2}\sum\limits_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}} \frac{A_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}}}{\Delta}\Big(\frac{\partial f_{\mathfrak{c}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{b}}}\frac{\partial f_{\mathfrak{b}}(\delta x)}{\partial \delta x_{\mathfrak{a}}} - \frac{\partial f_{\mathfrak{c}}(\delta x)}{\partial \delta x_{\mathfrak{b}}}\frac{\partial f_{\mathfrak{b}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{a}}}\Big)\Big) c_{\mathfrak{b},\mathfrak{l}} \\ + \sum\limits_{\mathfrak{k}}\Big(\delta\frac{\partial g_{\mathfrak{k}}(dy)}{\partial dy_{\mathfrak{l}}} - d\frac{\partial g_{\mathfrak{k}}(\delta y)}{\partial \delta y_{\mathfrak{l}}} + \frac{1}{2}\sum\limits_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} \frac{E_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}}{\mathrm{E}}\Big(\frac{\partial g_{\mathfrak{m}}(dy)}{\partial dy_{\mathfrak{k}}}\frac{\partial g_{\mathfrak{n}}(\delta y)}{\partial \delta y_{\mathfrak{l}}} - \frac{\partial g_{\mathfrak{m}}(\delta y)}{\partial \delta y_{\mathfrak{k}}}\frac{\partial g_{\mathfrak{n}}(dy)}{\partial dy_{\mathfrak{l}}}\Big)\Big) h_{\mathfrak{k},\mathfrak{a}} \\ = 0. \end{cases}$$

Hier kann man bemerken, dass der Factor der Grösse $c_{\mathfrak{b}\mathfrak{l}}$ die Eigenschaft hat, in den entgegengesetzten Werth überzugehen, wenn man in demselben die Zeiger $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ mit einander vertauscht. Aus der Gleichung (11′.) folgt nämlich die Relation

$$\delta\Big(\frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{b}}}+\frac{\partial f_{\mathfrak{b}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{a}}}\Big)=d\Big(\frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(\delta x)}{\partial \delta x_{\mathfrak{b}}}+\frac{\partial f_{\mathfrak{b}}(\delta x)}{\partial \delta x_{\mathfrak{a}}}\Big),$$

mittelst deren das Behauptete sogleich einleuchtet. Die in der Gleichung (30.) enthaltenen Relationen lassen sich dadurch vereinigen, dass man zwei neue Systeme von Differentialen der Variabeln $x_{\mathfrak{a}}$ einführt, $du_{\mathfrak{a}}$ und $\delta u_{\mathfrak{a}}$, welchen beziehungsweise die Differentiale $dv_{\mathfrak{l}}$ und $\delta v_{\mathfrak{l}}$ der Variabeln $y_{\mathfrak{l}}$ entsprechen mögen. Zwischen denselben hat man in Folge von (1.) und (1*.) die Gleichungen

$$(31.)\qquad \begin{cases} du_{\mathfrak{a}} = c_{\mathfrak{a},1}\,dv_1+c_{\mathfrak{a},2}\,dv_2+\cdots+c_{\mathfrak{a},n}\,dv_n, \\ \delta u_{\mathfrak{a}} = c_{\mathfrak{a},1}\,\delta v_1+c_{\mathfrak{a},2}\,\delta v_2+\cdots+c_{\mathfrak{a},n}\,\delta v_n, \\ dv_{\mathfrak{l}} = h_{\mathfrak{l},1}\,du_1+h_{\mathfrak{l},2}\,du_2+\cdots+h_{\mathfrak{l},n}\,du_n, \\ \delta v_{\mathfrak{l}} = h_{\mathfrak{l},1}\,\delta u_1+h_{\mathfrak{l},2}\,\delta u_2+\cdots+h_{\mathfrak{l},n}\,\delta u_n. \end{cases}$$

Es werde nun die linke Seite von (30.) mit dem Factor $du_{\mathfrak{a}}\delta v_{\mathfrak{l}}$ multiplicirt, und die Summation nach den Zeigern $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{l}$ vollzogen, so entsteht eine neue Gleichung, in welcher zufolge (31.)

$$\sum_{\mathfrak{l}} du_{\mathfrak{a}}c_{\mathfrak{b},\mathfrak{l}}\delta v_{\mathfrak{l}}=du_{\mathfrak{a}}\delta u_{\mathfrak{b}}, \qquad \sum_{\mathfrak{a}}\delta v_{\mathfrak{l}}h_{\mathfrak{l},\mathfrak{a}}du_{\mathfrak{a}}=dv_{\mathfrak{l}}\delta v_{\mathfrak{l}}$$

ist. Wenn ich jetzt die beiden Functionen bilde

$$(32.)\qquad \begin{cases} \Psi = \sum\limits_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\Big(\delta\dfrac{\partial f_{\mathfrak{a}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{b}}}-d\dfrac{\partial f_{\mathfrak{a}}(\delta x)}{\partial \delta x_{\mathfrak{b}}} \\ +\frac{1}{2}\sum\limits_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}}\dfrac{A_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}}}{\Delta}\Big(\dfrac{\partial f_{\mathfrak{c}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{a}}}\dfrac{\partial f_{\mathfrak{d}}(\delta x)}{\partial \delta x_{\mathfrak{b}}}-\dfrac{\partial f_{\mathfrak{c}}(\delta x)}{\partial \delta x_{\mathfrak{a}}}\dfrac{\partial f_{\mathfrak{d}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{b}}}\Big)\Big)du_{\mathfrak{a}}\delta u_{\mathfrak{b}}, \\ \Omega = \sum\limits_{\mathfrak{l},\mathfrak{l}}\Big(\delta\dfrac{\partial g_{\mathfrak{l}}(dy)}{\partial dy_{\mathfrak{l}}}-d\dfrac{\partial g_{\mathfrak{l}}(\delta y)}{\partial \delta y_{\mathfrak{l}}} \\ +\frac{1}{2}\sum\limits_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}\dfrac{E_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}}{\mathrm{E}}\Big(\dfrac{\partial g_{\mathfrak{m}}(dy)}{\partial dy_{\mathfrak{l}}}\dfrac{\partial g_{\mathfrak{n}}(\delta y)}{\partial \delta y_{\mathfrak{l}}}-\dfrac{\partial g_{\mathfrak{m}}(\delta y)}{\partial \delta y_{\mathfrak{l}}}\dfrac{\partial g_{\mathfrak{n}}(dy)}{\partial dy_{\mathfrak{l}}}\Big)\Big)dv_{\mathfrak{l}}\delta v_{\mathfrak{l}}, \end{cases}$$

so geht diese Gleichung vermöge der die Vertauschung der Zeiger $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ betreffenden Eigenschaft in das folgende Resultat über

$$(33.)\qquad \Psi=\Omega.$$

Die Function Ψ ist eine quadrilineare Form der vier Systeme von Differentialen $du_{\mathfrak{a}}$, $\delta u_{\mathfrak{b}}$, $dx_{\mathfrak{g}}$, $\delta x_{\mathfrak{h}}$, und die Coefficienten derselben werden aus den Coefficienten der quadratischen Form $f(dx)$ mit Hülfe von einmaligen und zweimaligen partiellen Differentiationen nach den Variabeln $x_{\mathfrak{a}}$ abgeleitet. Die Function

Ω hängt in der genau entsprechenden Weise von den vier Systemen von Differentialen $dx_\mathfrak{t}$, $\delta x_\mathfrak{t}$, $dy_\mathfrak{p}$, $\delta y_\mathfrak{q}$ und der Form $g(dy)$ ab. Also drückt die Gleichung (33.) die Thatsache aus, dass die Beziehung der quadrilinearen Form Ψ zu der gegebenen quadratischen Form $f(dx)$ durch die Einführung eines Systems neuer Variabeln nicht geändert wird. Diese Untersuchung war aber zunächst auf die Ermittelung von Functionen von dieser Beschaffenheit gerichtet.

4.

Die Form Ψ, welche jetzt etwas genauer in's Auge gefasst werden soll, nimmt durch die in (16.) und (17.) eingeführten Bezeichnungen die folgende Gestalt an:

$$(34.)\quad \Psi = \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{g},\mathfrak{h}} \Big(\frac{\partial f_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{g}}}{\partial x_\mathfrak{h}} - \frac{\partial f_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{h}}}{\partial x_\mathfrak{g}} + \tfrac{1}{2} \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}} \frac{A_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}}}{\Delta} (f_{\mathfrak{c},\mathfrak{a},\mathfrak{g}} f_{\mathfrak{t},\mathfrak{b},\mathfrak{h}} - f_{\mathfrak{c},\mathfrak{a},\mathfrak{h}} f_{\mathfrak{d},\mathfrak{b},\mathfrak{g}}) \Big) du_\mathfrak{a}\, \delta u_\mathfrak{b}\, dx_\mathfrak{g}\, \delta x_\mathfrak{h},$$

und zwar ist

$$(35.)\quad \frac{\partial f_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{g}}}{\partial x_\mathfrak{h}} - \frac{\partial f_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{h}}}{\partial x_\mathfrak{g}} = \frac{\partial^2 a_{\mathfrak{a},\mathfrak{g}}}{\partial x_\mathfrak{b}\, \partial x_\mathfrak{h}} + \frac{\partial^2 a_{\mathfrak{b},\mathfrak{h}}}{\partial x_\mathfrak{a}\, \partial x_\mathfrak{g}} - \frac{\partial^2 a_{\mathfrak{a},\mathfrak{h}}}{\partial x_\mathfrak{b}\, \partial x_\mathfrak{g}} - \frac{\partial^2 a_{\mathfrak{b},\mathfrak{g}}}{\partial x_\mathfrak{a}\, \partial x_\mathfrak{h}}.$$

Man erkennt hieraus, dass der Coefficient von $du_\mathfrak{a}\, \delta u_\mathfrak{b}\, dx_\mathfrak{g}\, \delta x_\mathfrak{h}$ sich in den entgegengesetzten Werth verwandelt, sobald man entweder $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{b}$, oder $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{h}$ vertauscht, dass derselbe aber in sich selbst übergeht, sobald man gleichzeitig $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{h}$ verwechselt. Demzufolge ist Ψ eine bilineare Function der beiden Systeme von $\frac{n(n-1)}{2}$ Verbindungen $du_\mathfrak{a}\, \delta u_\mathfrak{b} - \delta u_\mathfrak{a}\, du_\mathfrak{b}$ und $dx_\mathfrak{g}\, \delta x_\mathfrak{h} - \delta x_\mathfrak{g}\, dx_\mathfrak{h}$, welche sich in Bezug auf diese beiden Systeme symmetrisch verhält.

Für die Zahl von zwei Variabeln erhält Ψ den folgenden Werth

$$(36.)\quad \Psi = \Big(\frac{\partial f_{1,1,2}}{\partial x_2} - \frac{\partial f_{1,2,2}}{\partial x_1} + \tfrac{1}{2} \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}} \frac{A_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}}}{\Delta} (f_{\mathfrak{c},1,1} f_{\mathfrak{d},2,2} - f_{\mathfrak{c},1,2} f_{\mathfrak{d},2,1}) \Big) (du_1 \delta u_2 - \delta u_1 du_2)(dx_1 \delta x_2 - \delta x_1 dx_2),$$

wo die Gleichungen

$$A_{1,1} = a_{2,2}, \quad A_{1,2} = -a_{1,2}, \quad A_{2,2} = a_{1,1},$$
$$\Delta = a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2}^2$$

bestehen. Die Betrachtung des oben aufgestellten *Gauss*ischen Ausdrucks für das Krümmungsmass k, welches der Form $f(dx)$ zugehört, lehrt also die folgende Beziehung zwischen dem Krümmungsmass k und der Form Ψ kennen:

$$(37.)\quad \Psi = -2k\Delta (du_1 \delta u_2 - \delta u_1 du_2)(dx_1 \delta x_2 - \delta x_1 dx_2).$$

Für das der Form $g(dy)$ zugehörige Krümmungsmass m muss aus denselben

Gründen die Gleichung

$$(37^*.) \qquad \Omega = -2mE(dv_1\delta v_2 - \delta v_1 dv_2)(dy_1\delta y_2 - \delta y_1 dy_2)$$

gelten. Mithin folgt aus der Gleichung $\Psi = \Omega$ und der bekannten Gleichung

$$A(du_1\delta u_2 - \delta u_1 du_2)(dx_1\delta x_2 - \delta x_1 dx_2) = E(dv_1\delta v_2 - \delta v_1 dv_2)(dy_1\delta y_2 - \delta y_1 dy_2)$$

die Eigenschaft des Krümmungsmasses, welcher früher Erwähnung geschehen ist, und die in der Gleichung

$$k = m$$

ausgedrückt wird.

Es hat ein Interesse, bei der Form Ψ alle diejenigen Coefficienten zusammenzustellen, für welche die Gruppe der vier Zeiger $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ abgesehen von der Anordnung dieselbe bleibt. Zunächst ist es klar, dass unter diesen vier Zahlen nicht mehr als zwei einander gleich sein können, wofern die zugehörigen Coefficienten nicht verschwinden sollen. Es können also nur entweder zwei Paare von gleichen Zahlen da sein, oder es ist nur Ein Paar gleicher Zahlen vorhanden, oder alle vier Zahlen sind von einander verschieden. Wird die Form Ψ in der angegebenen Weise als bilinear aufgefasst, so liefert im ersten Falle die Gruppe $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ nur Einen Coefficienten, im zweiten Falle die Gruppe $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ zwei Coefficienten, die aus dem angeführten Grunde der Symmetrie einander gleich sind, im dritten Falle die Gruppe $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ sechs Coefficienten, die den sechs Anordnungen

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}; & \mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \\ \mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{b}; & \mathfrak{h}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \\ \mathfrak{a}, \mathfrak{h}, \mathfrak{b}, \mathfrak{g}; & \mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{a}, \mathfrak{h} \end{array}$$

entsprechen, und von denen je zwei der Symmetrie halber einander gleich sind. Bei der Aufstellung dieser drei Categorieen von Gruppen ist die Anzahl n der Variabeln von Bedeutung. Die bilinear gedachte Form Ψ hat für $n=2$ nur Ein Glied, und zwar aus der ersten Categorie; sie hat für $n=3$ sechs differente Glieder, von denen drei zur ersten, drei zur zweiten Categorie gehören; sie hat endlich für $n \geqq 4$ die Anzahl $\frac{\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right)}{2}$ von differenten Gliedern, von denen $\frac{n(n-1)}{2}$ zur ersten, $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ zur zweiten, $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$ zur dritten Categorie gehören. Unter den Gliedern der letzten Categorie besteht nun die Relation, dass das Aggregat der drei

Coefficienten, die den drei Anordnungen

$$\begin{matrix} \mathfrak{a}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{g}, & \mathfrak{h}, \\ \mathfrak{a}, & \mathfrak{g}, & \mathfrak{h}, & \mathfrak{b}, \\ \mathfrak{a}, & \mathfrak{h}, & \mathfrak{b}, & \mathfrak{g}, \end{matrix}$$

entsprechen, allemal den Werth Null hat. Denn es gelten die Gleichungen

$$\frac{\partial f_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{g}}}{\partial x_{\mathfrak{h}}} - \frac{\partial f_{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{h}}}{\partial x_{\mathfrak{g}}} + \frac{\partial f_{\mathfrak{a},\mathfrak{g},\mathfrak{h}}}{\partial x_{\mathfrak{b}}} - \frac{\partial f_{\mathfrak{a},\mathfrak{g},\mathfrak{b}}}{\partial x_{\mathfrak{h}}} + \frac{\partial f_{\mathfrak{a},\mathfrak{h},\mathfrak{b}}}{\partial x_{\mathfrak{g}}} - \frac{\partial f_{\mathfrak{a},\mathfrak{h},\mathfrak{g}}}{\partial x_{\mathfrak{b}}} = 0$$

und

$$\begin{aligned} & f_{\mathfrak{c},\mathfrak{a},\mathfrak{g}} f_{\mathfrak{b},\mathfrak{h},\mathfrak{h}} - f_{\mathfrak{c},\mathfrak{a},\mathfrak{h}} f_{\mathfrak{b},\mathfrak{h},\mathfrak{g}} \\ + & f_{\mathfrak{c},\mathfrak{a},\mathfrak{h}} f_{\mathfrak{b},\mathfrak{g},\mathfrak{h}} - f_{\mathfrak{c},\mathfrak{a},\mathfrak{h}} f_{\mathfrak{b},\mathfrak{g},\mathfrak{h}} \\ + & f_{\mathfrak{c},\mathfrak{a},\mathfrak{h}} f_{\mathfrak{b},\mathfrak{h},\mathfrak{g}} - f_{\mathfrak{c},\mathfrak{a},\mathfrak{g}} f_{\mathfrak{b},\mathfrak{h},\mathfrak{h}} = 0. \end{aligned}$$

Bei diesem Anlass kann man die Beobachtung machen, dass, wenn in der Form Ψ die Substitution

$$du_{\mathfrak{a}} = dx_{\mathfrak{a}}, \qquad \delta u_{\mathfrak{b}} = \delta x_{\mathfrak{b}}$$

eingeführt wird, zwischen den Producten $(dx_{\mathfrak{a}}\delta x_{\mathfrak{b}} - \delta x_{\mathfrak{a}} dx_{\mathfrak{b}})(\delta x_{\mathfrak{g}}\delta x_{\mathfrak{h}} - \delta x_{\mathfrak{g}} dx_{\mathfrak{h}})$ ganz dieselben Relationen bestehen, welche für die denselben zugehörigen Coefficienten der Form Ψ nachgewiesen sind.

5.

Die Theorie der Formen von n Differentialen gehört zum Theil der Algebra, zum Theil der Infinitesimalrechnung an. Die bisherige Erörterung dieser Formen hat keine anderen Operationen erfordert, als die rationalen algebraischen Operationen und die Operation des Differentiirens. Andere Eigenschaften dieser Formen kommen zur Erscheinung, sobald man sich bei der Betrachtung auf den Boden der Integralrechnung stellt.

Es mögen die n Variabeln $x_{\mathfrak{a}}$ in irgend einer Weise von einer neuen independenten Variabeln t abhängig werden, so sind auch die n Variabeln $y_{\mathfrak{t}}$ von der Variabeln t abhängig. Die Differentiation nach dieser Variabeln t soll nach der Weise von *Lagrange* notirt werden. Auch setze ich fest, dass wenn in eine Form $f(dx)$ statt der Differentiale $dx_{\mathfrak{a}}$ beziehungsweise andere Grössen $\xi_{\mathfrak{a}}$ substituirt werden, das Resultat mit $f(\xi)$ bezeichnet werde. Wenn ferner in den Coefficienten dieser Form statt der Variabeln $x_{\mathfrak{a}}$ beziehungsweise die besonderen Werthe $x_{\mathfrak{a}}(0)$ substituirt werden, so soll das Resultat $(f(\xi))_0$ heissen, und das Entsprechende gelte für die Form $g(dy)$; die Gradzahl p sei wieder gleich oder grösser als Zwei. Mit dem Wesen der Form $f(dx)$ hängt nun auf das genaueste die Aufgabe der Variationsrechnung zu-

sammen, die Variabeln x_a als Functionen von t so zu bestimmen, dass die erste Variation des zwischen festen Grenzen zu nehmenden Integrals $\int f(x')\,dt$ verschwinde. Diese Aufgabe führt bekanntlich auf die Integration desjenigen Systems von Differentialgleichungen, welches aus der linken Seite der obigen Gleichung (10.) entsteht, sobald man sie durch die Grösse $(dt)^p$ dividirt und den Factor einer jeden Variation δx_a gleich Null setzt. Dieses der Form $f(dx)$ zugehörige System von isoperimetrischen Differentialgleichungen lautet, wie folgt,

$$(38.) \qquad \sum_b \frac{\partial^2 f(x')}{\partial x'_a\,\partial x'_b}\,x''_b + f_a(x') = 0.$$

Die genannte Aufgabe verwandelt sich durch die Einführung der Variabeln y_t statt der Variabeln x_a in die analoge, der Form $g(dy)$ zugehörige Aufgabe, und diese liefert zur Bestimmung der Variabeln y_t als Functionen von t das System von Differentialgleichungen

$$(38^*.) \qquad \sum_t \frac{\partial^2 g(y')}{\partial y'_t\,\partial y'_t}\,y''_t + g_t(y') = 0.$$

Dass dieses System durch die Substitution der Variabeln y_t aus dem System (38.) hervorgehe, wird durch die Gleichung (10.) direct bewiesen.

Es ist schon bei einer andern Gelegenheit bemerkt worden, dass, sobald die in (3^a.) mit Δ bezeichnete Determinante nicht identisch verschwindet, aus dem System (38.) die n Grössen x''_b als Functionen der Grössen x_a und x'_a dargestellt werden können, und hieraus ist zu schliessen, dass unter gewissen an jenem Orte entwickelten Stetigkeitsbedingungen eine vollständige Integration dieses Systems von Differentialgleichungen ausführbar ist, bei welcher die Variabeln x_a durch die Forderung bestimmt sind, für einen gewissen Werth $t = t_0$ die Gleichungen

$$x_a = x_a(0), \qquad x'_a = x'_a(0)$$

zu erfüllen *). Die festen Werthe $x_a(0)$ und $x'_a(0)$ müssen so gewählt sein,

*) Die Integration des Systems (38.), welche zur Transformation der zweiten Variation des Integrals $\int f(x')\,dt$ nach der in Band 65, pag. 26 dieses Journals angegebenen Methode geeignet ist, hat die Werthe der Grössen x_a und $\frac{\partial f(x')}{\partial x'_a} = F_{a,1}$ für $t = t_0$ zu Integrationsconstanten. Durch die Einführung von x_a und $F_{a,1}$ als dependenten Variabeln in das System (38.) werden diese Constanten zu Anfangswerthen der Variabeln, und das System nimmt nach *Jacobi* die folgende Gestalt an

$$\frac{dx_a}{dt} = \frac{\partial H}{\partial F_{a,1}}, \qquad \frac{dF_{a,1}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_a},$$

dass durch ihre Substitution für x_a und dx_a die Determinante Δ nicht gleich Null wird, und dass bei der entsprechenden Substitution die erwähnten Ausdrücke der Grössen x_b'' durchaus endlich bleiben. Die durch die Integration erhaltenen Werthe der Grössen x_a sind alsdann für ein gewisses von dem Werthe $t = t_0$ aus sich erstreckendes Intervall der Variabeln t endlich und stetig. Eine solche Integration des Systems (38.) wird gegenwärtig als gegeben angenommen. Da für das System (38*.) vollkommen dieselben Betrachtungen gelten, so ist vorauszusetzen, dass die Grössen y_t diesem gemäss und durch die Forderung bestimmt sind, für den Werth $t = t_0$ die Gleichungen

$$y_t = y_t(0), \qquad y_t' = y_t'(0)$$

zu befriedigen, wo die Constanten $y_t(0)$ und $y_t'(0)$ mit den Constanten $x_a(0)$ und $x_a'(0)$ durch Gleichungen verbunden sind, die der Beziehung der Variabeln y_t und x_a zu einander entsprechen. Betrachtet man die in der Gleichung (1.) vorkommenden Grössen $c_{a,t}$ als Functionen der Variabeln y_t und deutet das Resultat der Substitution $y_t = y_t(0)$ durch $c_{a,t}(0)$ an, so sind die Gleichungen zwischen den Constanten $x_a'(0)$ und $y_t'(0)$ diese:

$$(39.) \qquad x_a'(0) = c_{a,1}(0)\,y_1'(0) + c_{a,2}(0)\,y_2'(0) + \cdots + c_{a,n}(0)\,y_n'(0).$$

Eine Eigenthümlichkeit der in Rede stehenden Integrationswerthe x_a besteht darin, dass die Variable t in dieselben nicht anders eingeht, als in gewissen Verbindungen mit den Constanten $x_a'(0)$. Um dies zu erkennen, zeichne man unter den Variabeln x_a Eine, etwa x_1, aus und deducire aus den Gleichungen (38.) die $(n-1)$ Ausdrücke, welche gleich

$$\frac{d^2x_a}{dx_1^2} = \frac{\frac{d^2x_a}{dt^2}\frac{dx_1}{dt} - \frac{d^2x_1}{dt^2}\frac{dx_a}{dt}}{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^3}$$

sind, und die nur die Grössen x_c und dx_c, aber nicht mehr das Differential dt enthalten. Das so gebildete System von $(n-1)$ Differentialgleichungen der zweiten Ordnung zwischen den Variabeln $x_2, x_3, \ldots x_n$ und x_1 denke man

---

wo die Function H wegen der Homogeneität der Form $f(dx)$ gleich ist dem Ausdrucke $(p-1)f(x')$, als Function der Grössen x_a und $F_{a,1}$ aufgefasst. In dem Aufsatze: *Erörterung der Möglichkeit, ein gegebenes System von Differentialgleichungen vollständig zu integriren*, abgedruckt in einer 1868 zu Bonn erschienenen Jubiläumschrift, sind Grundsätze entwickelt, aus denen die Existenz des vollständigen Integrals der betreffenden isoperimetrischen Differentialgleichungen folgt, und es ist die Anwendung auf die *Jacobi*sche Gestalt dieser Differentialgleichungen ausgeführt. Jene Grundsätze gestatten aber auch den directen Beweis der im Texte aufgestellten Behauptung.

sich so integrirt, dass für $x_1 = x_1(0)$ die Gleichungen

$$x_2 = x_2(0), \quad \ldots \quad x_n = x_n(0),$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)_0, \quad \ldots \quad \frac{dx_n}{dx_1} = \left(\frac{dx_n}{dx_1}\right)_0$$

erfüllt sind. Nun folgt aus dem System (38.) das bekannte Integral

$$(40.) \qquad f(x') = (f(x'(0)))_0.$$

In die linke Seite dieser Gleichung substituire man für $x_2, x_3, \ldots x_n$ die gefundenen Ausdrücke in x_1 und den $2n-2$ Constanten $x_2(0), \ldots x_n(0)$; $\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)_0, \ldots \left(\frac{dx_n}{dx_1}\right)_0$, so kommt wegen der Homogeneität von $f(x')$

$$(41.) \quad f(x') = f^{(1)}\left(x_1, x_1(0), x_2(0), \ldots x_n(0), \left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)_0, \ldots \left(\frac{dx_n}{dx_1}\right)_0\right)\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^p$$

oder, kürzer,

$$f(x') = f^{(1)}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^p.$$

Dann liefert die Gleichung (40.) die Relation

$$(42.) \qquad \sqrt[p]{f^{(1)}}.\,dx_1 = \sqrt[p]{(f(x'(0)))_0}.\,dt,$$

und durch Integration nach x_1 die Gleichung zwischen x_1 und t

$$(43.) \qquad \int_{x_1(0)}^{x_1} \sqrt[p]{f^{(1)}}.\,dx_1 = \sqrt[p]{(f(x'(0)))_0}.(t-t_0).$$

Wenn man erwägt, dass für die Ausdrücke $\left(\frac{dx_b}{dx_1}\right)_0$ die Gleichungen

$$\left(\frac{dx_b}{dx_1}\right)_0 = \frac{(t-t_0)x_b'(0)}{(t-t_0)x_1'(0)}$$

gelten, und dass wegen der Homogeneität von $f(x')$ die Gleichung

$$(f(x'(0)))_0(t-t_0)^p = (f((t-t_0)x'(0)))_0$$

besteht, so geht aus der Gleichung (43.) das Resultat hervor, dass der Werth x_1 eine Function der n Grössen $x_b(0)$ und der n Grössen $(t-t_0)x_b'(0)$ ist, und die Variable t in keiner Weise sonst enthält. Das Gleiche gilt offenbar von jedem andern Werthe x_a, und da das System von Differentialgleichungen (38*.) dieselben Eigenschaften hat, wie das System (38.), so sind auch die betreffenden Integrationswerthe y_t reine Functionen der n Grössen $y_t(0)$ und der n Grössen $(t-t_0)y_t'(0)$.

Ich betrachte nun in der Darstellung von x_a die n Grössen $x_b(0)$ als fest, die n Grössen $(t-t_0)x_b'(0)$ als variabel, und ebenso in der Darstellung von y_t die n Grössen $y_t(0)$ als fest, die n Grössen $(t-t_0)y_t'(0)$ als variabel.

Ich setze ferner voraus, dass die x_α nach den neuen Variabeln $(t-t_0)x'_\alpha(0)$, und die $y_\mathfrak{t}$ nach den neuen Variabeln $(t-t_0)y'_\mathfrak{t}(0)$ partiell differentiirt werden können *). Die Einführung der Werthe von x_α in die Form $f(\delta x)$ und der Werthe von $y_\mathfrak{t}$ in die Form $g(\delta y)$ liefert unter diesem Gesichtspunkt die beiden Transformationen

$$(44.)\qquad \begin{cases} f(\delta x) = \varphi(\delta(\overline{t-t_0)x'(0)}), \\ g(\delta y) = \chi(\delta(\overline{t-t_0)y'(0)}). \end{cases}$$

Weil aber in Folge von (39.) die Variabeln $(t-t_0)x'_\alpha(0)$ und $(t-t_0)y'_\mathfrak{t}(0)$ durch Gleichungen mit einander verbunden sind, welche diese Variabeln selbst nicht enthalten, so bestehen zwischen den Variationen dieser beiden Systeme von Variabeln die entsprechenden Gleichungen

$$(45.)\qquad \delta(\overline{t-t_0)x'_\alpha(0)} = \sum_\mathfrak{t} c_{\alpha,\mathfrak{t}}(0)\,\delta(\overline{t-t_0)y'_\mathfrak{t}(0)},$$

und durch die Anwendung der Gleichungen (39.) und (45.) muss die Form $\varphi(\delta(\overline{t-t_0)x'(0)})$ in die Form $\chi(\delta(\overline{t-t_0)y'(0)})$ übergehen, das heisst, die Gleichung

$$(46.)\qquad \varphi(\delta(\overline{t-t_0)x'(0)}) = \chi(\delta(\overline{t-t_0)y'(0)})$$

erfüllt werden.

Es ist evident, dass die Gleichung

$$f(x') = g(y')$$

richtig bleibt, wenn man auf der linken Seite $x_\alpha = x_\alpha(0)$ und $x'_\alpha = x'_\alpha(0)$, auf der rechten Seite $y_\mathfrak{t} = y_\mathfrak{t}(0)$, $y'_\mathfrak{t} = y'_\mathfrak{t}(0)$ setzt und beide Seiten mit dem Factor $(t-t_0)^p$ multiplicirt. So entsteht die Gleichung

$$(47.)\qquad (f((t-t_0)x'(0)))_0 = (g((t-t_0)y'(0)))_0.$$

Die linke Seite derselben ist eine Form des p^{ten} Grades von den n Variabeln $(t-t_0)x'_\alpha(0)$, deren Coefficienten nur von den Grössen $x_\alpha(0)$ abhängen, die rechte Seite eine Form von den n Variabeln $(t-t_0)y'_\mathfrak{t}(0)$, deren Coefficienten nur von den Grössen $y_\mathfrak{t}(0)$ abhängen. Weil nun zwischen den beiden in Rede stehenden Systemen von Variabeln die Gleichungen

$$(39^a.)\qquad (t-t_0)x'_\alpha(0) = \sum_\mathfrak{t} c_{\alpha,\mathfrak{t}}(0)(t-t_0)y'_\mathfrak{t}(0)$$

gelten, so ist es gerechtfertigt, in der Gleichung (47.) die betreffenden Variabeln

---

*) Mit Hülfe des angeführten Aufsatzes kann man Stetigkeitsbedingungen für die in dem System (38.) auftretenden Functionen, also Stetigkeitsbedingungen für die Coefficienten der Form $f(\delta x)$ und deren Differentialquotienten aufstellen, bei denen diese Voraussetzung eintreten muss.

durch ihre Differentiale zu ersetzen. Also wird durch die Substitution (39ª.) und (45.) sowohl die Gleichung (46.), wie auch die Gleichung

$$(48.) \qquad (f(\delta(\overline{t-t_0}\,x'(0))))_0 = (g(\delta(\overline{t-t_0}\,y'(0))))_0$$

erzeugt.

6.

Die im vorigen Artikel angestellten Betrachtungen enthalten die Mittel zur allgemeinen Beantwortung der Frage:

Wann ist es möglich, dass eine Form $f(dx)$ in eine Form $g(dy)$ transformirt werde, deren Coefficienten constant sind?

Gesetzt, die Coefficienten der Form $g(dy)$, in welche $f(dx)$ durch die Einführung der Variabeln y_t übergeht, seien constant, so bestehen die folgenden Consequenzen. Wegen der Gleichungen (17.) verschwinden die sämmtlichen Grössen $g_{t,p,q}$ und deshalb auch die Formen $g_t(dy)$. Mithin nimmt das System (38*.) diese Gestalt an

$$(49.) \qquad \sum_t \frac{\partial^2 g(y')}{\partial y'_t \partial y'_t} y''_t = 0.$$

Nun sind nach dem Früheren die Werthe $y'_t(0)$ so gewählt zu denken, dass die Determinante von den Elementen $\frac{\partial^2 g(y')}{\partial y'_t \partial y'_t}$ bei der Substitution $y'_t = y'_t(0)$ nicht verschwindet. Hierauf gründet sich der Schluss, dass das System (49.) nicht anders erfüllt werden könne, als durch die n Gleichungen

$$(50.) \qquad y''_t = 0.$$

Die Integration derselben liefert aber das Resultat

$$(51.) \qquad y_t = y_t(0) + (t-t_0)y'_t(0).$$

Sobald jetzt die n Grössen y_t als abhängig betrachtet werden von den n neuen Variabeln $(t-t_0)y'_t(0)$, während die n Grössen $y_t(0)$ als fest gelten, so liefert die Gleichung (51.) zwischen den betreffenden Differentialen die n Relationen

$$(52.) \qquad \delta y_t = \delta(\overline{t-t_0}\,y'_t(0)).$$

Wenn daher die neuen Variabeln in die Form $g(\delta y)$ eingeführt werden, deren Coefficienten nach der Voraussetzung die Grössen y_t nicht enthalten, so kommt

$$(53.) \qquad g(\delta y) = g(\delta(\overline{t-t_0}\,y'(0))),$$

und es wird nach der in (44.) gebrauchten Bezeichnung

$$(54.) \qquad \chi(\delta(\overline{t-t_0}\,y'(0))) = g(\delta(\overline{t-t_0}\,y'(0))).$$

Ebenso ist es klar, dass die Substitution $y_t = y_t(0)$ die Form $g(\delta y)$ nicht

alterirt, oder, in Zeichen, dass die Gleichung

$$(55.) \qquad (g(\delta(\overline{t-t_0)y'(0)}))_0 = g(\delta(\overline{t-t_0)y'(0)})$$

besteht.

Aus diesen Gründen verwandeln sich die Gleichungen (46.) und (48.) des vorigen Artikels unter den gegenwärtigen Voraussetzungen beziehungsweise in die folgenden:

$$(46^a.) \qquad \varphi(\delta(\overline{t-t_0)x'(0)}) = g(\delta(\overline{t-t_0)y'(0)}),$$

$$(48^a.) \qquad (f(\delta(\overline{t-t_0)x'(0)}))_0 = g(\delta(\overline{t-t_0)y'(0)}).$$

Die Vereinigung derselben bringt aber die identische Gleichung hervor:

$$(56.) \qquad \varphi(\delta(\overline{t-t_0)x'(0)}) = (f(\delta(\overline{t-t_0)x'(0)}))_0.$$

Diese Gleichung gestattet, die aufgeworfene Frage in der folgenden Weise vollständig zu beantworten.

Es sei das der Form $f(\delta x)$ zugehörige System von isoperimetrischen Differentialgleichungen so integrirt, dass die Variabeln x_a durch die n Grössen $x_b(0)$ und die n Grössen $(t-t_0)x'_b(0)$ dargestellt erscheinen. Man fasst die Variabeln x_a als Functionen der n neuen Variabeln $(t-t_0)x'_b(0)$, die n Grössen $x_b(0)$ als constant auf, und transformirt die Form $f(\delta x)$ durch Einführung dieser neuen Variabeln in die Form $\varphi(\delta(\overline{t-t_0)x'(0)})$. Wofern es möglich ist, die Form $f(\delta x)$ in eine andere Form mit constanten Coefficienten zu transformiren, so wird eine solche Transformation durch das angegebene Verfahren in der That geleistet, und zwar geht alsdann die Form $\varphi(\delta(\overline{t-t_0)x'(0)})$ aus der Form $f(\delta x)$ hervor, indem man beziehungsweise statt der Differentiale δx_a die Differentiale $\delta(\overline{t-t_0)x'_a(0)}$ setzt und in den Coefficienten statt der Variabeln x_a die Constanten $x_a(0)$ substituirt.

Man kann dem so eben aufgestellten Criterium noch eine andere Gestalt geben. Die Coefficienten der Form $\varphi(\delta(\overline{t-t_0)x'(0)})$, welche in jedem Falle durch die Grössen $x_a(0)$ und die Grössen $(t-t_0)x'_a(0)$ ausgedrückt sind, werden, sobald die Form $f(\delta x)$ in eine Form mit constanten Coefficienten transformirbar ist, unabhängig von den Grössen $(t-t_0)x'_a(0)$, und deshalb unabhängig von der Grösse t. Nun lässt sich auch das Umgekehrte zeigen, dass, wenn die Coefficienten der Form $\varphi(\delta(\overline{t-t_0)x'(0)})$ von t unabhängig sind, die Gleichung (56.) besteht, und demnach die Form $f(\delta x)$ in eine Form mit constanten Coefficienten transformirt werden kann. Um sich hiervon zu überzeugen, bemerke man, dass die Bildung der Form $\varphi(\delta(\overline{t-t_0)x'(0)})$ aus der

Form $f(\delta x)$ darauf hinauskommt, erstens in den Coefficienten der Form $f(\delta x)$ für die Grössen $x_\mathfrak{a}$ die durch die Integration des Systems (38.) erhaltenen Werthe zu substituiren, und zweitens die Differentiale $\delta x_\mathfrak{a}$ durch die folgenden Ausdrücke zu ersetzen:

$$(57.) \qquad \delta x_\mathfrak{a} = \frac{\partial x_\mathfrak{a}}{(t-t_0)\partial x_1'(0)}\delta\overline{(t-t_0)x_1'(0)} + \cdots + \frac{\partial x_\mathfrak{a}}{(t-t_0)\partial x_n'(0)}\delta\overline{(t-t_0)x_n'(0)}.$$

Sobald die Coefficienten der aus diesen Operationen hervorgehenden Form von der Grösse t unabhängig werden, kann man ihren Werth für das variable t bestimmen, falls derselbe für $t=t_0$ bekannt ist. Denn Unterbrechungen der Stetigkeit sind bei diesen Betrachtungen überall ausgeschlossen. Es leuchtet ein, dass die in die Coefficienten der Form $f(\delta x)$ einzuführenden Werthe $x_\mathfrak{a}$ für $t=t_0$ gerade die Werthe $x_\mathfrak{a}(0)$ werden. Bei den partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial x_\mathfrak{a}}{(t-t_0)\partial x_\mathfrak{b}'(0)}$ sind die Grössen $x_\mathfrak{a}$ als abhängig von den n Grössen $x_\mathfrak{b}(0)$, den n Grössen $x_\mathfrak{b}'(0)$ und der Grösse t aufgefasst. Weil nun für $t=t_0$ die Grösse $x_\mathfrak{a}=x_\mathfrak{a}(0)$ wird, so ist $\frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial x_\mathfrak{b}'(0)}$ für $t=t_0$ gleich der Null, und daher

$$\lim\frac{\partial x_\mathfrak{a}}{(t-t_0)\partial x_\mathfrak{b}'(0)} = \left(\frac{d\frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial x_\mathfrak{b}'(0)}}{dt}\right)_{t=t_0}.$$

Weil aber die Differentiationen nach $x_\mathfrak{b}'(0)$ und nach t von einander unabhängig sind, so hat man

$$\frac{d\frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial x_\mathfrak{b}'(0)}}{dt} = \frac{\partial\frac{dx_\mathfrak{a}}{dt}}{\partial x_\mathfrak{b}'(0)} = \frac{\partial x_\mathfrak{a}'}{\partial x_\mathfrak{b}'(0)}.$$

Die Grösse $x_\mathfrak{a}'$ geht für $t=t_0$ in $x_\mathfrak{a}'(0)$ über, deshalb wird der Ausdruck $\frac{\partial x_\mathfrak{a}'}{\partial x_\mathfrak{b}'(0)}$ für $t=t_0$ gleich der Null, wenn $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{a}$ verschieden ist, und gleich der Einheit, wenn $\mathfrak{b}=\mathfrak{a}$ ist. Also ist auch $\lim\frac{\partial x_\mathfrak{a}}{(t-t_0)\partial x_\mathfrak{b}'(0)}$ im erstern Falle gleich der Null, im zweiten Falle gleich der Einheit. Mithin hat das System (57.) die Eigenschaft, unter der Annahme $t=t_0$ in das System

$$(58.) \qquad \delta x_\mathfrak{a} = \delta\overline{(t-t_0)x_\mathfrak{a}'(0)}$$

überzugehn. Nimmt man alles Bisherige zusammen, so erhellt, dass die Form $f(\delta x)$ durch die angegebenen Operationen in eine Form verwandelt wird, die für $t=t_0$ mit der Form $(f(\delta\overline{(t-t_0)x'(0)})_0$ zusammenfällt, und da die Coefficienten derselben sich nach der Hypothese mit t nicht ändern, so besteht diese Transformation, wie behauptet worden, auch bei variablem t.

Wenn man eine Differentiation nach der Variablen t, bei welcher $x_a(0)$ und $x'_a(0)$ als constant angesehen werden, wie bisher, durch die Characteristik d bezeichnet, und zugleich festsetzt, dass diese Differentiation die Grössen $\delta(\overline{t-t_0}\,x_a(0))$ nicht berühren soll, so darf man das erhaltene Resultat, wie folgt, aussprechen.

Die Form $f(\delta x)$ kann in eine Form mit constanten Coefficienten transformirt werden, oder nicht, je nachdem die Gleichung

$$(59.) \qquad \frac{d\varphi(\delta(\overline{t-t_0}\,x'(0)))}{dt} = 0$$

erfüllt ist, oder nicht erfüllt ist.

7.

Wenn die Form $f(dx)$ vom zweiten Grade ist und wie in der Gleichung (14.) des Artikels 1. bezeichnet wird, so hat die Form $\varphi(\delta(\overline{t-t_0}\,x'(0)))$ die folgende Gestalt:

$$(60.) \qquad \begin{cases} \varphi(\delta(\overline{t-t_0}\,x'(0))) = \frac{1}{2}(t-t_0)^{-2}\sum_{\mathfrak{t},\mathfrak{l}} \varphi_{\mathfrak{t},\mathfrak{l}}\,\delta(\overline{t-t_0}\,x'_{\mathfrak{t}}(0))\,\delta(\overline{t-t_0}\,x'_{\mathfrak{l}}(0)), \\ \varphi_{\mathfrak{t},\mathfrak{l}} = \sum_{a,b} a_{a,b}\,\frac{\partial x_a}{\partial x'_{\mathfrak{t}}(0)}\,\frac{\partial x_b}{\partial x'_{\mathfrak{l}}(0)}, \end{cases}$$

und das aufgestellte Criterium besteht in der Befriedigung der $\frac{n(n+1)}{2}$ Gleichungen

$$(61.) \qquad \frac{d((t-t_0)^{-2}\varphi_{\mathfrak{t},\mathfrak{l}})}{dt} = 0.$$

Dieses von der Integration des Systems (38.) abhängige Criterium kann auf Grund der Eigenschaften der in (32.) definirten quadrilinearen Form Ψ in ein directes Criterium verwandelt werden, und darin liegt die characteristische Bedeutung der Form Ψ für die quadratische Form $f(dx)$. Das in Rede stehende directe Criterium ist in dem Satze enthalten:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die quadratische Form $f(dx)$ in eine Form mit constanten Coefficienten verwandelt werden könne, besteht in dem identischen Verschwinden der quadrilinearen Form Ψ, welche der Form $f(dx)$ zugehört.

Es ist schon früher bemerkt worden, dass, wenn die Form $f(dx)$ durch Einführung der Variabeln $y_{\mathfrak{t}}$ in die Form $g(dy)$ übergeht, und wenn diese constante Coefficienten hat, die n Formen $g_{\mathfrak{t}}(dy)$ identisch verschwinden. Hieraus folgt das identische Verschwinden der in (32.) definirten Form Ω, und daher auch das identische Verschwinden der Form Ψ. Damit ist das auf-

gestellte Criterium als nothwendig erwiesen. Um aber darzuthun, dass dieses Criterium auch hinreichend ist, wird gezeigt werden, dass das identische Verschwinden der Form Ψ die Erfüllung der in (61.) enthaltenen Gleichungen nach sich zieht.

Die Führung dieses Beweises hängt ab von der Erkenntniss des Zusammenhangs zwischen den Grössen $\varphi_{\mathfrak{t},\mathfrak{l}}$ und der Form Ψ. Um mir eine solche Erkenntniss zu erwerben, wendete ich mich an diejenige Relation, die der Schlüssel zur Auffindung der Form Ψ gewesen war, nämlich die Relation (23.), und sah zu, was aus derselben folge, wofern die Form $g(dy)$ constante Coefficienten hat. Das erwähnte identische Verschwinden der n Formen $g_{\mathfrak{t}}(dy)$ bewirkt dann auch ein Verschwinden der rechten Seite von (23.), und die linke Seite muss unabhängig von den n Differentialen $dx_{\mathfrak{c}}$ ebenfalls gleich Null werden. Sobald man nun die Grössen $c_{\mathfrak{b},\mathfrak{l}}$ als Functionen der n Variabeln $x_{\mathfrak{c}}$ auffasst, so wird die erwähnte Relation

$$(23^{a}.) \qquad \sum_{\mathfrak{b}} a_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\, dc_{\mathfrak{b},\mathfrak{l}} + \tfrac{1}{2} \sum_{\mathfrak{b}} \frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(dx)}{\partial dx_{\mathfrak{b}}}\, c_{\mathfrak{b},\mathfrak{l}} = 0$$

der symbolische Ausdruck eines Systems von partiellen Differentialgleichungen, welchem die Grössen $c_{\mathfrak{b},\mathfrak{l}}$ nothwendig genügen. Ferner ist bewiesen, dass, wenn die Form $f(dx)$ in eine Form mit constanten Coefficienten transformirt werden kann, durch das im vorigen Artikel entwickelte Verfahren eine solche Transformation wirklich ausgeführt wird. Es sind die Grössen $(t-t_0)x'_{\mathfrak{l}}(0)$ neue Variable, durch deren Substitution die transformirte Form constante Coefficienten erhält. Setzt man diese in der Gleichung (1.) an die Stelle der Variabeln $y_{\mathfrak{t}}$, so erhalten nach (57.) die betreffenden Grössen $c_{\mathfrak{b},\mathfrak{l}}$ die Werthe

$$(62.) \qquad c_{\mathfrak{b},\mathfrak{l}} = (t-t_0)^{-1} \frac{\partial x_{\mathfrak{b}}}{\partial x'_{\mathfrak{l}}(0)}.$$

Wofern also diese Werthe durch die ursprünglichen Variabeln $x_{\mathfrak{a}}$ dargestellt werden, so müssen dieselben das mit $(23^{a}.)$ bezeichnete System von partiellen Differentialgleichungen erfüllen.

Dieses System bleibt erfüllt, wenn die Grössen $x_{\mathfrak{a}}$ gleich denjenigen Functionen von t genommen werden, die nach der Voraussetzung das System (38.) integriren, und wenn die Differentiale $dx_{\mathfrak{c}}$ durch die Differentialquotienten $\frac{dx_{\mathfrak{c}}}{dt}$ ersetzt werden, die derselben Voraussetzung entsprechen. Da die Grössen $x_{\mathfrak{a}}(0)$ immer als constant gelten, so erhält der nach t genommene Differentialquotient der Grösse $c_{\mathfrak{b},\mathfrak{l}} = (t-t_0)^{-1} \frac{\partial x_{\mathfrak{b}}}{\partial x'_{\mathfrak{l}}(0)}$ denselben Werth, wenn man die-

selbe durch die n Variabeln x_a, und wenn man dieselbe durch die n Variabeln $(t-t_0)x'_a(0)$ ausgedrückt denkt. Sobald man daher den Grössen x_a und $\frac{dx_a}{dt}$ die angeführte Bedeutung beilegt, so stellt die Relation (23^a.), durch dt dividirt, ein System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen der ersten Ordnung dar, welches durch die Grössen

$$c_{b,l} = (t-t_0)^{-1}\frac{\partial x_b}{\partial x'_l(0)}$$

befriedigt wird.

Ich schöpfte nun die Vermuthung, dass man aus dem identischen Verschwinden der quadrilinearen Form Ψ das Bestehen der so eben genannten Relation, und aus dieser das Gelten der Gleichungen (61.) ableiten könnte, und diese Vermuthung bestätigte sich vollkommen.

8.

Es werde, um mit dem zweiten Theile der Behauptung zu beginnen,

$$x'_t(0) = \varkappa, \qquad x'_l(0) = \lambda$$

gesetzt, und ferner komme, indem man die linke Seite von (23^a.) mit dt dividirt, den Werth von $c_{b,l}$ aus (62.) einsetzt, und mit $(t-t_0)^2$ multiplicirt,

$$(63.)\qquad \Phi_{a,\lambda} = (t-t_0)^2\left(\sum_b a_{a,b}\frac{d(t-t_0)^{-1}\frac{\partial x_b}{\partial\lambda}}{dt} + \tfrac{1}{2}\sum_b \frac{\partial f_a(x')}{\partial x'_b}(t-t_0)^{-1}\frac{\partial x_b}{\partial\lambda}\right),$$

$$(64.)\qquad \Psi_{a,\lambda} = \sum_b a_{a,b}\frac{d\frac{\partial x_b}{\partial\lambda}}{dt} + \tfrac{1}{2}\sum_b \frac{\partial f_a(x')}{\partial x'_b}\frac{\partial x_b}{\partial\lambda}.$$

Dann ist

$$(65.)\qquad \Phi_{a,\lambda} = (t-t_0)\Psi_{a,\lambda} - \sum_b a_{a,b}\frac{\partial x_b}{\partial\lambda},$$

und durch Vertauschung von b mit a und von λ mit $\varkappa$ wird

$$(65^b.)\qquad \Phi_{b,\varkappa} = (t-t_0)\Psi_{b,\varkappa} - \sum_a a_{b,a}\frac{\partial x_a}{\partial\varkappa}.$$

Hieraus folgt durch Summation

$$(66.)\qquad \begin{cases} \sum_a \Phi_{a,\lambda}\frac{\partial x_a}{\partial\varkappa} + \sum_b \Phi_{b,\varkappa}\frac{\partial x_b}{\partial\lambda} \\ = (t-t_0)\left(\sum_a \Psi_{a,\lambda}\frac{\partial x_a}{\partial\varkappa} + \sum_b \Psi_{b,\varkappa}\frac{\partial x_b}{\partial\lambda}\right) - 2\sum_{a,b} a_{a,b}\frac{\partial x_a}{\partial\varkappa}\frac{\partial x_b}{\partial\lambda}. \end{cases}$$

Nun hat man wegen der Gleichung (11^b.)

$$(67.)\qquad \sum_a \Psi_{a,\lambda}\frac{\partial x_a}{\partial\varkappa} + \sum_b \Psi_{b,\varkappa}\frac{\partial x_b}{\partial\lambda} = \frac{d\sum_{a,b} a_{a,b}\frac{\partial x_a}{\partial\varkappa}\frac{\partial x_b}{\partial\lambda}}{dt},$$

mithin kommt durch Einführung der Grössen $\varphi_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}}$ das Resultat

$$(68.) \qquad \sum_{\mathfrak{a}} \Phi_{\mathfrak{a},\lambda} \frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial \varkappa} + \sum_{\mathfrak{b}} \Phi_{\mathfrak{b},\varkappa} \frac{\partial x_{\mathfrak{b}}}{\partial \lambda} = (t-t_0)\frac{d\varphi_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}}}{dt} - 2\varphi_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}},$$

oder

$$(68^{a}.) \qquad \sum_{\mathfrak{a}} \Phi_{\mathfrak{a},\lambda} \frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial \varkappa} + \sum_{\mathfrak{b}} \Phi_{\mathfrak{b},\varkappa} \frac{\partial x_{\mathfrak{b}}}{\partial \lambda} = (t-t_0)^3 \frac{d((t-t_0)^{-2}\varphi_{\mathfrak{k},\mathfrak{l}})}{dt}.$$

Aus demselben folgt, dass, wenn die Functionen $\Phi_{\mathfrak{a},\lambda}$ und $\Phi_{\mathfrak{b},\varkappa}$, die sich nur durch die Zeiger unterscheiden, sämmtlich verschwinden, die Gleichungen (61.) allemal erfüllt sind. Hiermit ist der zweite Theil der in Rede stehenden Behauptung erledigt, und ich wende mich zu dem noch übrigen ersten Theile derselben, nach welchem das identische Verschwinden der Form Ψ die Gültigkeit der Relationen

$$\Phi_{\mathfrak{b},\varkappa} = 0$$

bedingt.

Man kann diese Thatsache erweisen, indem man zeigt, dass die Functionen $\Phi_{\mathfrak{b},\varkappa}$ wieder einem bestimmten System von gewöhnlichen Differentialgleichungen genügen, welches unter den obwaltenden Verhältnissen durch keine anderen als durch verschwindende Werthe befriedigt wird. Bei der Ableitung dieses Systems von Differentialgleichungen muss das System von isoperimetrischen Gleichungen (38.) benutzt werden, weil die Grössen $x_{\mathfrak{a}}$, $x'_{\mathfrak{a}}$ und $x'_{\mathfrak{k}}(0) = \varkappa$ erst von diesem ihre specielle Bedeutung erhalten. Durch die Einführung der Ausdrücke (14.) und die Vertauschung der Zeiger $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nimmt die linke Seite von (38.) die Gestalt an

$$(69.) \qquad F_{\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{a}} a_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} x''_{\mathfrak{a}} + f_{\mathfrak{b}},$$

und das System wird

$$(69^{a}.) \qquad F_{\mathfrak{b}} = 0.$$

Die algebraische Natur der gegenwärtigen Betrachtung bleibt nun durchsichtiger, wenn man zwischen den Functionen $\Psi_{\mathfrak{b},\varkappa}$, $F_{\mathfrak{b}}$ und der Form Ψ eine identische Relation entwickelt, aus der durch die Voraussetzung $F_{\mathfrak{b}}=0$ und das identische Verschwinden von Ψ das erwähnte System von Differentialgleichungen für die Functionen $\Phi_{\mathfrak{b},\varkappa}$ hervorgeht. Um dies zu thun, gebe ich den Functionen $F_{\mathfrak{b}}$ und $\Psi_{\mathfrak{b},\varkappa}$ diese Gestalt

$$(70.) \qquad \begin{cases} \Psi_{\mathfrak{b},\varkappa} = \sum_{\mathfrak{a}} a_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} \dfrac{d\left(\dfrac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial \varkappa}\right)}{dt} + \frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{a}} \dfrac{\partial f_{\mathfrak{b}}(x')}{\partial x'_{\mathfrak{a}}} \dfrac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial \varkappa}, \\ F_{\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{a}} a_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} \dfrac{d^2 x_{\mathfrak{a}}}{dt^2} + \frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{a}} \dfrac{\partial f_{\mathfrak{b}}(x')}{\partial x'_{\mathfrak{a}}} \dfrac{dx_{\mathfrak{a}}}{dt}; \end{cases}$$

z bedeutet jetzt irgend eine Grösse, von der die Variabeln x_a abhängen, und die von der Grösse t unabhängig ist, und wie früher ist $\frac{dx_a}{dt} = x'_a$. Nach einer bekannten Eigenschaft der homogenen Functionen zweiten Grades ist hier

$$\sum_a \frac{\partial f_b(x')}{\partial x'_a} \frac{\partial x_a}{\partial z} = \sum_a \frac{\partial f_b\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)}{\partial\left(\frac{\partial x_a}{\partial z}\right)} x'_a,$$

und in Folge von (11^b.)

$$\frac{\partial f_a\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)}{\partial\left(\frac{\partial x_b}{\partial z}\right)} + \frac{\partial f_b\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)}{\partial\left(\frac{\partial x_a}{\partial z}\right)} = 2\frac{\partial a_{a,b}}{\partial z},$$

$$\frac{\partial f_a(x')}{\partial x'_b} + \frac{\partial f_b(x')}{\partial x'_a} = 2a'_{a,b}.$$

Dadurch gehen die Gleichungen (70.) in die folgenden über:

$$(71.)\quad \begin{cases} \Psi_{b,z} = \sum_a \frac{\partial(a_{b,a}x'_a)}{\partial z} - \frac{1}{2}\sum_a \frac{\partial f_a\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)}{\partial\left(\frac{\partial x_b}{\partial z}\right)} x'_a, \\ F_b = \sum_a \frac{d(a_{b,a}x'_a)}{dt} - \frac{1}{2}\sum_a \frac{\partial f_a(x')}{\partial x'_b} x'_a. \end{cases}$$

Aus denselben ergiebt sich wegen der Unabhängigkeit der nach z und nach t zu nehmenden Differentiationen

$$(72.)\quad \begin{cases} \frac{d\Psi_{b,z}}{dt} - \frac{\partial F_b}{\partial z} = \frac{1}{2}\sum_a \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_a(x')}{\partial x'_b}\right)x'_a + \frac{1}{2}\sum_b \frac{\partial f_b(x')}{\partial x'_b}\frac{\partial x'_b}{\partial z} \\ \qquad - \frac{1}{2}\sum_a \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_a\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)}{\partial\left(\frac{\partial x_b}{\partial z}\right)}\right)x'_a - \frac{1}{2}\sum_b \frac{\partial f_b\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)}{\partial\left(\frac{\partial x_b}{\partial z}\right)} x''_b. \end{cases}$$

Die Gleichungen (70.) liefern für $\frac{\partial x'_b}{\partial z}$ und für x''_b die folgenden Bestimmungen:

$$\Psi_{c,z} - \frac{1}{2}\sum_a \frac{\partial f_c(x')}{\partial x'_a}\frac{\partial x_a}{\partial z} = \sum_a a_{c,a}\frac{\partial x'_a}{\partial z},$$

$$F_c - \frac{1}{2}\sum_a \frac{\partial f_c(x')}{\partial x'_a} x'_a = \sum_a a_{c,a}x''_a,$$

mithin

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

$$(73.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x'_{\mathfrak{b}}}{\partial \varkappa} = \sum\limits_{\mathfrak{c}} \dfrac{A_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{\Delta}\, \Psi_{\mathfrak{c},\varkappa} - \frac{1}{2} \sum\limits_{\mathfrak{c},\mathfrak{a}} \dfrac{A_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{\Delta} \dfrac{\partial f_{\mathfrak{c}}\left(\frac{\partial x}{\partial \varkappa}\right)}{\partial\left(\frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial \varkappa}\right)} x'_{\mathfrak{a}}, \\ x''_{\mathfrak{b}} = \sum\limits_{\mathfrak{c}} \dfrac{A_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{\Delta} F_{\mathfrak{c}} - \frac{1}{2} \sum\limits_{\mathfrak{c},\mathfrak{a}} \dfrac{A_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{\Delta} \dfrac{\partial f_{\mathfrak{c}}(x')}{\partial x'_{\mathfrak{a}}} x'_{\mathfrak{a}}. \end{cases}$$

Die Substitution dieser Ausdrücke in (72.) bringt dann die gesuchte Relation hervor

$$(74.)\quad \begin{cases} \dfrac{d\Psi_{\mathfrak{b},\varkappa}}{dt} - \frac{1}{2} \sum\limits_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}} \dfrac{A_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{\Delta}\, \Psi_{\mathfrak{c},\varkappa} \dfrac{\partial f_{\mathfrak{b}}(x')}{\partial x'_{\mathfrak{b}}} - \dfrac{\partial F_{\mathfrak{b}}}{\partial \varkappa} + \frac{1}{2} \sum\limits_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}} \dfrac{A_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{\Delta} F_{\mathfrak{c}} \dfrac{\partial f_{\mathfrak{b}}\left(\frac{\partial x}{\partial \varkappa}\right)}{\partial\left(\frac{\partial x_{\mathfrak{b}}}{\partial \varkappa}\right)} \\ = \frac{1}{2} \sum\limits_{\mathfrak{a}} \Bigg[\dfrac{\partial}{\partial \varkappa}\left(\dfrac{\partial f_{\mathfrak{a}}(x')}{\partial x'_{\mathfrak{b}}}\right) - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial f_{\mathfrak{a}}\left(\frac{\partial x}{\partial \varkappa}\right)}{\partial\left(\frac{\partial x_{\mathfrak{b}}}{\partial \varkappa}\right)}\right) \\ \qquad + \frac{1}{2} \sum\limits_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}} \dfrac{A_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{\Delta}\left(\dfrac{\partial f_{\mathfrak{c}}(x')}{\partial x'_{\mathfrak{a}}} \dfrac{\partial f_{\mathfrak{b}}\left(\frac{\partial x}{\partial \varkappa}\right)}{\partial\left(\frac{\partial x_{\mathfrak{b}}}{\partial \varkappa}\right)} - \dfrac{\partial f_{\mathfrak{c}}\left(\frac{\partial x}{\partial \varkappa}\right)}{\partial\left(\frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial \varkappa}\right)} \dfrac{\partial f_{\mathfrak{b}}(x')}{\partial x'_{\mathfrak{b}}} \right) \Bigg] x'_{\mathfrak{a}}. \end{cases}$$

Vergleicht man nämlich die rechte Seite von (74.) mit der Definitionsgleichung der Form Ψ in (32.), so erhellt, dass, wenn in Ψ für $dx_{\mathfrak{g}}$ die Grösse $\frac{dx_{\mathfrak{g}}}{dt}$, für $du_{\mathfrak{a}}$ die Grösse $\frac{dx_{\mathfrak{a}}}{dt}$, für $\delta x_{\mathfrak{b}}$ die Grösse $\frac{\partial x_{\mathfrak{b}}}{\partial \varkappa}$ substituirt wird, der partielle Differentialquotient der resultirenden Function $\Psi\left(x', \delta u, x', \frac{\partial x}{\partial \varkappa}\right)$ nach der Grösse $\delta u_{\mathfrak{b}}$, halbgenommen, der rechten Seite von (74.) gleich ist; und diese Relation erhält die folgende Gestalt

$$(74^{a}.)\quad \begin{cases} \dfrac{d\Psi_{\mathfrak{b},\varkappa}}{dt} - \frac{1}{2} \sum\limits_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}} \dfrac{A_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{\Delta}\, \Psi_{\mathfrak{c},\mathfrak{k}} \dfrac{\partial f_{\mathfrak{b}}(x')}{\partial x'_{\mathfrak{b}}} - \dfrac{\partial F_{\mathfrak{b}}}{\partial \varkappa} + \frac{1}{2} \sum\limits_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}} \dfrac{A_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{\Delta} F_{\mathfrak{c}} \dfrac{\partial f_{\mathfrak{b}}\left(\frac{\partial x}{\partial \varkappa}\right)}{\partial\left(\frac{\partial x_{\mathfrak{b}}}{\partial \varkappa}\right)} \\ = \frac{1}{2} \dfrac{\partial \Psi\left(x', \delta u, x', \frac{\partial x}{\partial \varkappa}\right)}{\partial(\delta u_{\mathfrak{b}})}. \end{cases}$$

Jetzt möge die Voraussetzung eintreten, dass die Form Ψ identisch verschwinde, dass die Grössen $x_{\mathfrak{a}}$ das System von Gleichungen $F_{\mathfrak{b}} = 0$ befriedigen, und dass $\varkappa$ eine Integrationsconstante dieses Systems sei, weshalb auch die Gleichungen $\frac{\partial F_{\mathfrak{b}}}{\partial \varkappa} = 0$ Gültigkeit erhalten. Alsdann geht die Relation (74^{a}.) in dieses System von Differentialgleichungen für die Functionen $\Psi_{\mathfrak{b},\varkappa}$ über

$$(75.)\quad \frac{d\Psi_{\mathfrak{b},\varkappa}}{dt} - \frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}} \frac{A_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{\Delta}\, \Psi_{\mathfrak{c},\mathfrak{k}} \frac{\partial f_{\mathfrak{b}}(x')}{\partial x'_{\mathfrak{b}}} = 0.$$

Die Functionen $\Phi_{\mathfrak{b},\varkappa}$ und $\Psi_{\mathfrak{b},\varkappa}$ hängen durch die Gleichung (65^b.) mit einander zusammen. Aus derselben folgt durch Differentiation

$$\frac{d\Phi_{\mathfrak{b},\varkappa}}{dt} = (t-t_0)\frac{d\Psi_{\mathfrak{b},\varkappa}}{dt} + \Psi_{\mathfrak{b},\varkappa} - \sum_{\mathfrak{a}} a'_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} \frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial \varkappa} - \sum_{\mathfrak{a}} a_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} \frac{\partial x'_{\mathfrak{a}}}{\partial \varkappa}$$

und vermöge der Formel (11^b.) und der Einführung des Werthes von $\Psi_{\mathfrak{b},\varkappa}$ aus (70.)

$$\frac{d\Phi_{\mathfrak{b},\varkappa}}{dt} = (t-t_0)\frac{d\Psi_{\mathfrak{b},\varkappa}}{dt} - \tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(x')}{\partial x'_{\mathfrak{b}}} \frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial \varkappa}.$$

Ferner ist

$$\tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}} \frac{A_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{\Delta} \Phi_{\mathfrak{c},\varkappa} \frac{\partial f_{\mathfrak{b}}(x')}{\partial x'_{\mathfrak{b}}} = (t-t_0)\tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}} \frac{A_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{\Delta} \Psi_{\mathfrak{c},\varkappa} \frac{\partial f_{\mathfrak{b}}(x')}{\partial x'_{\mathfrak{b}}} - \tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}} \frac{A_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{\Delta} \sum_{\mathfrak{a}} a_{\mathfrak{c},\mathfrak{a}} \frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial \varkappa} \frac{\partial f_{\mathfrak{b}}(x')}{\partial x'_{\mathfrak{b}}},$$

oder in Folge der Beziehungen zwischen den Grössen $a_{\mathfrak{c},\mathfrak{a}}$ und $A_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}$

$$\tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}} \frac{A_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{\Delta} \Phi_{\mathfrak{c},\varkappa} \frac{\partial f_{\mathfrak{b}}(x')}{\partial x'_{\mathfrak{b}}} = (t-t_0)\tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}} \frac{A_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{\Delta} \Psi_{\mathfrak{c},\varkappa} \frac{\partial f_{\mathfrak{b}}(x')}{\partial x'_{\mathfrak{b}}} - \tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{a}} \frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(x')}{\partial x'_{\mathfrak{b}}} \frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial \varkappa},$$

und daher hat das System (75.) das System von Differentialgleichungen

$$\frac{d\Phi_{\mathfrak{b},\varkappa}}{dt} - \tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}} \frac{A_{\mathfrak{c},\mathfrak{b}}}{\Delta} \Phi_{\mathfrak{c},\varkappa} \frac{\partial f_{\mathfrak{b}}(x')}{\partial x'_{\mathfrak{b}}} = 0 \qquad (76.)$$

zur Folge, welches sich auf die Functionen $\Phi_{\mathfrak{b},\varkappa}$ bezieht und gesucht worden ist.

Bis hierher galt die Bestimmung, unter $\varkappa$ irgend eine Integrationsconstante des Systems zu verstehen, durch welches die Gleichungen $F_{\mathfrak{b}} = 0$ integrirt werden. Nunmehr soll in Betreff der Integration die Voraussetzung wieder eintreten, dass $x_{\mathfrak{a}}$ durch die Grössen t, $x_{\mathfrak{f}}(0)$ und $x'_{\mathfrak{f}}(0)$ dargestellt sei, und die Voraussetzung, dass

$$\varkappa = x'_{\mathfrak{f}}(0)$$

sei. Da bei der in Rede stehenden Integration alle Unterbrechungen der Stetigkeit für das bestimmte von $t=t_0$ sich erstreckende Intervall ausgeschlossen sind, so ist die Function $\Psi_{\mathfrak{b},\mathfrak{f}}$ vermöge der Gleichung (70.) überhaupt, und daher auch für $t=t_0$ eine endliche Grösse. Die Gleichung (65^b.)

$$\Phi_{\mathfrak{b},\varkappa} = (t-t_0)\Psi_{\mathfrak{b},\mathfrak{f}} - \sum_{\mathfrak{a}} a_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} \frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial \varkappa}$$

lehrt also, dass für $t=t_0$ die Function $\Phi_{\mathfrak{b},\varkappa}$ dem Ausdruck $-\sum_{\mathfrak{a}} a_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} \frac{\partial x^{\mathfrak{a}}}{\partial \varkappa}$ gleich wird. Die Grössen $a_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}$ bleiben bei der Substitution $x_{\mathfrak{a}} = x_{\mathfrak{a}}(0)$ ebenfalls endlich, die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial \varkappa} = \frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial x'_{\mathfrak{f}}(0)}$ müssen aber nach einer schon früher angewendeten Bemerkung für $t=t_0$ in die Null übergehen. Also haben die Functionen $\Phi_{\mathfrak{b},\varkappa}$ die Eigenschaft, für $t=t_0$ zu verschwinden. Da nun das System von linearen Differentialgleichungen (76.), so lange die darin

als Coefficienten auftretenden Functionen keine Unterbrechungen der Stetigkeit aufweisen, nur auf Eine Art integrirt werden kann, wenn die der Voraussetzung $t = t_0$ entsprechenden Werthe der $\Phi_{\mathfrak{b},\varkappa}$ gegeben sind *), da ferner die Bestimmung $\Phi_{\mathfrak{b},\varkappa} = 0$ für ein bewegliches t dem System genügt, so ist diese Bestimmung auch die allein gültige **). Das aber sollte bewiesen werden, und dadurch ist die in Betreff der Form Ψ ausgesprochene Behauptung in ihrem ganzen Umfange begründet.

9.

Das identische Verschwinden der Form Ψ, das ist, das Verschwinden von sämmtlichen Coefficienten dieser Form für alle Werthsysteme $x_\mathfrak{a}$, liefert Gleichungen zwischen den Coefficienten der Form $f(dx)$ und den ersten und zweiten partiellen Differentialquotienten derselben, auf welche die Bemerkungen des Artikels 4. anzuwenden sind. Der Coefficient des Products

$$(du_\mathfrak{a}\delta u_\mathfrak{b} - \delta u_\mathfrak{a} du_\mathfrak{b})(dx_\mathfrak{g}\delta x_\mathfrak{h} - \delta x_\mathfrak{g} dx_\mathfrak{h})$$

ist das Aggregat der beiden Bestandtheile

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}] = \frac{\partial^2 a_{\mathfrak{a},\mathfrak{g}}}{\partial x_\mathfrak{b}\partial x_\mathfrak{h}} + \frac{\partial^2 a_{\mathfrak{b},\mathfrak{h}}}{\partial x_\mathfrak{a}\partial x_\mathfrak{g}} - \frac{\partial^2 a_{\mathfrak{a},\mathfrak{h}}}{\partial x_\mathfrak{b}\partial x_\mathfrak{g}} - \frac{\partial^2 a_{\mathfrak{b},\mathfrak{g}}}{\partial x_\mathfrak{a}\partial x_\mathfrak{h}}$$

und

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \tfrac{1}{2}\sum_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}} \frac{A_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}}}{\Delta}(f_{\mathfrak{c},\mathfrak{a},\mathfrak{g}} f_{\mathfrak{d},\mathfrak{b},\mathfrak{h}} - f_{\mathfrak{c},\mathfrak{a},\mathfrak{h}} f_{\mathfrak{d},\mathfrak{b},\mathfrak{g}}).$$

Wie man sieht, ist $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}]$ eine lineare Function von den zweiten partiellen Differentialquotienten der Grössen $a_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}}$, und $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ eine Function zweiten Grades von den ersten partiellen Differentialquotienten derselben Grössen $a_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}}$. Sobald die Gruppe der vier Zeiger $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ und die Gruppe der vier Zeiger $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{g}', \mathfrak{h}'$ nicht identisch ist, so enthalten die entsprechenden Ausdrücke $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}]$ und $[\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{g}', \mathfrak{h}']$ nur verschiedene zweite partielle Differentialquotienten von Grössen $a_{\mathfrak{c},\mathfrak{d}}$. Die Anordnungen derselben Gruppe von vier Zeigern

---

*) Cf. der schon oben angeführte Aufsatz: *Erörterung der Möglichkeit etc.*

**) Es ist durch *Jacobi* bekannt, dass das System $\frac{\partial F_\mathfrak{b}}{\partial z} = 0$, als System linearer Differentialgleichungen für die Grössen $\frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial z}$ aufgefasst, durch die $2n$ Systeme von Lösungen $\frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial x_\mathfrak{t}(0)}$ und $\frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial x'_\mathfrak{t}(0)}$ vollständig integrirt wird. Aus dem Obigen folgt, dass das System $\Phi_{\mathfrak{b},\varkappa} = 0$, als System linearer Differentialgleichungen für die Grössen $\frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial z}$ aufgefasst, wofern die Form Ψ identisch verschwindet, durch die n Systeme von Lösungen $\frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial x'_\mathfrak{t}(0)}$ vollständig integrirt wird.

$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ sind an der erwähnten Stelle betrachtet worden und zeigen drei verschiedene Fälle. Sobald unter den vier Zeigern zwei Paare von gleichen oder Ein Paar von gleichen Zeigern vorkommt, so bringen die verschiedenen Anordnungen Einen nicht verschwindenden Coefficienten der Form Ψ hervor. Sobald aber die vier Zeiger $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ sämmtlich unter einander verschieden sind, so bringen die verschiedenen Anordnungen drei verschiedene Coefficienten der Form Ψ hervor, deren Aggregat immer den Werth Null hat. Nach den gegenwärtig gebrauchten Bezeichnungen ist alsdann

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}]+[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{b}]+[\mathfrak{a}, \mathfrak{h}, \mathfrak{b}, \mathfrak{g}] = 0$$

und

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h})+(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{b})+(\mathfrak{a}, \mathfrak{h}, \mathfrak{b}, \mathfrak{g}) = 0.$$

Wenn nun die sämmtlichen Coefficienten der Form Ψ gleich Null werden sollen, so muss die lineare Function der zweiten Differentialquotienten $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}]$ der quadratischen Function der ersten Differentialquotienten $-(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ gleich sein. Die Anzahl derjenigen Gleichungen, bei welchen die entsprechenden Complexe $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}]$ durch keine Gleichungen des ersten Grades unter einander verbunden sind, lässt sich demnach folgendermassen bestimmen. Unter den verschiedenen Coefficienten der Form Ψ gehören, wie man gesehen hat, $\frac{n(n-1)}{2}$ zu der ersten Categorie $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, dann $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ zu der zweiten Categorie $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$, und $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$ zu der dritten Categorie $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$. Bei der ersten und der zweiten Categorie folgt aus dem Verschwinden eines jeden Coefficienten je eine Gleichung; bei der dritten Categorie zieht aber das Verschwinden von je zwei Coefficienten aus drei zusammengehörigen auch das Verschwinden des dritten nach sich, mithin entsprechen dem Verschwinden von je drei Coefficienten immer nur zwei Gleichungen. Die in Rede stehende Anzahl von Gleichungen ist also gleich dem Aggregat der Zahlen

$$\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{12}$$

oder gleich der Zahl $\frac{n^4-n^2}{12}$. Dieselbe erhält für $n=2, 3, 4$ beziehungsweise die Werthe 1, 6, 20.

Bonn, den 4. Januar 1869.

Remarques sur les fonctions entières à diviseurs binômes.

(Par M. *Hill* à Lund.)

En désignant, comme je le fais à l'ordinaire, par m^0x une fonction entière de x de l'ordre m, on a, si m^0x est divisible par x^n-a^n, l'équation $m^0x=(x^n-a^n).\overline{m-n}^0x$. Soit $e^n=1$, posons $x=ae$, et nous aurons $m^0(ae)=0$, équation que l'on peut mettre sous la forme $A_0+A_1e+A_2e^2+\cdots+A_{n-1}e^{n-1}=0$, les coefficients A désignant des fonctions entières de a^n. Or e ayant n valeurs différentes, il faut, d'après un théorème d'identité (V. Matheseos fundam. n. p. 49), qu'on ait séparément $A_0=A_1=A_2=\cdots=A_{n-1}=0$, et l'on tirera de ces équations non seulement la valeur de a^n, mais encore $n-1$ conditions nécessaires pour que m^0x ait un diviseur de la forme x^n-a^n. Il y a donc deux conditions pour $n=3$, trois pour $n=4$, et ainsi de suite.

Soit $m^0x=m_0+m_1x+m_2x^2+m_3x^3+\cdots+m_mx^m$, et $n=3$, l'on aura

$$\begin{aligned} m_0+m_3a^3+m_6a^6+m_9a^9+\cdots &= 0,\\ m_1+m_4a^3+m_7a^6+m_{10}a^9+\cdots &= 0,\\ m_2+m_5a^3+m_8a^6+m_{11}a^9+\cdots &= 0. \end{aligned}$$

En cherchant le diviseur commun aux premiers membres de ces équations, on trouvera a^3, et en substituant sa valeur dans deux de ces équations, on aura les deux conditions. Pour $m=7$ par exemple, ce qui donne $0=m_8=m_9=\cdots$, on trouve $a^3=-m_2:m_5$ et les deux conditions

$$\begin{aligned} m_0.m_5^2-m_3.m_2m_5+m_6.m_2^2 &= 0,\\ m_1.m_5^2-m_4.m_2m_5+m_7.m_2^2 &= 0. \end{aligned}$$

L'autre facteur $\overline{m-n}^0x$ est le résultat de la division de m^0x par x^n-a^n. Pour $m=7$ et $n=3$ p. e. on a

$$\overline{m-n}^0x=4^0x=7^0x:(x^3-a^3)$$

$$=\{m_0+m_3x^3+m_6x^6+x(m_1+m_4x^3+m_7x^6)+x^2(m_2+m_5x^3)\}:(x^3-a^3)$$

ou bien à l'aide des trois équations antérieures

$$=\{m_3(x^3-a^3)+m_6(x^6-a^6)+x\big(m_4(x^3-a^3)+m_7(x^6-a^6)\big)+x^2m_5(x^3-a^3)\}:(x^3-a^3)$$

$$=m_3+xm_4+x^2m_5+(x^3+a^3)(m_6+x.m_7)=4^0x,$$

expression dans laquelle a^3 devra être remplacée par sa valeur $(-m_2:m_5)$.

Pour $m =$ ou < 11, on tire des trois équations écrites ci-dessus les valeurs v_1, v_2 et v_3 de a^3, a^6 et a^9, et les deux conditions seront $v_2 = (v_1)^2$ et $v_3 = v_1 . v_2$. Pour $m =$ ou > 12, il faudra d'avance éliminer a^{12}, a^{15}, etc.

Dans le cas général on chassera d'abord par une élimination préliminaire les puissances de a dont l'exposant est supérieur à nn, et des équations que l'on retient on tirera les valeurs $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$ de a^n, a^{2n}, $a^{3n}, \ldots a^{nn}$ en forme de déterminants. Cela posé les $n-1$ conditions seront celles qui expriment que ces valeurs forment une progression géométrique continue; savoir: $v_2 = v_1^2$, $v_2^2 = v_1 . v_3$, $v_3^2 = v_2 . v_4$, $v_4^2 = v_3 . v_5$, etc., conditions que l'on peut réunir dans l'équation unique $v_{r+s} = v_r v_s$.

Quant à l'autre facteur on l'obtiendra en employant la formule connue pour $\frac{x^{nr} - a^{nr}}{x^n - a^n}$.

Lund, 1868.

Ueber einige Abbildungsaufgaben.

Aus einer Mittheilung an Herrn *Richelot* in Königsberg.

(Von Herrn *H. A. Schwarz* in Halle.)

Der Umstand, dass das Verständniss mehrerer Arbeiten *Riemanns* anfänglich nur einem kleinen Leserkreise zugänglich war, findet wohl darin seine Erklärung, dass *Riemann* es verschmäht hat, bei der Veröffentlichung seiner allgemeinen Untersuchungen das Eigenthümliche seiner Betrachtungsweise an der vollständigen Durchführung specieller Beispiele ausführlich zu erläutern.

Dies gilt auch von dem in *Riemanns* Dissertation Art. 21 hergeleiteten Satze, welcher mir zu Betrachtungen über Abbildungsaufgaben überhaupt den Anstoss gab, nämlich, dass es möglich sei, die Fläche einer einfach zusammenhängenden Figur auf die Fläche eines Kreises zusammenhangend und in den kleinsten Theilen ähnlich abzubilden und zwar nur auf eine Art so, dass dem Mittelpunkte ein beliebig gegebener innerer Punkt und einem beliebigen Punkte der Peripherie ein beliebig gegebener Punkt der Begrenzung jener Figur entspricht.

Herr *Mertens*, mit dem ich im Wintersemester 1863—64 die Vorlesungen des Herrn *Weierstrass* über die Theorie der analytischen Functionen hörte, machte gelegentlich mir gegenüber die Bemerkung, es sei doch eigenthümlich, dass *Riemann* von einer Function, welche z. B. die Fläche eines Kreises auf die Fläche eines ebenen geradlinigen Dreiecks conform abbilde, bereits die Existenz nachgewiesen habe, während die wirkliche Bestimmung einer solchen Function wegen der in den Ecken liegenden Unstetigkeiten der Begrenzungslinie die Kräfte der Analysis zur Zeit noch zu übersteigen scheine.

Damals war mir kein specieller Fall einer Fläche mit vorgeschriebener Begrenzung bekannt, für den die Aufgabe der Abbildung dieser Fläche auf die Fläche des Kreises bereits mit Erfolg angegriffen worden.

Indem ich als nahe liegende Specialisirung die auf die Fläche eines Kreises abzubildende Figur als von geraden Linien begrenzt und speciell als Quadrat annahm, glaubte ich einen speciellen Fall der allgemeinen Aufgabe gefunden zu haben, dessen vollständige Lösung auch bei dieser Specialisirung

wissenschaftlichen Werth hätte und jedenfalls als eine anschauliche Illustration zum Art. 21 der *Riemann*schen Dissertation willkommen wäre.

Zur Lösung dieser und vieler anderer Abbildungsaufgaben führt das fruchtbare Theorem:

Entspricht bei einer analytischen Function einer stetigen Folge reeller Werthe des complexen Argumentes eine stetige Folge reeller Werthe der Function, so entsprechen je zwei conjugirten Werthen des Argumentes conjugirte Werthe der Function.

In der Ebene der complexen Grösse u sei abgegrenzt ein einfach zusammenhängender Bereich U', dessen Begrenzungslinie ein endliches Stück l der reellen Axe enthält.

Eine analytische Function t des complexen Argumentes u, $t = f(u)$, sei eindeutig definirt mit dem Charakter einer ganzen Function für alle dem Innern von U' angehörenden Werthe von u; d. h. wenn u_0 einen beliebigen im Innern von U' liegenden Werth von u bezeichnet, so ist $f(u)$ für die in der Umgebung desselben liegenden Werthe von u in eine nach ganzen positiven Potenzen von $u - u_0$ fortschreitende Reihe entwickelbar, welche für alle, dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen Werthe von $u - u_0$ convergirt. Bei der Annäherung von u an die Begrenzungslinie bleibe der Werth von t stets endlich und sei für alle Punkte der Linie l reell; während die Variable u die Linie l durchläuft, ändere sich der zugehörende reelle Werth der Function t stetig.

Dem Gebiete U' entspricht ein Gebiet U'', dessen Punkte zu den Punkten von U' in Bezug auf die reelle Axe symmetrisch liegen.

Für alle Punkte des Bereiches U'' werde eine analytische Function t dadurch erklärt, dass in den Bereichen U' und U'' conjugirten Werthen von u conjugirte Werthe von t zugeordnet werden. Denkt man sich die beiden Gebiete U' und U'' längs der Strecke l mit einander verbunden, so entsteht ein einfach zusammenhangender Bereich $U' + U''$. Für alle dem Innern desselben angehörenden Werthe von u ist der Werth der Grösse t eindeutig definirt und zwar für die im Innern von U' und für die im Innern von U'' liegenden Werthe von u als analytische Function dieses Argumentes mit dem Charakter einer ganzen Function. Beim Ueberschreiten der Linie l und längs derselben ändert sich der Werth von t stetig. Hieraus folgt, dass die für den Bereich U'' erklärte Function t eine analytische Fortsetzung der für den Bereich U' erklärten Function ist und zwar eine Fortsetzung derselben über die

Linie l hinaus. Wenn, wie vorausgesetzt werden mag, der Bereich $U'+U''$ die Ebene (u) überall nur einfach bedeckt, kann der Beweis dieser Behauptung folgendermassen geführt werden.

Nach einem Satze von *Cauchy* hat, wenn u_0 einen dem Innern von U' angehörenden Werth von u bezeichnet, das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(u)}{u-u_0}\,du,$$

wenn dasselbe im positiven Sinne über die Begrenzungslinien des Bereiches U' oder über diejenige des Bereiches U'' erstreckt wird, im ersten Falle den Werth $f(u_0)$, im zweiten den Werth Null. Bei der Addition dieser beiden Integrale heben sich die längs der Linie l zweimal und in entgegengesetztem Sinne auszuführenden Integrationen weg, und es stellt die Gleichung

$$f(u_0) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(u)}{u-u_0}\,du,$$

wobei das Integral im positiven Sinne über die Begrenzung des Bereiches $U'+U''$ zu erstrecken ist, für alle im Innern dieses Bereiches liegenden Werthe von u_0 eine stetige Function dieses Argumentes dar, deren Werthe mit den Werthen der Function $t=f(u)$ überall übereinstimmen.

Hieraus folgt, dass die so erklärte Function auch für alle dem Innern der Strecke l angehörenden Werthe von u den Charakter einer ganzen Function besitzt.

Es entsprechen also unter den gemachten Voraussetzungen conjugirten Werthen des Argumentes conjugirte Werthe der Function oder geometrisch: die Abbildung der Ebene (u) auf die Ebene (t) ist symmetrisch in Bezug auf die reellen Axen beider Ebenen: symmetrischen Punkten entsprechen symmetrische Bilder.

Macht man analytische Fortsetzungen der Function $t=f(u)$ symmetrisch auf beiden Seiten der reellen Axe der Ebene (u), so gelangt man zu dem Resultate, dass singuläre Punkte irgend welcher Art entweder einzeln auf der reellen Axe oder paarweise symmetrisch zu beiden Seiten derselben liegen. Dieser Satz lässt sich sofort auf den Fall ausdehnen, dass bei der Abbildung durch eine analytische Function einem Stücke einer in dem Bereiche des Argumentes liegenden oder einen Theil der Begrenzung desselben bildenden geraden Linie wieder ein Stück einer geraden Linie in derjenigen Ebene entspricht, deren Punkte die Werthe der analytischen Function geometrisch darstellen.

Bei der speciellen Aufgabe der conformen Abbildung der Fläche eines Quadrates auf die Fläche eines Kreises lag die Vermuthung nahe, dass, wenn festgesetzt wurde, es solle dem Mittelpunkte des Quadrates der Mittelpunkt des Kreises entsprechen, die Bilder der vier Geraden, welche Symmetrieaxen des Quadrates sind, ebenfalls gerade Linien sein möchten. Diese Ueberlegung ergab die Lage der den vier Ecken des Quadrates bei der speciellen Festsetzung entsprechenden auf der Peripherie des Kreises liegenden vier singulären Punkte.

Nun konnte die Lösung der angegebenen Aufgabe dadurch augenscheinlich vereinfacht werden, dass an die Stelle der Fläche des Kreises die Fläche einer Halbebene gesetzt wurde, welche aus jener durch Verwandlung mittelst reciproker Radii vectores erhalten werden kann; und zwar liegt die Vereinfachung, welche hierdurch herbeigeführt wird, in dem Umstande, dass nun die Begrenzungen beider auf einander abzubildenden Bereiche geradlinig sind.

Nach dem oben angegebenen allgemeinen Gesetze kann demnach die abbildende Function über den Bereich des Innern des Quadrates hinaus, für welchen sie ursprünglich als erklärt gedacht wird, analytisch fortgesetzt werden.

Wird der Mittelpunkt der Transformation in einem der singulären Punkte auf der Peripherie des Kreises angenommen, so ergiebt sich, dass die Punkte der reellen Axe $t=\infty$, $t=-1$, $t=0$, $t=+1$ als singuläre Punkte angenommen werden können, während die auf der positiven Seite der reellen Axe liegende Halbebene eine conforme Abbildung des Innern des Kreises ist.

Die gestellte Aufgabe verlangt, wenn die Lage eines Punktes im Innern des gegebenen Quadrates durch die complexe Grösse u bestimmt wird, dass die Variable t für alle im Innern des gegebenen Quadrates liegenden Werthe von u als analytische Function von u mit dem Charakter einer ganzen Function eindeutig definirt sei, und dass die Werthe von t, welche den auf dem Umfange des Quadrates liegenden Werthen von u entsprechen, reell sind.

Der Bereich des Argumentes u kann nun nach dem oben angegebenen Gesetze zunächst auf das Innere von vier an das gegebene Quadrat anstossenden symmetrisch liegenden Quadraten und durch wiederholte Anwendung auf einen beliebig grossen Bereich der Ebene (u) ausgedehnt werden.

Es ergiebt sich hierbei, dass die Function t auch bei dieser Erweiterung des Gebietes ihres Argumentes eine für alle endlichen Werthe von u eindeutige und zwar doppelt periodische Function von u sein muss, während das Verhältniss zweier Fundamentalperioden gleich $\sqrt{-1}$ ist.

Hiermit ist schon auf die lemniscatischen Functionen hingewiesen. —

Die Begrenzung des Quadrates hat in den vier Ecken desselben singuläre Punkte. Diese Punkte müssen bei der Forderung, dass die Fläche des Quadrates in den kleinsten Theilen ähnlich auf die Fläche des Kreises oder der Halbebene abgebildet werden soll, ausgenommen werden, sonst würde die gestellte Aufgabe eine nicht zu erfüllende Forderung enthalten.

Jedes in der Nähe einer Ecke des Quadrates liegende Stück der Fläche desselben, ein in der Nähe des Scheitels liegendes Stück der Fläche eines rechten Winkels, muss durch die abbildende Function auf einen flachen Winkel abgebildet werden.

Es entsteht hieraus die Aufgabe, die allgemeinste Function aufzufinden, durch welche der in der Nähe des Scheitels $u=0$ liegende Theil der Fläche eines Winkels $\alpha\pi$ $[\alpha>0]$ in der Ebene $u=re^{i\varphi};\ 0\leqq\varphi\leqq\alpha\pi;\ 0<r<r_0$ auf die Ebene $t=\varrho e^{i\psi},\ 0\leqq\psi\leqq\pi$ conform so abgebildet wird, dass innerhalb der angegebenen Grenzen jedem Punkte $u=re^{i\varphi}$ ein stetig mit ihm fortrückender Punkt $t=\varrho e^{i\psi}$ entspricht, während die Werthe

$$r=0,\ \varrho=0;\quad \varphi=0,\ \psi=0;\quad \varphi=\alpha\pi,\ \psi=\pi$$

einander entsprechen.

Die einfachste Function, welche eine solche Abbildung vermittelt, ist $v=u^{\frac{1}{\alpha}}$, und jede andere Function t, welche eine Abbildung mit den angegebenen Eigenschaften ebenfalls herbeiführt, besitzt, als Function von v betrachtet, nach dem obigen Theoreme für den Werth $v=0$ und die in seiner Umgebung liegenden Werthe von v den Charakter einer ganzen Function. Ebenso ergiebt sich auch umgekehrt v als eine für den Werth $t=0$ und die in seiner Umgebung liegenden Werthe von t eindeutige Function dieser Grösse mit dem Charakter einer ganzen Function.

Man erhält daher folgende analytische Darstellungen:

$$v=u^{\frac{1}{\alpha}};\quad t=Cv\,(1+a_1v+a_2v^2+\cdots),$$

$$v=\frac{1}{C}\cdot t(1+b_1t+b_2t^2+\cdots),$$

$$u=v^{\alpha};\quad u=\frac{1}{C^{\alpha}}\cdot t^{\alpha}\,(1+c_1t+c_2t^2+\cdots).$$

Die Constante C ist von Null verschieden und positiv; die Coefficienten a, b, c haben sämmtlich reelle Werthe; letzteres folgt daraus, dass allen hinreichend kleinen positiven Werthen von u, beziehlich von v wieder positive Werthe von t entsprechen sollen.

Bei einer Abbildungsaufgabe ist die Lage und absolute Grösse der Figur in der Ebene (u), auf welche eine gegebene Figur in der Ebene (t) abgebildet wird, im Allgemeinen gleichgültig. Hierdurch werden in die allgemeine Lösung der Abbildungsaufgabe zwei willkürliche Constanten eingeführt, welche diese Lage und absolute Grösse bestimmen: Ist $u = f(t)$ eine Function, welche die Figur T in der Ebene (t) auf eine Figur U in der Ebene (u) abbildet, so ist auch $u' = C_1 u + C_2$ eine solche Function, nur liegt die entsprechende Figur U' in der Ebene (u') an einer anderen Stelle, ist in einem anderen Massstabe ausgeführt und gegen die vorige Lage gedreht. Wenn es nun darauf ankommt, die charakteristischen Eigenschaften der Abbildung einer Figur T auf eine Figur U auszudrücken, so muss eine Abhängigkeit zwischen den Grössen u und t aufgesucht werden, welche von der besonderen Lage und der absoluten Grösse der Figur U in der Ebene (u) unabhängig ist, d. h. es ist eine Differentialgleichung aufzustellen, in deren allgemeinem Integrale die Constanten C_1 und C_2 als Integrationsconstanten auftreten.

Es ergiebt sich

$$\frac{du'}{dt} = C_1 \cdot \frac{du}{dt},$$

$$\frac{d}{dt} \log \frac{du'}{dt} = \frac{d}{dt} \log \frac{du}{dt}.$$

Diese Function ist also von der besonderen Lage und absoluten Grösse der Figur U in der Ebene (u) unabhängig.

Der Uebergang von u zu $\frac{du}{dt}$ und $\frac{d}{dt} \log \frac{du}{dt}$ ist insofern ein wichtiger Schritt, weil alle diejenigen Werthe von t, für welche $\frac{du}{dt}$ gleich Null oder unendlich, $\frac{d}{dt} \log \frac{du}{dt}$ unendlich gross wird, für die Abbildungsaufgabe als singuläre aufzufassen sind, in denen von einer ähnlichen Abbildung im eigentlichen Sinne nicht mehr die Rede sein kann.

In dem eben betrachteten Falle der Abbildung eines Winkels π auf einen Winkel $\alpha\pi$ ist

$$\frac{d}{dt} \log \frac{du}{dt} = \frac{\alpha - 1}{t} + d_1 + d_2 t + \cdots.$$

Diese Function hat also in der Umgebung des Werthes $t = 0$ den Charakter einer gebrochenen rationalen Function. Die Coefficienten $d_1 \ldots$ haben sämmtlich reelle Werthe, und es ist mithin der Werth von $\frac{d}{dt} \log \frac{du}{dt}$ für diejenigen reellen Werthe von t, für welche die Reihe convergirt, ebenfalls reell. —

Handelt es sich darum, die Fläche einer Figur T in der Ebene (t) auf einen von einer einfachen (d. h. durch keinen Punkt mehr als einmal gehenden) Linie begrenzten, ganz im Endlichen liegenden Bereich U in der Ebene (u) abzubilden, so ist im Voraus bekannt, dass $\frac{du}{dt}$ für keinen im Innern von T liegenden Punkt gleich Null oder unendlich gross werden kann, dass daher $\frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt}$ für alle diese Werthe von t den Charakter einer ganzen Function besitzen muss.

Im vorliegenden Falle sind $t=-1$, $t=0$, $t=+1$ die im Endlichen liegenden singulären Werthe der Grösse t; α ist gleich $\frac{1}{2}$. Die Function

$$\frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}\right),$$

welche für alle reellen Werthe von t ebenfalls reelle endliche Werthe besitzt, hat für alle endlichen Werthe von t, deren imaginärer Theil positiv ist, den Charakter einer ganzen Function, also hat dieselbe für alle endlichen Werthe von t den Charakter einer ganzen Function. Für die unendlich grossen Werthe von t ergiebt sich die Entwickelung

$$u-u_\infty = -C'i\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}\left(1+c_1'\cdot\frac{1}{t}+c_2'\cdot\frac{1}{t^2}+\cdots\right),$$

mithin

$$\frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt} = -\tfrac{3}{2}\cdot\frac{1}{t}+d_1'\cdot\frac{1}{t^2}+d_2'\cdot\frac{1}{t^3}+\cdots,$$

also wird die Function $\frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt}$ für alle unendlich grossen Werthe von t unendlich klein, es ist daher $\frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt}$ eine rationale Function von t und zwar gleich $-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}\right)$. Hieraus ergiebt sich durch Integration

$$\log\frac{du}{dt} = -\tfrac{1}{2}\log 4t(1-t^2)+\log C_1,$$

$$u = C_1\int^t\frac{dt}{\sqrt{4t(1-t^2)}}.$$

Man kann sich leicht überzeugen, dass in der That durch das lemniscatische Integral

$$u' = \int_0^t\frac{dt}{\sqrt{4t(1-t^2)}}$$

das Innere jeder der beiden Halbebenen, in welche die Ebene (t) durch die

reelle Axe getheilt wird, auf das Innere je eines Quadrates mit der Seite $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{4t(1-t^2)}}$ conform abgebildet wird. Durch die Substitution $s = \frac{t-i}{t+i}$ geht man von der auf der positiven Seite der reellen Axe der Ebene t liegenden Halbebene auf die Fläche des in der Ebene (s) liegenden mit dem Radius 1 um den Punkt $s = 0$ beschriebenen Kreises über.

Durch die Functionen

$$u = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}}, \qquad s = \operatorname{sinam} u, \qquad (k = \sqrt{-1})$$

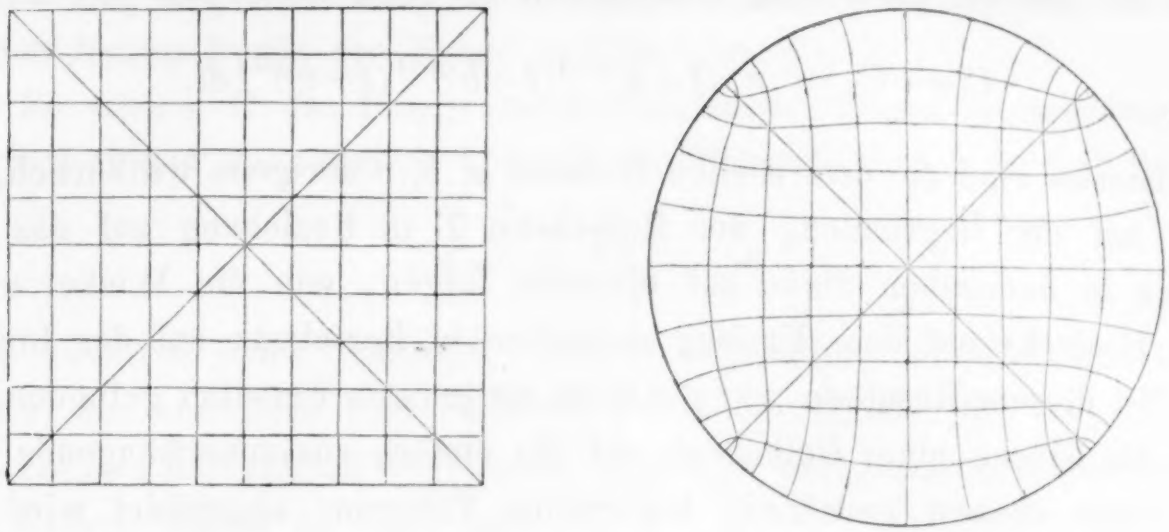
werden die in der Ebene (s) liegende Fläche des um den Punkt $s = 0$ mit dem Radius 1 beschriebenen Kreises und die Fläche des in der Ebene (u) liegenden Quadrates mit den Ecken K, Ki, $-K$, $-Ki$, wo $K = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^4}}$, zusammenhängend und in den kleinsten Theilen ähnlich auf einander abgebildet.

Um diese Abbildung durch eine Zeichnung zu veranschaulichen, habe ich für die aus $\frac{1}{10}K$ und $\frac{1}{10}Ki$ ganzzahlig zusammengesetzten Werthe von u, soweit sie für diesen Zweck in Betracht kommen, die entsprechenden Werthe von s berechnet *) und danach die folgende Zeichnung entworfen, in welcher die Figur des Quadrates und die des Kreises um 45^0 gedreht erscheinen.

---

*) Tabelle der Werthe, welche die Function $\operatorname{sinam} u$ $(k = \sqrt{-1})$ für die aus $\frac{1}{10}K$ und $\frac{1}{10}Ki$ ganzzahlig zusammengesetzten Werthe $u = \frac{m+ni}{10}K$ annimmt, wenn $m \geqq n \geqq 0$, $m+n \leqq 10$.

n												
5						0,7071 +0,7071i						
4					0,5407 +0,5407i	0,6978 +0,5336i	0,8633 +0,5047i					
3				0,3971 +0,3971i	0,5366 +0,3941i	0,6792 +0,3815i	0,8209 +0,3525i	0,9537 +0,3008i				
2			0,2627 +0,2627i	0,3956 +0,2617i	0,5291 +0,2571i	0,6608 +0,2455i	0,7866 +0,2235i	0,8995 +0,1877i	0,9906 +0,1367i			
1		0,1311 +0,1311i	0,2624 +0,1309i	0,3934 +0,1299i	0,5228 +0,1268i	0,6481 +0,1202i	0,7649 +0,1084i	0,8671 +0,0903i	0,9476 +0,0653i	0,9904 +0,0344i		
0	0	0,1311	0,2621	0,3924	0,5205	0,6436	0,7574	0,8563	0,9335	0,9830	1	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	m



Durch diese Abbildung erhält der von *Abel* bewiesene Satz, dass der Werth von $\sin\mathrm{am}\frac{K}{2^n \pm i}$, überhaupt von $\sin\mathrm{am}\frac{(p+qi)K}{2^{2n}+1}$ sich durch Auflösung von quadratischen Gleichungen ergiebt, wenn $2^{2n}+1$ eine Primzahl, p und q ganze Zahlen sind, die geometrische Bedeutung, dass die den Punkten im Innern des Quadrates $u = \frac{(p+qi)K}{2^{2n}+1}$ entsprechenden Punkte s im Innern des Kreises durch geometrische Constructionen, welche nur die Anwendung des Zirkels und Lineals erfordern, gefunden werden können.

Tritt an die Stelle des Quadrates ein Rechteck, dessen Seiten sich wie $2K$ zu K' verhalten, so wird die Abbildung der Halbebene T auf ein dem vorgelegten Rechtecke ähnliches Rechteck vermittelt durch das elliptische Integral

$$u = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

wenn der Modul k aus der Gleichung

$$k = 4\sqrt{q}\cdot\left\{\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}\right\}^4$$

bestimmt wird, in welcher $q = e^{-\frac{K'}{K}\pi}$ zu setzen ist.

Wenn es sich darum handelt, das Innere einer Halbebene T auf das Innere eines geradlinigen Dreiecks mit den Winkeln $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$ conform abzubilden, so erhält man durch eine der angegebenen Schlussfolgerung ganz

analoge für die die Abbildung vermittelnde Function die Form

$$C_1 u + C_2 = \int^t (t-a)^{\alpha-1}(t-b)^{\beta-1}(t-c)^{\gamma-1} dt.$$

Hierbei sind die drei reellen Grössen a, b, c übrigens willkürlich, wenn sie nur auf der Begrenzung der Halbebene T in Beziehung auf das Innere derselben in demselben Sinne auf einander folgen, wie die Winkel $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$ des Dreiecks auf dem Umfang desselben in Beziehung auf das Innere.

Mit diesem Resultate war die Form derjenigen Function gefunden, durch welche die Fläche einer Halbebene auf die einfach zusammenhangende Fläche irgend eines ebenen geradlinig begrenzten Polygons abgebildet wird. Nur können in dem allgemeinen Falle eines n-Ecks von den n Grössen a, b, c, d . . . nur drei willkürlich gewählt werden, die übrigen $n-3$ sind durch die gegebenen Verhältnisse der Längen der einzelnen Seiten bestimmt.

Ist das Vieleck ein reguläres n-Eck und wird die Fläche der Halbebene durch die Fläche eines Kreises ersetzt, so wird diejenige Abbildung der Fläche des Kreises auf die Fläche des n-Ecks, bei welcher die Mittelpunkte beider Figuren einander entsprechen, durch die Function

$$u = \int_0^s \frac{ds}{(1-s^n)^{\frac{2}{n}}}$$

herbeigeführt.

Diese hier angegebenen Resultate habe ich im Frühjahre 1864 im mathematischen Seminar der Berliner Universität vorgetragen und bei meiner Promotion der philosophischen Facultät derselben Universität vorgelegt.

Im August 1866 sind dieselben von Herrn *Weierstrass* der Berliner Akademie mitgetheilt worden.

In Beziehung auf die Aufgabe der Abbildung der Fläche eines geradlinigen Polygons auf die Fläche eines Kreises hatte ich die Freude, die Untersuchungen des Herrn *Christoffel* über diesen Gegenstand: Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie, Annali di Matematica, Tomo I° 1867, den meinigen begegnen zu sehen.

Den Nachweis der Möglichkeit der Constantenbestimmung streng zu führen, ist mir für den Fall $n = 4$ gelungen; für den allgemeinen Fall verdanke ich einen strengen Beweis hierfür einer gütigen Mittheilung des Herrn *Weierstrass*.

Die angegebene Formel lässt sich leicht auf den Fall ausdehnen, dass

das geradlinig begrenzte Polygon in seinem Innern Windungspunkte oder den unendlich fernen Punkt der Ebene enthält.

So wird z. B. das Innere des Kreises in der Ebene (s) mit dem Mittelpunkte $s=0$ und dem Radius 1 durch die Formel

$$u = \int^{s} \frac{\sqrt{1+s^4}}{s^2}\, ds$$

auf das Aeussere eines Quadrates conform abgebildet; dem Mittelpunkte $s=0$ entspricht der unendlich weit entfernte Punkt der Ebene (u).

Hiermit ist zugleich die Wärmeaufgabe für das Aeussere eines Quadrates als im Princip gelöst zu betrachten. —

Es lag nun der Wunsch nahe, auch für die Abbildung einer von einer stetig gekrümmten Linie begrenzten Fläche auf die Fläche eines Kreises ein einfaches Beispiel zu besitzen, und welche Figur konnte sich hierzu eher darbieten als die Ellipse?

Hier führte die Untersuchung der durch die einfacheren analytischen Functionen vermittelten Abbildungen auf einem befriedigenden Wege zum Ziel.

Das Innere einer Parabel in der Ebene (u) mit dem Brennpunkte $u=0$ und dem Scheitel $u=1$ wird auf das Innere eines Kreises in der Ebene (s) mit dem Mittelpunkte $s=0$ und dem Radius 1 abgebildet durch die Function

$$s = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{u}\right).$$

Das Innere einer Ellipse mit den Brennpunkten $u=\pm 1$ und den Scheiteln $u=\pm a,\ \pm bi$ wird durch die Function

$$s = \operatorname{sin\,am}\left(\frac{2K}{\pi}\arcsin u\right)$$

auf das Innere eines Kreises mit dem Mittelpunkte $s=0$ und dem Radius $\frac{1}{\sqrt{k}}$ abgebildet, wenn der Modul k durch die Gleichungen

$$q=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2, \qquad k=4\sqrt{q}\left\{\frac{(1+q^2)(1+q^4)\ldots}{(1+q)(1+q^3)\ldots}\right\}^4$$

bestimmt wird.

Die einfachste krumme Linie ist der Kreis. Bei der Aufgabe, die Fläche einer von Kreisbogenstrecken begrenzten Figur in der Ebene (u) auf die Fläche einer Halbebene T abzubilden, führt eine der oben für die Abbil-

dung geradlinig begrenzter Polygone angegebenen ganz analoge Schlussfolgerung zum Ziele.

Wenn die von Kreisbogen begrenzte Figur in der Ebene (u) durch die Function

$$u' = \frac{C_1 u + C_2}{C_3 u + C_4}$$

auf eine Ebene (u') abgebildet wird, so ist die entsprechende Figur in der Ebene (u') ebenfalls von Kreisbogen begrenzt, unter denen sich auch geradlinige Strecken befinden können.

Um ein für alle diese Abbildungen, welche aus einander durch Transformation mittelst reciproker Radii vectores abgeleitet werden können, zugleich geltendes Resultat zu erhalten, eliminire man die Constanten C.

Es ist

$$\frac{d}{dt}\log\frac{du'}{dt} = \frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt} - 2\frac{C_3}{C_3 u + C_4},$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\log\frac{du'}{dt} = \frac{d^2}{dt^2}\log\frac{du}{dt} + 2\frac{C_3^2}{(C_3 u + C_4)^2}.$$

Bezeichnet man die Function

$$\frac{d^2}{dt^2}\log\frac{du}{dt} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}\log\frac{du}{dt}\right)^2 \text{ mit } \Psi(u, t),$$

so folgt hieraus, dass $\Psi(u', t) = \Psi(u, t)$ ist, dass mithin der Ausdruck Ψ von den Constanten C unabhängig ist.

Zwei eine Ecke der Begrenzungslinie der Figur bildende Kreisbogen mögen mit einander den im Innern der Figur liegenden Winkel $\alpha\pi$ einschliessen. Die Constanten C lassen sich so wählen, dass dieser von zwei Kreisbogenstrecken gebildeten Ecke in der Ebene (u) eine von zwei geradlinigen Strecken gebildete Ecke in der Ebene (u') entspricht.

Dann hat, wenn dem Eckpunkte der Werth $t = t_0$ entspricht, die Function $\frac{d}{dt}\log\frac{du'}{dt}$ für die in der Umgebung des Werthes $t = t_0$ liegenden Werthe von t nach dem Obigen die Entwickelung

$$\frac{\alpha - 1}{t - t_0} + d_1 + d_2(t - t_0) + \cdots,$$

in welcher die Coefficienten d reell sind.

Also hat die Function $\Psi(u, t) = \Psi(u', t)$ die Entwickelung

$$\tfrac{1}{2}\frac{1 - \alpha^2}{(t - t_0)^2} + \frac{\delta_1}{t - t_0} + \delta_2 + \delta_3(t - t_0) + \cdots,$$

in welcher die Coefficienten δ ebenfalls reell sind.

Enthält das Kreisbogenpolygon in seinem Innern keinen Windungspunkt, so hat die Function $\Psi(u, t)$ für alle im Innern der Halbebene liegenden Werthe von t den Charakter einer ganzen Function; da sie für alle reellen Werthe von t ebenfalls reelle Werthe hat und den Charakter einer rationalen Function besitzt, so ist dieselbe eine rationale Function $F(t)$ von t.

Die Aufgabe der Abbildung der Fläche eines von Kreisbogen gebildeten Polygons auf die Fläche einer Halbebene ist also zurückgeführt auf die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\Psi(u, t) = F(t)$$

und die Bestimmung einer Anzahl Constanten.

Diese Lösung lässt sich leicht auch auf den Fall ausdehnen, dass Windungspunkte im Innern des Kreisbogenpolygons enthalten sind; es wird die rationale Function $F(t)$ in diesem Falle auch für complexe Werthe von t unendlich gross, und die Anzahl der zu bestimmenden Constanten und der zu erfüllenden Bedingungsgleichungen wird vergrössert.

Es ist leicht zu zeigen, dass das allgemeine Integral der Differentialgleichung $\Psi(u, t) = F(t)$ sich als Quotient zweier Lösungen derselben linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Functionen als Coefficienten darstellen lässt. Diese Bemerkung verdanke ich einer gütigen Mittheilung des Herrn *Weierstrass*.

Ist die abzubildende Figur ein Kreisbogendreieck, so ist die lineare Differentialgleichung diejenige der hypergeometrischen Reihe, und die Bestimmung der Constanten ist ohne Auflösung transcendenter Gleichungen ausführbar.

Vermittelst des als Function der oberen Grenze betrachteten Integrals

$$u - u_0 = \int^t (t-a)^{\alpha-1}(t-b)^{\beta-1}(t-c)^{\gamma-1}dt,$$

in welchem a, b, c reelle, α, β, γ positive Constanten bezeichnen, welche der Bedingung $\alpha+\beta+\gamma = 1$ genügen, wird das Innere der beiden Halbebenen T' und T'', in welche die Ebene (t) durch die reelle Axe getheilt wird, auf das Innere zweier geradlinigen und einander symmetrischen Dreiecke U' und U'' mit den Winkeln $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$ conform abgebildet.

Die Ebene (t) möge durch Verwandlung mittelst reciproker Radii vectores auf die Oberfläche einer Kugel conform so abgebildet werden, dass der

reellen Axe der Ebene (t) ein grösster Kreis der Kugel entspricht. Es entsprechen dann symmetrischen Punkten auf beiden Halbkugeln symmetrische Bilder in den Flächen der beiden ebenen Dreiecke.

Bringt man nun die beiden Dreiecke in eine solche Lage, dass ihre entsprechenden Ecken zusammenfallen, und denkt sich, dass ihre in der Vorstellung von einander verschiedenen und getrennten Flächen die Punkte der Begrenzungslinie gemeinsam haben und längs derselben eine Falte bildend zusammenhangen, so erhält man eine geschlossene einfach zusammenhangende, ein Dreieck mit den Winkeln $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$ überall doppelt bedeckende Fläche U. Längs der Begrenzung dieses Dreiecks besitzt die Fläche U eine Falte, längs welcher die beiden Blätter mit einander stetig zusammenhangen. Dieselbe kann auch aufgefasst werden als Oberfläche eines dreiseitigen Prisma mit unendlich kleiner Höhe.

Dieser Fläche entspricht nun eindeutig die ganze Kugelfläche. In allen Punkten mit Ausnahme der den Ecken entsprechenden ist die Abbildung in den kleinsten Theilen ähnlich, in diesen Punkten ist die Abbildung eindeutig und stetig.

Wenn über den Integrationsweg nichts festgesetzt ist, so ist die Integralfunction u eine unendlich vieldeutige Function der oberen Grenze x, und auch x ist im Allgemeinen eine unendlich vieldeutige Function von u.

(Ausnahmen treten nur für folgende Werthsysteme von $\alpha\ \beta\ \gamma$ ein:

$$\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{4}\ \tfrac{1}{4},\quad \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{6},\quad \tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{3}\ \tfrac{1}{3},\quad \tfrac{2}{3}\ \tfrac{1}{6}\ \tfrac{1}{6}.$$

Vergl. *Christoffel* a. a. O. pag. 99 und *Briot* et *Bouquet*, Théorie des fonctions doublement périodiques, pag. 306 u. 308.)

Die verschiedenen Werthe, welche u bei irgendwie angenommenem Integrationswege für einen bestimmten Werth von x erlangen kann, lassen sich stets aus einem dieser Werthe mit Hülfe der Fläche U geometrisch ableiten, indem man sich vorstellt, dass das Netz der Fläche U durch Abwickelung derselben unendlich oft auf die Ebene (u) ausgebreitet wird.

Es ergiebt sich auf dieselbe Weise aus der Abbildung der Fläche eines Kreises auf die Fläche eines geradlinigen n-Ecks die Abbildung der Oberfläche einer Kugel auf die beiden Seiten der Fläche dieses n-Ecks.

Die Umkehrung dieser Aufgabe ist ein specieller Fall folgender allgemeineren Aufgabe: Die geschlossene einfach zusammenhängende Oberfläche eines von ebenen Flächen begrenzten Polyeders auf die Oberfläche einer Kugel eindeutig so abzubilden, dass mit Ausnahme der den Ecken ent-

sprechenden Punkte die Abbildung überall in den kleinsten Theilen ähnlich, in diesen Punkten aber die Stetigkeit nicht unterbrochen sei.

Unter der Voraussetzung, dass eine Abbildung mit den angegebenen Eigenschaften überhaupt möglich ist, gelangt man zu folgender Lösung: Die Oberfläche des Polyeders wickele man auf eine Ebene ab und bezeichne die complexe Coordinate eines Punktes innerhalb des auf die Ebene ausgebreiteten Netzes der Polyederoberfläche mit u. Die Oberfläche der Kugel bilde man direct eindeutig auf eine Ebene (x) ab, so ist zu setzen

$$\frac{du}{dx} = C\Pi(x-x_\nu)^{\alpha_\nu-1}.$$

In dieser Formel, welche ich Herrn *Weierstrass* im Jahre 1866 mitgetheilt habe, bedeutet x_ν den einer Ecke des Polyeders entsprechenden Werth von x, während die Summe der in dieser Ecke zusammenstossenden Kantenwinkel gleich $2\alpha_\nu\pi$ ist und das Product Π über alle Ecken des Polyeders zu erstrecken ist. Die über alle Ecken des Polyeders erstreckte Summe $\Sigma(\alpha_\nu-1)$ hat den Werth -2, wenn der Werth $x=\infty$ nicht einer Ecke des Polyeders entspricht, wie aus dem *Euler*schen Satze über Polyeder folgt.

Die Richtigkeit dieser Formel lässt sich — die Möglichkeit einer solchen Abbildung immer noch vorausgesetzt — durch die Betrachtung der Function $\frac{d}{dx}\log\frac{du}{dx}$ beweisen, auch lässt sich zeigen, dass die Constanten x_ν bis auf drei willkürliche Constanten einer gebrochenen Substitution ersten Grades durch die Bedingungen der Aufgabe eindeutig bestimmt sind; es ist mir indessen bis jetzt nicht gelungen, den strengen Nachweis zu führen, dass es für jedes vorgegebene Polyeder möglich ist, diese Constanten den Bedingungen der Aufgabe gemäss wirklich zu bestimmen. In einigen Fällen ist diese Constantenbestimmung a priori ausführbar, z. B. wenn das vorgegebene Polyeder ein reguläres ist.

So wird die Abbildung der Kugeloberfläche auf die Oberfläche eines Würfels vermittelt durch das Integral

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt[4]{1-14x^4+x^8}}.$$

(Vergl. Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1865, p. 150.) Mit der Abbildung der Oberflächen der regulären Polyeder auf die Kugel lässt sich eine Anzahl analytischer Probleme in Verbindung bringen, unter denen ich hier folgendes namhaft mache: Alle sphärischen Dreiecke zu finden, welche

durch algebraische Functionen der Coordinaten auf die Fläche eines Kreises abgebildet werden können.

Dass es stets möglich ist, die einfach zusammenhängende Fläche, welche von einer aus Stücken analytischer Curven bestehenden einfachen Linie begrenzt ist, auf die Fläche eines Kreises zusammenhangend und in den kleinsten Theilen ähnlich abzubilden, hat *Riemann* mit Zuhülfenahme des sogenannten *Dirichlet*schen Principes zu beweisen gesucht.

Da gegen die Zulässigkeit dieses Principes bei einem Existenzbeweise hinsichtlich der Strenge gegründete Einwendungen geltend gemacht worden sind, war es wünschenswerth, ein Beweisverfahren zu besitzen, gegen welches die bezüglich des *Dirichlet*schen Principes geltend gemachten Bedenken nicht erhoben werden konnten.

Für den Fall, dass die Begrenzungslinie der abzubildenden Figur in allen Punkten nach aussen convex ist, habe ich einen solchen Beweis in einer im November v. J. Herrn *Weierstrass* überreichten Abhandlung zu führen versucht.

Halle a. S., im Februar 1869.

Conforme Abbildung der Oberfläche eines Tetraeders auf die Oberfläche einer Kugel.

(Von Herrn *H. A. Schwarz* in Halle.)

Die vorliegende Abhandlung stellt sich folgende Aufgabe:

Die Oberfläche einer Kugel auf die Oberfläche eines Tetraeders conform so abzubilden, dass jedem Punkte der einen Fläche ein einziger Punkt der andern entspricht.

Die Untersuchung zerfällt in zwei Theile.

Der erste Theil geht aus von dem als Function der oberen Grenze betrachteten Integrale

$$u-u_0 = C.\int_{x_0}^{x}(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1}(x-c)^{\gamma-1}(x-d)^{\delta-1}\,dx,$$

in welchem a, b, c, d beliebige complexe und α, β, γ, δ reelle zwischen 0 und 1 liegende und der Bedingung $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2$ genügende Constanten bezeichnen, und beschäftigt sich mit dem Nachweis, dass in der Ebene (u) dieses Integrals sich stets das Netz U_1 der Oberfläche U eines Tetraeders $ABCD$ angeben lässt, auf welche die ganze Ebene (x) oder eine dieser Ebene entsprechende Kugelfläche conform abgebildet wird, so dass das gegenseitige Entsprechen der Punkte beider Flächen ein eindeutiges ist.

Der zweite Theil hat den Beweis zu führen, dass für jedes vorgegebene ganz im Endlichen liegende Tetraeder $A_1B_1C_1D_1$ sich die angegebenen Constanten stets und zwar, abgesehen von drei willkürlichen Constanten einer gebrochenen Function ersten Grades, auf eindeutige Weise so bestimmen lassen, dass das vorhin charakterisirte Tetraeder $ABCD$ mit dem gegebenen $A_1B_1C_1D_1$ übereinstimmt.

I.

Die Lage eines in einer Ebene (x) liegenden beliebigen Punktes möge durch den Werth der unbeschränkt veränderlichen Grösse x ausgedrückt werden; a, b, c, d seien vier von einander verschiedene specielle Werthe derselben, welchen ebenso viele in der Ebene (x) liegende Punkte entsprechen.

Die Theile der Ebene (x) mögen nun durch die Integralfunction

$$u-u_0 = C.\int_{x_0}^{x}(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1}(x-c)^{\gamma-1}(x-d)^{\delta-1}dx,$$

in welcher C eine complexe, α, β, γ, δ reelle zwischen 0 und 1 liegende Constanten bezeichnen, zwischen denen die Gleichung

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 2$$

besteht, auf Theile einer Ebene (u) conform abgebildet werden.

Für das Innere jedes einfach zusammenhängenden Bereiches X der Ebene (x), welcher in seinem Innern keinen der Punkte a, b, c, d enthält, kann ein Zweig der zu integrirenden Function als stetige Function des Ortes eindeutig erklärt werden, sobald für einen im Innern von X liegenden Werth von x einer der Werthe der Function fixirt wird. Aus diesem einen Zweige wird jeder andere Zweig der Function durch Multiplication mit einem Factor $e^{2\varkappa\pi i}$ erhalten, wenn mit $\varkappa$ ein Ausdruck $m_\alpha.\alpha+m_\beta.\beta+m_\gamma.\gamma+m_\delta.\delta$ bezeichnet wird, in welchem die Coefficienten m ganze positive oder negative Zahlen bedeuten, einschliesslich der Null.

Da die zu integrirende Function für keinen Werth von x unendlich gross erster Ordnung wird, so folgt, dass für einen solchen Bereich auch ein Zweig u der Integralfunction eindeutig erklärt werden kann, und dass jeder andere Zweig u_1 derselben durch die Gleichung $u_1 = e^{2\varkappa\pi i}.u+\text{Const.}$ erhalten werden kann.

Für die hier näher zu untersuchende Abbildung sind die Verzweigungswerthe a, b, c, d die einzigen singulären Werthe von x. Für die in der Umgebung eines solchen Punktes, z. B. des Punktes a liegenden Werthe von x hat die Function u die Entwickelung

$$u-u_a = C_a(x-a)^\alpha[1+\mathfrak{P}(x-a)],$$

worin $\mathfrak{P}(x-a)$ eine nach steigenden ganzen positiven Potenzen von $x-a$ fortschreitende Potenzreihe bedeutet, welche für alle dem absoluten Betrage nach hinreichend kleinen Werthe von $x-a$ convergent ist.

Zieht man daher vom Punkte a aus eine einfache, d. h. durch keinen Punkt mehr als einmal gehende Linie $L(ad)$, welche die Punkte b und c nicht enthalten und im Punkte d endigen möge, so kann man die Function u für alle in der Umgebung des Punktes a liegenden Werthe von x, welche der Linie $L(ad)$ nicht angehören, als stetige und eindeutige Function von x erklären; für diejenigen Werthe x aber, welche in der Umgebung des Punktes a

liegen und der Linie $L(ad)$ angehören, hat die Function $u-u_a$ dann zwei Werthe, deren Quotient gleich $e^{2\alpha\pi i}$ ist.

Die den beiden Ufern der Linie $L(ad)$ in der Ebene (u) entsprechenden Curven stimmen aus diesem Grunde der Gestalt nach überein und lassen sich durch eine Drehung um den Punkt u_a und um den Winkel $2\alpha\pi$ mit einander zur Deckung bringen.

Zieht man, wie von a nach d die Linie $L(ad)$, ebenso von b und c nach d einfache Linien $L(bd)$ und $L(cd)$, welche weder sich selbst, noch einander schneiden, so bilden alle diesen Linien nicht angehörenden Werthe von x einen einfach zusammenhängenden, den unendlich weit entfernten Punkt der Ebene (x) enthaltenden Bereich X mit der in sich zurückkehrenden Begrenzungslinie $L(adbdcda)$.

Für jeden im Innern dieses Bereiches liegenden endlichen Werth von x hat u den Charakter einer ganzen Function. Für die in der Umgebung des Werthes $x=\infty$ liegenden Werthe von x lässt sich u, da $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2$ ist, in eine Reihe von der Gestalt

$$u-u_\infty = C_\infty \cdot \frac{1}{x}\left[1+\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

entwickeln; dieser Werth ist also für die Function u und die durch dieselbe vermittelte Abbildung kein eigentlich singulärer.

Hieraus folgt, *dass u für alle im Innern des Bereiches X liegenden Werthe von x als eine eindeutige, stetige und überall endliche Function von x erklärt werden kann.*

Für alle Werthe von x, welche den Linien L angehören, hat u im Allgemeinen zwei Werthe, für die Werthe a, b, c je einen Werth und für den Werth d drei Werthe.

Das Gebiet aller Werthe von u, welche zu den innerhalb des Bereiches X liegenden Werthen von x gehören, sei mit U_1 bezeichnet. Dieses Gebiet hat in seinem Innern keinen Windungspunkt, denn $\frac{du}{dx}$ wird für keinen endlichen Werth von x gleich Null und dem Werthe $x=\infty$ entspricht kein Windungspunkt von U_1.

Der Begrenzungslinie $L(adbdcda)$ von X entspricht in der Ebene (u) die Begrenzungslinie von U_1 nämlich eine Linie $AD'''BD'CD''A$. Die einzelnen Seiten dieses Curvensechseckes AD'' und AD''', BD''' und BD', CD' und CD'' haben beziehlich dieselbe Gestalt und bilden mit einander die im Innern von

U_1 liegenden Winkel $2\alpha\pi$, $2\beta\pi$, $2\gamma\pi$. Die Summe der Winkel in den Eckpunkten D', D'', D''' beträgt $2\delta\pi$.

Es wird nun gezeigt werden, dass man die Linien $L(ad)$, $L(bd)$, $L(cd)$ stets so ziehen kann, dass die entsprechenden Stücke der Begrenzung von U_1 gerade Linien werden und gleichzeitig die Figur U_1 das Netz der Oberfläche U eines Tetraeders $ABCD$ darstellt, dessen Kanten mit den gleichbenannten geradlinigen Strecken der Figur U_1 gleiche Länge haben.

Es ist nun ein *specieller Fall* vor der Betrachtung des allgemeinen besonders zu berücksichtigen.

Die vier Punkte a, b, c, d in der Ebene (x) können nämlich die besondere Lage haben, dass sich durch dieselben ein Kreis oder eine gerade Linie legen lässt.

Geht man von der Ebene (x) durch Transformation mittelst reciproker Radii vectores zu einer dieser Ebene entsprechenden Kugelfläche über, so liegen die den Punkten a, b, c, d entsprechenden Punkte auf einem Kreise, welcher die Kugelfläche in zwei Calotten theilt.

Durch eine geeignete Wahl des Transformationsmittelpunktes kann man bewirken, dass dieser Kreis ein grösster Kreis der Kugel wird. *Die Flächen der beiden von diesem Kreise begrenzten Halbkugeln werden mittelst der Integralfunction conform abgebildet auf zwei symmetrische ebene geradlinige Vierecke mit den Winkeln $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$, $\delta\pi$, die ganze Kugelfläche also auf eine geschlossene einfach zusammenhängende Fläche U, bestehend aus den längs ihrer Begrenzungen zusammenhängenden und eine Falte von U bildenden Flächen der beiden symmetrischen Vierecke.*

[Es sei gestattet, hier eine Bemerkung einzuschalten. Ist in dem betrachteten Falle $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{1}{2}$, so gelangt man zu dem elliptischen Integrale erster Art mit reellem Modul und rein imaginärem Periodenverhältniss, und erhält durch die elliptischen Functionen vermittelt die Abbildung der Oberfläche eines doppelt zu denkenden Rechteckes auf die Oberfläche einer Kugel.

Nun kann man nach *Jacobi* *) mittelst elliptischer Integrale dritter Art, welche die elliptischen Coordinaten eines Punktes des Ellipsoids enthalten,

---

*) Monatsberichte der Berliner Akademie, M. April 1839, Seite 64.
Schering: Ueber die conforme Abbildung des Ellipsoids auf der Ebene. Göttingen 1858.
Jacobi: Ueber die Abbildung eines ungleichaxigen Ellipsoids auf einer Ebene, bei welcher die kleinsten Theile ähnlich bleiben. Dieses Journal Band 59, Seite 74—88. 1861.

die Oberfläche eines ungleichaxigen Ellipsoids auf eine Ebene conform so abbilden, dass einer Hälfte der Ellipsoidoberfläche das Innere eines Rechteckes, der die vier Nabelpunkte enthaltenden Ellipse der Umfang desselben und den Nabelpunkten selbst die Ecken des Rechtecks entsprechen.

Der ganzen Ellipsoidoberfläche entspricht also hierbei das doppelte Rechteck. Durch Zusammensetzung dieser Abbildung mit der so eben betrachteten durch elliptische Functionen vermittelten erhält man die allgemeine Lösung der Aufgabe: *Die Oberfläche eines ungleichaxigen Ellipsoids auf die Oberfläche einer Kugel conform so abzubilden, dass das gegenseitige Entsprechen der reellen Punkte beider Flächen ein eindeutiges ist.*

Es ergiebt sich hierbei, dass den beiden Schaaren der Krümmungslinien auf dem Ellipsoid zwei Schaaren von Curven vierter Ordnung auf der Kugel entsprechen.]

Wenn nun die vier Punkte a, b, c, d nicht auf einem Kreise liegen, so kann man durch je drei derselben einen Kreis legen.

Von diesen vier Kreisen theilt jeder, z. B. der durch die Punkte a, b, c gelegte, das Gebiet von x in zwei durch diesen Kreis von einander getrennte Bereiche. Der eine derselben enthält in seinem Innern den vierten Punkt d; der andere, welcher in seinem Innern keinen singulären Punkt enthält, möge mit (abc) bezeichnet werden. Den Bezeichnungen (bdc), (cda), (adb) ist die analoge Bedeutung beizulegen.

Es kann angenommen werden, dass das Innere des Gebietes (abc) für einen auf der Ebene (x) stehenden Beobachter, welcher auf der Begrenzung des Gebietes in der Richtung $a\ b\ c$ fortschreitet, links von seiner Bewegungsrichtung liegt.

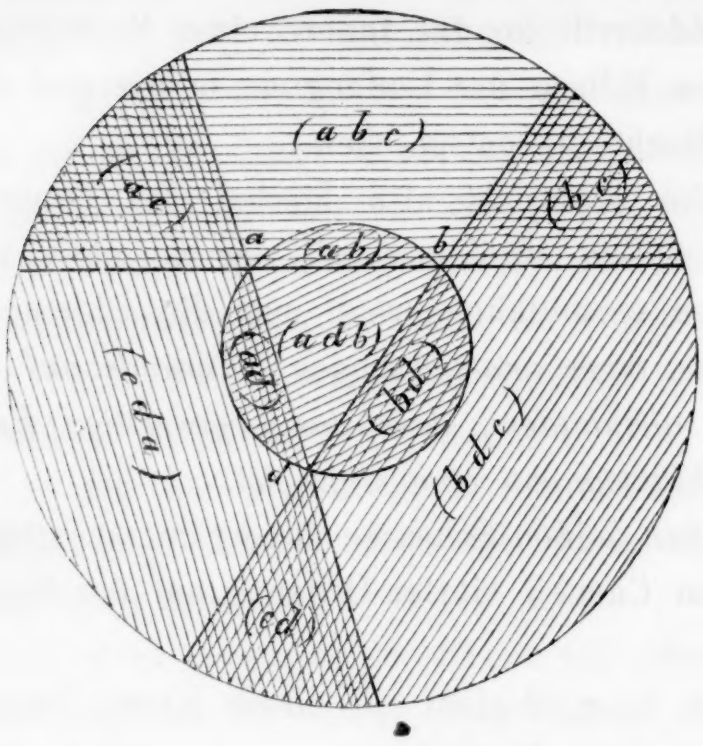
Wenn dies nämlich nicht von vorn herein der Fall wäre, so brauchte man nur die Bezeichnung der Punkte a und c und dem entsprechend α und γ mit einander zu vertauschen.

Zur Vereinfachung möge nun die Ebene (x) durch die Function

$$x' = \frac{b-c}{b-a} \cdot \frac{x-a}{x-c}$$

auf eine Ebene (x') abgebildet werden. Den Punkten $x = a, b, c, d$ entsprechen der Reihe nach die Punkte $x' = 0,\ 1,\ \infty,\ z$. Es ist hierbei

$$z = \frac{b-c}{b-a} \cdot \frac{d-a}{d-c}.$$



Dem Gebiete (abc) entspricht das Gebiet $(0\,1\,\infty)$, also die auf der positiven Seite der reellen Axe liegende Halbebene; z liegt mithin in der auf der negativen Seite der reellen Axe liegenden Halbebene.

Die Integralfunction u geht über in

$$u - u_0 = C' \int_{x'_0}^{x'} x'^{\alpha-1}(x'-1)^{\beta-1}(x'-z)^{\delta-1}dx'.$$

Die von den Punkten a, b, c nach dem Punkte d gezogenen Linien L sollen nun so angenommen werden, dass sie ausserhalb des Gebietes (abc) liegen und mit der Begrenzungslinie desselben nur die Punkte a, b, c gemein haben.

Gehen nun $abcd$ in $0\,1\,\infty\,z$ über, so liegen die den Linien L entsprechenden Linien L' ganz in der auf der negativen Seite der reellen Axe liegenden Halbebene.

Für alle im Innern des dem Gebiete X entsprechenden Gebietes X' liegenden Werthe von x' kann u als eindeutige und stetige Function von x' erklärt werden. Dasselbe gilt von $\frac{du}{dx'}$ und von den Functionen

$$\log\frac{du}{dx'}, \quad \log x', \quad \log(x'-1), \quad \log(x'-z),$$

zwischen denen die Gleichung

$$\log\frac{du}{dx'} = \log C' + (\alpha-1)\log x' + (\beta-1)\log(x'-1) + (\delta-1)\log(x'-z)$$

besteht.

Das Gebiet (abc) in der Ebene (x), beziehlich die auf der positiven Seite der reellen Axe liegende Halbebene (x'), wird nun durch die Integralfunction u abgebildet auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet $U(abc)$, einen Theil von U_1.

Die Begrenzungslinie der Figur $U(abc)$ ist nach aussen überall convex.

Dies kann wie folgt bewiesen werden. Beschränkt man die Variable x' auf die Begrenzungslinie des Gebietes (abc) und lässt x' stetig wachsend alle

reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen, so drückt die Abweichung von $\frac{du}{dx'}$ den Winkel aus, den entsprechende Elemente du und dx' der Begrenzungslinien beider Gebiete mit einander einschliessen. Dieser Winkel wird daher auch ausgedrückt durch den reellen Factor des imaginären Theiles von

$$\log\frac{du}{dx'} = \log C' + (\alpha-1)\log x' + (\beta-1)\log(x'-1) + (\delta-1)\log(x'-z).$$

Der imaginäre Theil von $\log x'$ ist constant, während x' sich von $-\infty$ bis 0 bewegt, nimmt beim Durchgange durch 0 um πi ab und ist, während x' sich von 0 bis $+\infty$ bewegt, wieder constant. Dasselbe gilt von dem imaginären Theile von $\log(x'-1)$ für den Werth x' gleich 1. Der imaginäre Theil von $\log(x'-z)$ hingegen nimmt, während x' sich von $-\infty$ bis $+\infty$ bewegt, beständig ab, da die Abweichung der von dem Punkte z nach dem Punkte x' führenden Strecke zx' beständig kleiner wird.

Der Zuwachs, welchen der imaginäre Theil von $\log\frac{du}{dx'}$ erfährt, während x' sich innerhalb einer der Strecken $-\infty \ldots 0$, $0 \ldots 1$, $1 \ldots +\infty$ bewegt, ist also gleich dem Zuwachse des imaginären Theiles von $(\delta-1)\log(x'-z)$. Der imaginäre Theil von $\log\frac{du}{dx'}$ wächst also beständig, denn δ ist nach der Voraussetzung kleiner als 1 und in den Punkten 0 und 1 beträgt die Zunahme beziehlich $(1-\alpha)\pi i$ und $(1-\beta)\pi i$. Folglich ist der Contingenzwinkel der Curve, welche u beschreibt, während x' eine der Strecken von $-\infty$ bis 0, von 0 bis 1, von 1 bis $+\infty$ durchläuft, stets positiv, denn derselbe ist gleich dem Zuwachse des Factors von i in dem Ausdrucke $\log\frac{du}{dx'}$.

Also ist die Begrenzungslinie der Figur $U(abc)$ in den drei Theilen, welche den Strecken $-\infty \ldots 0$, $0 \ldots 1$, $1 \ldots +\infty$ entsprechen, nach aussen convex. In den Punkten A, B, C, welche den Werthen a, b, c von x, beziehlich 0, 1, ∞ von x', entsprechen, hat die Begrenzungslinie der Figur $U(abc)$ je zwei Tangenten, und zwar betragen die Winkel, welche die folgende Tangente mit der vorhergehenden macht, beziehlich

$$(1-\alpha)\pi, \quad (1-\beta)\pi, \quad (1-\gamma)\pi.$$

Die Begrenzungslinie von $U(abc)$ ist also auch in den Ecken nach aussen convex. Die inneren Winkel der Figur $U(abc)$ sind in diesen Punkten beziehlich gleich $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$.

Die Summe aller Contingenzwinkel der Begrenzungslinie der Figur

$U(abc)$ beträgt

$$(1-\alpha)\pi+(1-\beta)\pi+(1-\gamma)\pi+(1-\delta)\pi = 2\pi,$$

wie auch daraus folgt, dass diese ganz im Endlichen liegende einfach zusammenhangende Figur in ihrem Innern keinen Windungspunkt besitzt.

Wenn also ein Punkt die Begrenzung der Figur $U(abc)$ in positivem Sinne durchläuft, so wächst der Winkel, den die Richtung der Tangente dieser Curve mit der Richtung der reellen Axe macht, beständig und ist nach einmaligem Umlaufe des Punktes um 2π gewachsen.

Nun kann eine geschlossene Curve, welche diese zwei Eigenschaften hat, von einer Geraden in nicht mehr als zwei Punkten geschnitten werden, und die geradlinige Strecke, welche zwei Punkte einer solchen Curve verbindet, liegt ganz in dem Innern des von dieser Linie begrenzten und ganz im Endlichen liegenden Stückes der Ebene, falls sie nicht selbst einen Theil der Curve ausmacht.

Construirt man daher in der Figur $U(abc)$ das geradlinige Dreieck ABC, so folgt aus dem angeführten Satze, dass die einzelnen Seiten und die Fläche dieses Dreiecks ganz innerhalb der Figur $U(abc)$ liegen, dass daher die Winkel desselben beziehlich kleiner sind als $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$.

Die analogen Betrachtungen, statt auf das Gebiet (abc) auf die Gebiete (bdc), (cda), (adb) angewendet, führen auf die Figuren

$$U(bdc), \quad U(cda), \quad U(adb)$$

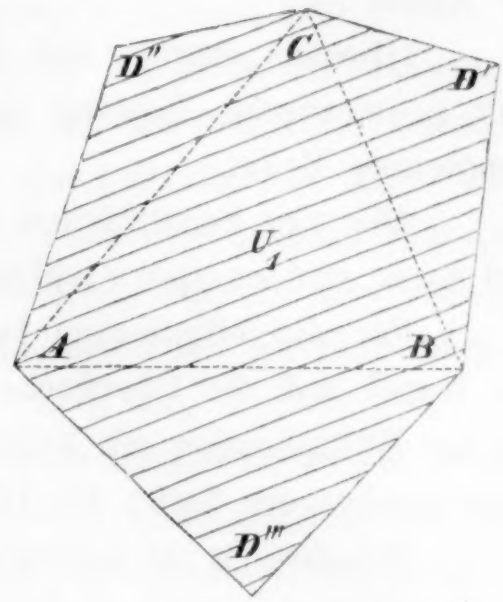
und die Dreiecke

$$B'D'C', \quad C''D''A'', \quad A'''D'''B'''.$$

Die Gebiete (abc) und (adb) haben einen von zwei Kreisbogen begrenzten einfach zusammenhängenden Gebietstheil gemeinsam, welcher mit (ab) bezeichnet werden möge. Derselbe wird durch die Integralfunction auf eine Figur $U(ab)$ abgebildet, deren Begrenzungslinie in allen Punkten nach aussen convex ist. Also liegt die geradlinige Strecke AB, welche die den Punkten a und b entsprechenden Ecken der Figur $U(ab)$ verbindet, ganz im Innern derselben. *Es giebt also in der Ebene (x) eine einzige ganz innerhalb des Flächenstückes (ab) liegende von a nach b führende Linie $L(ab)$, deren Abbildung durch die Integralfunction eine gerade Linie ist.*

Solcher Linien L giebt es in der Ebene (x) oder auf der der Ebene (x) entsprechenden Kugelfläche sechs, von denen jede zwei der Punkte a, b, c, d verbindet.

Die Ebene, beziehlich die Kugelfläche, wird durch diese Linien in vier Curvendreiecke abc, bdc, cda, adb zerlegt, deren Abbildungen durch die Integralfunction geradlinige Dreiecke sind.



Wählt man daher die drei vom Punkte d ausgehenden eindeutig definirten Linien L(ad), L(bd), L(cd) zu denjenigen Linien, deren Ufer L(adbdcda) die Begrenzung des einfach zusammenhängenden Bereiches X bilden, so ist die entsprechende Figur U_1 *das Innere eines von sechs geradlinigen Strecken begrenzten Sechseckes* $AD'''BD'CD''A$, von dessen Seiten die in den Ecken A, B, C je zwei zusammenstossenden einander gleich sind und mit einander beziehlich die im Innern von U_1 liegenden Winkel $2\alpha\pi$, $2\beta\pi$, $2\gamma\pi$ bilden. Nun ist von den in der Ecke A zusammenstossenden Winkeln $D'''AB$, BAC, CAD'' jeder kleiner als $\alpha\pi$; da ihre Summe $2\alpha\pi$ beträgt, so ist die Summe je zweier derselben grösser als der dritte. *Das angegebene Sechseck* U_1 *ist daher das Netz der Oberfläche U eines Tetraeders ABCD.*

Aus den drei Winkeln am Punkte A kann man nämlich, weil die Summe je zweier grösser ist als der dritte, eine körperliche Ecke construiren; giebt man den Kanten beziehlich die Längen AB, AC, $AD = AD'' = AD'''$, so ist hierdurch ein Tetraeder $ABCD$ bestimmt, dessen Seitenflächen ABC, BDC, CDA, ADB den vier Dreiecken ABC, $BD'C$, $CD''A$, $AD'''B$ beziehlich congruent sind.

Die Oberfläche U dieses Tetraeders entspricht der Ebene (x) *und der derselben entsprechenden Kugeloberfläche eindeutig Punkt für Punkt. Die Abbildung der einen Fläche auf die andere ist in den kleinsten Theilen ähnlich, ausgenommen in den den vier Ecken des Tetraeders entsprechenden Punkten, in welchen die Stetigkeit der Abbildung nicht unterbrochen ist.*

Die Abbildung der Ebene (x) *auf die Oberfläche U des Tetraeders stellt daher in eindeutiger Weise den Zusammenhang dar, welcher stattfindet zwischen den Werthen, die das Integral u für einen bestimmten Werth x der oberen Grenze annehmen kann, und diesem Werthe x: Alle Werthe, welche das Integral auf verschiedenen Integrationswegen erlangen kann, werden aus*

einem dieser Werthe erhalten durch Abwickelung der Tetraederfläche U auf die Ebene (u).

[Hieraus ergiebt sich beiläufig, wenn man $\alpha=\beta=\gamma=\delta=\frac{1}{2}$ setzt, eine geometrische Deutung der Abbildung durch elliptische Functionen mit complexem Modul.

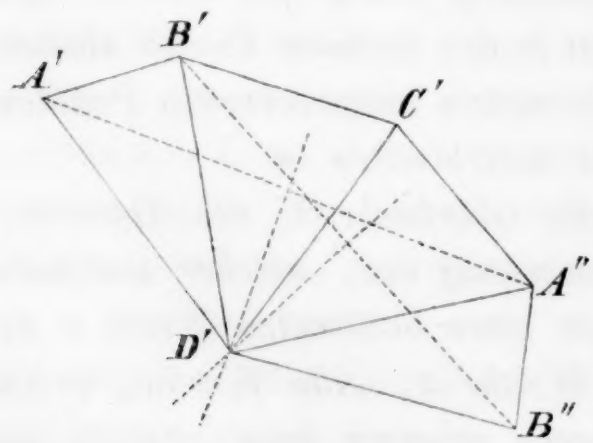
Die vier Seitenflächen des Tetraeders sind in diesem Falle congruent, und zwar sind es spitzwinklige Dreiecke.

Für die elliptischen Integrale, welche die Abbildung der Oberfläche der Kugel auf die Oberfläche eines regulären Tetraeders vermitteln, findet bei der Multiplication mit dritten Wurzeln der Einheit ein algebraisches Multiplicationstheorem Statt; die Linien L sind in diesem Falle Kreisbogen.

Gleichzeitig ist hierdurch gezeigt, wie man bei einem elliptischen Integral erster Art mit complexem Modul die Integrationswege zu wählen hat, um solche Fundamental-Perioden zu erhalten, für welche die ϑ-Reihen am stärksten convergiren.]

II.

Es ist nun nachzuweisen, dass sich bei einer gegebenen ganz im Endlichen liegenden Tetraederfläche $A_1B_1C_1D_1$ die Constanten in der oben betrachteten Integralfunction stets so bestimmen lassen, dass das zu derselben in Beziehung stehende Tetraeder $ABCD$ dem gegebenen congruent wird. Zunächst ist zu bemerken, dass die Grössen α, β, γ und δ durch die Summen der Winkel in den Ecken A_1, B_1, C_1, D_1 des Tetraeders unmittelbar gegeben sind. Dieselben sind nämlich so zu wählen, dass die Summen der in den Ecken A_1, B_1, C_1, D_1 zusammenstossenden Winkel beziehlich durch $2\alpha\pi$, $2\beta\pi$, $2\gamma\pi$, $2\delta\pi$ ausgedrückt werden. Da die Summe aller dieser Winkel gleich 4π ist, so ist die oben vorausgesetzte Gleichung $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2$ erfüllt.



Ferner ist zu beachten, dass, wenn diese Winkelsummen gegeben sind, das Tetraeder durch die Gestalt einer seiner Seitenflächen, etwa $A_1B_1C_1$, der Gestalt nach bestimmt ist.

Es giebt nämlich nur *ein* Tetraeder *ABCD*, welches mit einem gegebenen die Grundfläche *ABC* gemein und in entsprechenden Ecken gleiche Winkelsummen

hat. Fasst man das Tetraeder als dreiseitige Pyramide mit der Spitze D auf und breitet die Mantelfläche $D-ABC$ dieser Pyramide in eine Ebene aus, so ist die gebrochene Linie $A'B'C'A''B''\ldots$, in welche die Linie $ABCA$ ausgebreitet wird, in den Längen der einzelnen Seiten und den Winkeln je zweier auf einander folgender Seiten bekannt. (Man erhält $\angle A'B'C' = 2\alpha\pi - \angle ABC$ u.s.w.) Die Lage der Spitze D' in dem Netze ist nun eindeutig dadurch bestimmt, dass die Dreiecke $A'B'D'$ und $A''B''D'$ congruent sind, dass D' also von den Punkten A' und A'' und den Punkten B' und B'' beziehlich gleichen Abstand haben muss.

Hieraus folgt, dass in der That das Tetraeder $ABCD$ durch die Summe der Winkel in den einzelnen Ecken und die Gestalt einer Seitenfläche ABC der Gestalt nach schon bestimmt ist, sobald noch feststeht, welche Seite der Fläche dieses Dreiecks nach Aussen liegen soll. *Die Aufgabe der Constantenbestimmung ist demnach als gelöst anzusehen, sobald es gelingt, die vier Constanten a, b, c, d so zu bestimmen, dass das in der Ebene der Integralfunction u liegende geradlinige Dreieck ABC, welches dem auf der Kugel liegenden krummlinigen Dreiecke abc entspricht, der Seitenfläche $A_1B_1C_1$ des gegebenen Tetraeders gleichstimmig ähnlich wird.*

Ohne dass der Allgemeinheit Eintrag geschieht, kann nun angenommen werden, dass $\alpha+\beta \leqq 1$ ist; denn unter den vier positiven Grössen α, β, γ, δ, deren Summe gleich 2 ist, muss es, wenn nicht jede dieser Grössen gleich $\frac{1}{2}$ ist, stets zwei geben, deren Summe kleiner als 1 ist, und diese können mit α und β, die entsprechenden Ecken des Tetraeders mit A_1 und B_1 bezeichnet werden.

Die noch freistehende Wahl in der Bezeichnung der beiden andern Ecken des Tetraeders mit C_1 und D_1 möge so getroffen werden, dass die Seitenfläche $A_1B_1C_1$ für einen auf der Fläche $A_1B_1C_1$ stehenden und ausserhalb des Tetraeders befindlichen Beobachter auf der linken Seite ihrer Begrenzungslinie $A_1B_1C_1A_1$ liegt. Um von den drei willkürlichen Constanten befreit zu sein, welche eine gebrochene Substitution ersten Grades für die Grössen a, b, c, d enthält, gebe man a, b, c die Werthe $a=0$, $b=1$, $c=\infty$. Dann muss nach der getroffenen Uebereinkunft dem Innern des durch a, b, c gelegten Kreises die auf der positiven Seite der reellen Axe liegende Halbebene entsprechen und der die unbekannte Constante d, welche mit z bezeichnet werden möge, darstellende Punkt auf der negativen Seite der reellen Axe liegen.

Stellt man nun die Integralfunction

$$u = \int^{x} x^{\alpha-1}(x-1)^{\beta-1}(x-z)^{\delta-1}\,dx$$

auf, so werden die Seiten AB und AC des Dreiecks ABC in complexen Coordinaten durch die bestimmten Integrale

$$AB = {}'\int_0^1, \qquad AC = {}'\int_0^{\infty}$$

ausgedrückt, wo durch die dem Integralzeichen beigefügten Marken angedeutet sein soll, dass die Integrale längs der positiven Seite der reellen Axe zu nehmen sind, während die Potenzen für die auf der positiven Seite der reellen Axe liegende Halbebene eindeutig erklärt sind, da diese ein Theil des Gebietes X ist. Der complexe Werth des Verhältnisses $\frac{AC}{AB}$ ist nun gegeben, es soll nämlich $\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1} = w_0$ sein, wenn durch A_1B_1 und A_1C_1 die complexen Coordinaten dieser Strecken in der Ebene des Dreiecks $A_1B_1C_1$ bezeichnet werden. Es wird gezeigt werden, dass die complexe Grösse z in der auf der negativen Seite der reellen Axe liegenden Halbebene auf eine einzige Weise so bestimmt werden kann, dass der Quotient w der innerhalb der auf der positiven Seite liegenden Halbebene genommenen bestimmten Integrale, $w = {}'\int_0^{\infty} : {}'\int_0^1$, den vorgeschriebenen Werth w_0 annimmt.

Diese Grösse w als Function von z betrachtet ist Quotient zweier Zweige derselben *Gauss*ischen F oder *Riemann*'schen P Function. Die Werthe 0, 1, ∞ sind die einzigen singulären Werthe für das Argument z.

Die Grösse w ist also eine analytische Function der complexen Grösse z, eindeutig definirt für alle der negativen Halbebene angehörenden Werthe von z. Der Werth der complexen Grösse w werde durch einen Punkt in einer Ebene geometrisch dargestellt und das Gebiet der Werthe, welche w für alle der negativen Halbebene angehörenden Werthe von z annimmt, mit W bezeichnet, so dass W eine conforme Abbildung der negativen Halbebene (z) ist.

Zunächst ist zu bemerken, dass alle Punkte des Gebietes W im Endlichen liegen (ausgenommen den Fall $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{1}{2}$, der als Grenzfall leicht zu behandeln ist).

Denn der Nenner von w ist für keinen von 0, 1, ∞ verschiedenen Werth von z gleich Null, der Zähler von w wird für keinen von 0, 1, ∞

verschiedenen Werth von z unendlich gross, und die Werthe, welche w für $z = 0,\ 1,\ \infty$ annimmt, ergeben sich mit Ausnahme des eben erwähnten Falles als endliche.

Um nun das Gebiet W übersehen zu können, betrachte man die Begrenzungslinie von W; diese ist die Curve, welche w beschreibt, wenn z die Grenze der negativen Halbebene von $+\infty$ bis $-\infty$ durchläuft.

Es werde nun der Grösse z ein reeller vorläufig constanter Werth beigelegt. Dann vermittelt das Integral

$$\int_{x_0}^{x} x^{\alpha-1}(x-1)^{\beta-1}(x-z)^{\delta-1}dx,$$

als Function der oberen Grenze betrachtet, wenn die Veränderlichkeit von x auf die auf der positiven Seite der reellen Axe liegende Halbebene beschränkt wird, die conforme Abbildung dieser Halbebene auf ein geradliniges Viereck mit den Winkeln $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$, $\delta\pi$. Diese Winkel folgen auf einander in der Reihenfolge

$$\alpha\beta\delta\gamma, \qquad \alpha\delta\beta\gamma, \qquad \delta\alpha\beta\gamma,$$

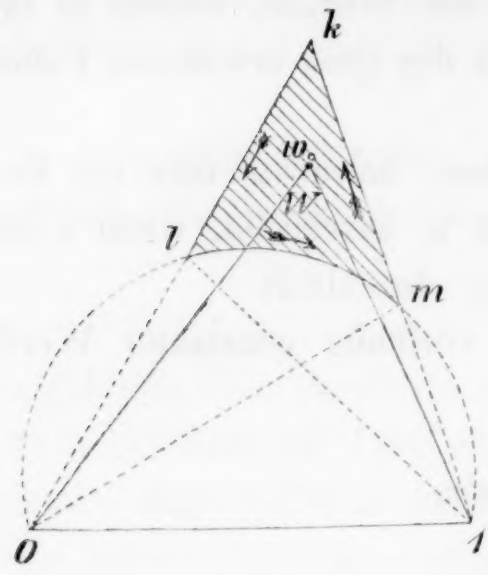
jenachdem z in der Strecke $\infty \ldots 1$, $1 \ldots 0$, oder $0 \ldots -\infty$ liegt.

Die Eckpunkte des Vierecks seien den Winkeln entsprechend mit denselben Buchstaben $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ bezeichnet. Das Integral $\int_0^{1}{}'$ stellt in dem ersten und dritten Falle die Seite $\alpha\beta$, im zweiten die Diagonale $\alpha\beta$ des Vierecks durch ihren complexen Werth dar. Ebenso stellt das Integral $\int_0^{\infty}{}'$ im ersten und zweiten Falle die Seite $\alpha\gamma$, im dritten Falle die Diagonale $\alpha\gamma$ dar.

Die geometrische Construction des Quotienten

$$w = \frac{\alpha\gamma}{\alpha\beta}$$

ist also folgende: Man construire das Viereck mit den Winkeln $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$, $\delta\pi$, *dessen Ecke* α *der Punkt* 0, *dessen Ecke* β *der Punkt* $+1$ *ist, und bestimme die Lage der Ecke* γ. Wenn z zwischen ∞ und 1 liegt, so ist die Aufeinanderfolge der Ecken des Vierecks $\alpha\ \beta\ \delta\ \gamma$, und die Ecke γ liegt auf einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden, die mit der Strecke 01 den Winkel $\alpha\pi$ einschliesst.



Liegt z in der Strecke von 0 bis $-\infty$, so folgen die Ecken des Vierecks auf einander wie $\delta\ \alpha\ \beta\ \gamma$; die Ecke γ liegt daher in diesem Falle auf einer durch den Punkt $+1$ gehenden Geraden, mit welcher die Strecke $1 \ldots 0$ den Winkel $\beta\pi$ einschliesst. Diese beiden Geraden schneiden sich, da $\alpha+\beta$ vorausgesetztermassen kleiner als 1 ist, in einem Punkte k, welcher den Werth von w für $z=\infty$ darstellt, für welchen Werth das Viereck, auf welches die Halbebene x im Allgemeinen abgebildet wird, in das Dreieck $01k$ übergeht. (In dem Falle $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ sind die beiden Geraden parallel und k liegt in der Richtung der Strecke $+i$ im Unendlichen.)

Wenn z der Strecke $1 \ldots 0$ angehört und demnach die Ecken des Vierecks in der Reihenfolge $\alpha\ \delta\ \beta\ \gamma$ auf einander folgen, ist der geometrische Ort der Ecke γ ein über der Strecke $0 \ldots 1$ auf deren positiver Seite errichteter Kreisbogen, welcher den Winkel $\gamma\pi$ fasst.

Der Punkt k liegt ausserhalb des durch den Kreisbogen und die Strecke $0 \ldots 1$ begrenzten Kreisabschnittes, denn es ist

$$\begin{aligned}\gamma &= 2-(\alpha+\beta+\delta)\\ &= [1-(\alpha+\beta)]+(1-\delta),\end{aligned}$$

also ist der Winkel $\gamma\pi$ grösser als der Winkel $0k1$, der gleich $[1-(\alpha+\beta)]\pi$ ist. Der Kreisbogen schneidet daher von der Fläche des Dreiecks $01k$ ein Stück ab, welches dem Kreisabschnitt angehört; das von der Fläche des Dreiecks übrig bleibende Stück, das Kreisbogendreieck klm, ist das Gebiet W der complexen Grösse w. Man überzeugt sich nämlich, dass die Punkte l und m, mögen sie nun mit den Punkten 0 und 1 zusammenfallen oder nicht, die Werthe von w für $z=1$ und $z=0$ darstellen.

Für beide Werthe hört das Viereck, auf welches im Allgemeinen die positive Halbebene (x) abgebildet wird, auf, ein eigentliches Viereck zu sein, und geht in je eins der Dreiecke $01l$, $01m$ über, wenn es solche von 0 und 1 verschiedene Schnittpunkte l und m des Kreisbogens mit den Geraden $0k$ und $1k$ giebt. Aber auch für den Fall, dass l mit 0, m mit 1 zusammenfällt, überzeugt man sich, dass diese Werthe die wahren Werthe von w für $z=1$ und $z=0$ sind.

Während z die reelle Axe von $+\infty$ bis $-\infty$ durchläuft, bewegt sich der die Grösse w darstellende Punkt auf der Begrenzung des angegebenen Flächenstückes W stets in dem Sinne *klm*.

Dies kann mit Hülfe des folgenden Satzes bewiesen werden:

Wenn bei der Abbildung einer Halbebene auf ein geradliniges Viereck die drei Eckpunkten desselben entsprechenden Punkte 0, 1, ∞ festgehalten werden und der dem vierten Eckpunkte entsprechende Punkt sich innerhalb einer der Strecken $+\infty \ldots 1$, $1 \ldots 0$, $0 \ldots -\infty$ und zwar stets in demselben Sinne bewegt, so ändert sich während dieser Bewegung von z innerhalb einer dieser Strecken das Verhältniss der Längen je zweier anstossenden Seiten des Vierecks stets in demselben Sinne.

Aus den angestellten Betrachtungen folgt nun, *dass durch die analytische Function w von z die auf der negativen Seite der reellen Axe liegende Halbebene (z) conform auf das Innere W des Kreisbogendreiecks klm abgebildet wird,* wie auch aus der Theorie der Abbildung einer Halbebene auf die Fläche eines Kreisbogendreiecks geschlossen werden kann. Weil die Begrenzungslinie des Gebietes W eine einfache Linie ist, *so ist die Abbildung der Figur W auf die Halbebene eine eindeutige: Jedem Punkte innerhalb des Kreisbogendreiecks klm entspricht ein und nur ein Werth von z.*

Nun ist zu zeigen, dass der vorgeschriebene Werth $\frac{A_1C_1}{A_1B_1} = w_0$ des Quotienten $w = \frac{AC}{AB}$ innerhalb des Gebietes W liegt.

Man construire ein Dreieck $01w_0$ ähnlich dem Dreieck $A_1B_1C_1$. Weil die Winkel des Dreiecks $A_1B_1C_1$ beziehlich kleiner als $\alpha\pi$, $\beta\pi$, $\gamma\pi$ sind, so ist

$$\mathrm{W}.10w_0 < \mathrm{W}.10k, \quad \mathrm{W}.w_010 < \mathrm{W}.k10, \quad \mathrm{W}.1w_00 < \gamma\pi.$$

Von diesen drei Ungleichheiten beweisen die beiden ersten, dass der Punkt w_0 innerhalb des Dreiecks $01k$ liegt, und die letzte, dass derselbe ausserhalb der Fläche des über 01 construirten Kreisabschnittes liegt, der den Winkel $\gamma\pi$ fasst.

Folglich liegt der gegebene Werth w_0 von w in dem Gebiete W des Quotienten der beiden bestimmten Integrale, und es giebt nur einen Werth z_0 von z, für den w gleich w_0 wird.

Das Tetraeder ABCD, welches der Integralfunction

$$C\int^x x^{\alpha-1}(x-1)^{\beta-1}(x-z_0)^{\delta-1}\,dx$$

entspricht, ist also dem gegebenen ähnlich. Durch geeignete Bestimmung der

Constante C kann bewirkt werden, dass beide Tetraeder auch der Grösse nach übereinstimmen.

Die Aufgabe der conformen Abbildung der Oberfläche eines Tetraeders auf die Oberfläche einer Kugel mit der Bedingung, dass die Punkte beider Flächen einander eindeutig entsprechen sollen, ist also stets lösbar, und zwar lässt diese Aufgabe nur eine Lösung zu, wenn festgesetzt wird, dass drei gegebenen Punkten der einen Fläche beziehlich drei gegebene Punkte der andern entsprechen sollen.

Halle, im September 1868.

Ueber die einfachste Correlation in zwei räumlichen Gebieten.

(Von Herrn *Richelot* in Königsberg.)

Unter den verschiedenen Beziehungsarten zwischen zwei räumlichen Gebilden zeichnet sich diejenige besonders aus, worin jedem Element des einen Gebiets, d. h. jedem Punkt, jeder Geraden, jeder Ebene, respective ein ebensolches Element im andern Gebiet und umgekehrt, in der ganzen unendlichen Ausdehnung beider entspricht. —

Diese Correlation wird durch die Formeln:

$$(1.) \qquad X = \frac{\Phi_1}{\Phi}, \quad Y = \frac{\Phi_2}{\Phi}, \quad Z = \frac{\Phi_3}{\Phi}$$

ausgedrückt, wobei X, Y, Z rechtwinklige Coordinaten der Punkte des einen Gebiets, welches ich das *lateinische* nennen werde, und Φ, Φ_1, Φ_2, Φ_3 lineare ganze rationale Functionen der rechtwinkligen Coordinaten der Punkte des andern, *griechischen* Gebiets ξ, η, ζ bedeuten. Diese Form der Correlationsformeln ist schon aus der Bedingung allein zu rechtfertigen, dass sich gegenseitig je 2 Punkte und den unendlich entfernten Punkten in jedem der beiden Gebiete die Punkte einer Ebene des andern entsprechen sollen, und die 15 Verhältnisse der 16 in den Functionen Φ, Φ_1, Φ_2, Φ_3 vorkommenden Coefficienten lassen sich durch die gegebenen Coordinaten-Werthe von 5 Paaren entsprechender Punkte eindeutig bestimmen, so dass sich aus diesen 5 Paaren und dem gegebenen Punkt des einen Gebiets der entsprechende des andern construiren lässt. Diese Construction kann, wenn man sich die beiden Gebiete in *irgend eine* gegenseitige Lage bringt, nach *Steiner*schen Methoden linear ausgeführt werden. Es ist nämlich leicht einzusehen, dass die beiden durch 2 Paare der gegebenen 5 Paare von Punkten hindurchgezogenen Geraden als Axen von 2 Ebenenbüscheln angesehen werden können, deren betreffende Ebenen durch je 2 entsprechende Punkte gehen. Hiernach ist die vorliegende Aufgabe auf die Aufgabe des §. 31, II. des *Steiner*schen Werkes zurückgeführt, deren Lösung ebendaselbst angegeben ist. —

Es handelt sich aber um etwas tiefer liegende Eigenschaften der genannten Correlation, welche der grosse Geometer nicht aufgesucht zu haben

scheint. — Specielle Fälle derselben, wie die Collineation in der Ebene, die Centralperspective, welche *Jacobi* im zwölften Bande dieses Journals auf analytisch geometrischem Wege behandelt hat, die Reliefsperspective, die Correlation zwischen Object und Bild bei einem System brechender, von Kugelflächen begrenzter Medien, falls das Object den sämmtlichen Richtungen der Centralen je zweier auf einander folgenden Kugelflächen sehr nahe liegt, habe ich seit vielen Jahren in meinem Seminar als Aufgaben behandeln lassen. Die analoge Behandlung des obigen allgemeinsten Beziehungsgesetzes habe ich einem meiner Schüler, dem Herrn *Maegis* aus Schaffhausen, übertragen. Die von ihm in befriedigender Weise durchgeführte Arbeit über diesen Gegenstand wird in Kurzem erscheinen, und weicht wesentlich von Allem ab, was bisher über Collineation im Raume veröffentlicht worden ist. Es sind darin in gelungener Analogie mit der eben genannten *Jacobi*schen Arbeit die 16 Coefficienten der Correlationsformeln geometrisch gedeutet, eine *einfache* Construction des einem gegebenen entsprechenden Punktes gefunden, und mehrere Anwendungen auf Oberflächen zweiter Ordnung ausgeführt.

Indem ich die Geometer auf diese Arbeit aufmerksam mache, halte ich es nicht für überflüssig in folgenden Zeilen kurz den Weg anzugeben, welcher mich schon vor längerer Zeit auf die Auflösung der genannten Probleme geführt hatte. —

Ich nenne diejenige Ebene in dem einen Gebiet, deren Punkte allen unendlich weit entfernten Punkten des andern entsprechen, die *Verschwindungsebene* im erstern.

Es ist hiernach die Gleichung:

$$\Phi = 0$$

die Gleichung der *griechischen Verschwindungsebene*, und falls die Auflösung der drei Gleichungen (1.) auf die Formeln:

$$(2.) \qquad \xi = \frac{F_1}{F}, \quad \eta = \frac{F_2}{F}, \quad \zeta = \frac{F_3}{F}$$

führt,

$$F = 0$$

die Gleichung der *lateinischen Verschwindungsebene*.

Führt man nun statt der Coordinaten $X\ Y\ Z$ andere, $x\ y\ z$, der Art ein, dass die xy-Ebene die eben genannte *lateinische Verschwindungsebene* wird, so werden die Correlationsformeln (2.) die Gestalt:

$$(3.) \qquad \xi = \frac{f_1}{z}, \quad \eta = \frac{f_2}{z}, \quad \zeta = \frac{f_3}{z}$$

annehmen, woraus dann sofort folgt, dass die umgekehrten Formeln die Form

$$(4.) \qquad x = \frac{\varphi_1}{\varphi}, \quad y = \frac{\varphi_2}{\varphi}, \quad z = \frac{\varphi_3}{\varphi}$$

annehmen, worin φ_3 constant ist. Man kann nun das in der *lateinischen Verschwindungsebene* liegende xy-Coordinatenaxenpaar so darin verschieben und drehen, dass dadurch noch weitere Vereinfachung der Formeln (4.) erreicht wird. Zu diesem Ende stelle ich die Betrachtung an, dass es im allgemeinsten Fall (im Unterschied von dem speciellen Fall der Reliefsperspective) nicht *entsprechende gleiche Strahlbüschel* in den beiden Raumgebieten giebt. Da es aber andererseits, wie schon vorher erwähnt ist, sich leicht einsehen lässt, dass jedem Ebenenbüschel im einen Gebiet ein *projectives* im andern entspricht, so stellt sich die Aufgabe, diejenigen Ebenenbüschel aufzusuchen, deren entsprechende ihnen *gleich* sind. Vermittelst solcher ist dann die Construction des einen Gebildes aus dem gegebenen andern, auf eine ähnlich einfache Weise wie bei der Central- und Basreliefsperspective, und die geometrische Deutung der Correlationscoefficienten angebahnt. —

Es seien die Coefficienten der Correlationsformeln (1.) durch die Gleichungen:

$$(5.) \qquad \begin{cases} \Phi &= A\xi + B\eta + C\zeta + D, \\ \Phi_1 &= A_1\xi + B_1\eta + C_1\zeta + D_1, \\ \Phi_2 &= A_2\xi + B_2\eta + C_2\zeta + D_2, \\ \Phi_3 &= A_3\xi + B_3\eta + C_3\zeta + D_3 \end{cases}$$

und die der Formeln (4.) durch die Gleichungen:

$$(6.) \qquad \begin{cases} \varphi &= a\xi + b\eta + c\zeta + d, \\ \varphi_1 &= a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta + d_1, \\ \varphi_2 &= a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta + d_2, \\ \varphi_3 &= \ldots\ldots\ldots\ d_3 \end{cases}$$

eingeführt.

Nun seien die Gleichungen der Axe eines lateinischen Ebenenbüschels, dessen entsprechendes griechisches ihm gleich ist, im Coordinatensystem (xyz):

$$(7.) \qquad \begin{cases} x - x^0 &= \varrho\alpha, \\ y - y^0 &= \varrho\beta, \\ z - z^0 &= \varrho\gamma, \end{cases}$$

wo α, β, γ die Richtungsdeterminanten dieser Axen bedeuten.

Zieht man durch den Punkt $(x^0y^0z^0)$ eine auf diese Axe senkrechte Gerade, deren Gleichungen, falls α_1, β_1, γ_1 ihre Richtungsdeterminanten sind,

$$(8.)\quad \begin{cases} x-x^0 = \varrho_1\alpha_1, \\ y-y^0 = \varrho_1\beta_1, \\ z-z^0 = \varrho_1\gamma_1, \end{cases}$$

so stehen die Richtungsdeterminanten der ihr entsprechenden Geraden im griechischen Gebiet im Verhältniss der drei Ausdrücke

$$(9.)\quad \begin{cases} (a_1-ax^0)\alpha_1+(a_2-ay^0)\beta_1-a\gamma_1, \\ (b_1-bx^0)\alpha_1+(b_2-by^0)\beta_1-b\gamma_1, \\ (c_1-cx^0)\alpha_1+(c_2-cy^0)\beta_1-c\gamma_1, \end{cases}$$

während die Richtungsdeterminanten der der genannten Axe entsprechenden im Verhältniss der drei Grössen:

$$(10.)\quad \begin{cases} (a_1-ax^0)\alpha+(a_2-ay^0)\beta-a\gamma, \\ (b_1-bx^0)\alpha+(b_2-by^0)\beta-b\gamma, \\ (c_1-cx^0)\alpha+(c_2-cy^0)\beta-c\gamma \end{cases}$$

stehen.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung zwischen den Coordinaten $x^0y^0z^0$ und den Richtungsdeterminanten $\alpha\beta\gamma$ $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ dafür, dass diese beiden Geraden ebenfalls auf einander senkrecht stehen, ist hienach:

$$(11.)\quad 0=\alpha_1(D_{11}\alpha+D_{12}\beta+D_{13}\gamma)+\beta_1(D_{21}\alpha+D_{22}\beta+D_{23}\gamma)+\gamma_1(D_{31}\alpha+D_{32}\beta+D_{33}\gamma),$$

worin der Kürze halber:

$$D_{11}=(a_1-ax^0)^2+(b_1-bx^0)^2+(c_1-cx^0)^2,$$
$$D_{22}=(a_2-ay^0)^2+(b_2-by^0)^2+(c_2-cy^0)^2,$$
$$D_{33}=(a^2+b^2+c^2)z^0z^0,$$
$$D_{12}=D_{21}=(a_1-ax^0)(a_2-ay^0)+(b_1-bx^0)(b_2-by^0)+(c_1-cx^0)(c_2-cy^0),$$
$$D_{23}=D_{32}=(a^2+b^2+c^2)y^0z^0-(aa_2+bb_2+cc_2)z^0,$$
$$D_{31}=D_{13}=(a^2+b^2+c^2)z^0x^0-(aa_1+bb_1+cc_1)z^0 \qquad \text{gesetzt ist.}$$

Man kann nun nach der obigen Bemerkung in der lateinischen Verschwindungsebene das xy-Axensystem so verschieben und drehen, dass in Bezug auf diese neue Lage die Ausdrücke D_{11}, D_{22}, D_{23} nur die Quadrate der neuen Coordinaten enthalten. Man hat nur zu dem Ende einzuführen:

$$(12.)\quad \begin{cases} x^0=\dfrac{aa_1+bb_1+cc_1}{a^2+b^2+c^2}+x_0=e_1+x_0, \\ y^0=\dfrac{aa_2+bb_2+cc_2}{a^2+b^2+c^2}+y_0=e_2+y_0, \\ z^0=\ldots\ldots\ldots z_0, \end{cases}$$

und erhält dann,

$$(12'.)\quad \begin{cases} \dfrac{(bc_1-b_1c)^2+(c_1a-ca_1)^2+(a_1b-ab_1)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} = E_1^2, \\ \dfrac{(bc_2-b_2c)^2+(c_2a-ca_2)^2+(a_2b-ab_2)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} = E_2^2, \\ \dfrac{(bc_1-b_1c)(bc_2-b_2c)+(ca_1-c_1a)(ca_2-c_2a)+(ab_1-a_1b)(ab_2-a_2b)}{(a^2+b^2+c^2)^2} = E_{12} \end{cases}$$

gesetzt, die obige Bedingungsgleichung (11.) in der einfachern Form:

$$(13.)\quad \begin{cases} \alpha_1\{(E_1^2+x_0^2)\alpha+(E_{12}+x_0y_0)\beta+x_0z_0\gamma\} \\ +\beta_1\{(E_{12}+x_0y_0)\alpha+(E_2^2+y_0^2)\beta+z_0y_0\gamma\} \\ +\gamma_1\{\quad z_0x_0\alpha \quad + \quad z_0y_0\beta \quad + \quad z_0^2\gamma \quad\} = 0. \end{cases}$$

Damit nun α, β, γ die Richtungsdeterminanten einer Axe seien, ist es nothwendig, dass für einen ihrer Punkte, wofür ich eben den Punkt $(x_0y_0z_0)$ nehme, die Bedingungsgleichung für alle Werthe von α_1, β_1, γ_1 bestehe, welche zugleich die Gleichung

$$(14.)\quad \alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1 = 0$$

befriedigen. Es muss in der That eine Axe im obigen Sinn die Eigenschaft besitzen, dass unter den unendlich vielen auf ihr senkrechten Ebenen eine existirt, deren entsprechende Ebene auf der der Axe entsprechenden Geraden senkrecht steht. Ich nenne diese Ebene die zur Axe zugehörige Normalebene. Nimmt man den Durchschnittspunkt der Axe mit dieser Ebene als den Punkt $(x_0y_0z_0)$ in den vorigen Formeln an, so müssen hienach für *jede* durch diesen Punkt auf die Axe senkrecht gezogene Gerade $(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$ die Bedingungsgleichungen (13.), (14.) bestehen, und man erhält hienach die folgenden drei Gleichungen, welche zwischen den Coordinaten des Punktes $(x_0y_0z_0)$ und den Richtungsdeterminanten der Axe $(\alpha\beta\gamma)$ bestehen:

$$(15.)\quad \begin{cases} (E_1^2+x_0^2)\alpha \quad +(E_{12}+x_0y_0)\beta+x_0z_0\gamma = \lambda\alpha, \\ (E_{12}+x_0y_0)\alpha+(E_2^2+y_0^2)\beta \quad +y_0z_0\gamma = \lambda\beta, \\ \quad z_0x_0\alpha \quad + \quad z_0y_0\beta \quad + \quad z_0^2\gamma = \lambda\gamma, \end{cases}$$

worin λ ein willkürlicher Multiplicator ist. Ich vereinfache diese Gleichungen noch mehr, indem ich das Coordinatensystem in der lateinischen Verschwindungsebene um einen Winkel δ drehe und demselben geeignet bestimme. Nennt man dann die neuen Coordinaten x', y', z', so sieht man leicht ein, wie die Correlationsformeln (1.) in folgende übergehen:

$$(16.)\quad \begin{cases} \frac{d_3x'}{z'} = \{(a_1-ae_1)\xi+(b_1-be_1)\eta+(c_1-ce_1)\zeta+(d_1-de_1)\}\cos\delta \\ \qquad -\{(a_2-ae_2)\xi+(b_2-be_2)\eta+(c_2-ce_2)\zeta+(d_2-de_2)\}\sin\delta, \\ \frac{d_3y'}{z'} = \{(a_1-ae_1)\xi+(b_1-be_1)\eta+(c_1-ce_1)\zeta+(d_1-de_1)\}\sin\delta \\ \qquad -\{(a_2-ae_2)\xi+(b_2-be_2)\eta+(c_2-ce_2)\zeta+(d_2-de_2)\}\cos\delta, \\ \frac{d_3}{z} = a\xi+b\eta+c\zeta+d. \end{cases}$$

Es ist hieraus schon ersichtlich, dass man eine solche Annahme für δ machen kann, dass die in diesen neuen Coefficienten ausgedrückten Grössen E_1^2, E_2^2, E_{12} ihre Natur nicht ändern, in so fern als die beiden erstern, die ich durch E_1 und E_2 bezeichnen will, positiv bleiben, und die dritte verschwindet, denn die Bestimmung des dazu erforderlichen Winkels δ ist reell. —

Hiernach gehen in diesen neuen Variabeln die Gleichungen (15.) in folgende über:

$$(17.)\quad \begin{cases} 0 = (E_1-\lambda')\alpha'+x_0'(\alpha'x_0'+\beta'y_0'+\gamma'z_0'), \\ 0 = (E_2-\lambda')\beta'+y_0'(\alpha'x_0'+\beta'y_0'+\gamma'z_0'), \\ 0 = -\lambda'\gamma'+z_0'(\alpha'x_0'+\beta'y_0'+\gamma'z_0'), \end{cases}$$

worin die auf das jetzige Coordinatensystem bezogenen Coordinaten des Punktes auf der Axe und die Richtungsdeterminanten der Axe durch x_0', y_0', z_0', α', β', γ' ebenso wie die betreffende Grösse λ durch λ' bezeichnet ist. —

Hieraus folgt nun die cubische Gleichung für λ':

$$(18.)\quad \frac{x_0'x_0'}{\lambda'-E_1}+\frac{y_0'y_0'}{\lambda'-E_2}+\frac{z_0'z_0'}{\lambda'} = 1$$

und durch die betreffende Wurzel ausgedrückt:

$$(19.)\quad \frac{\alpha'}{\gamma'} = \frac{x_0'}{z_0'}\,\frac{\lambda'}{\lambda'-E_1}, \qquad \frac{\beta'}{\gamma'} = \frac{y_0'}{z_0'}\,\frac{\lambda'}{\lambda'-E_2}.$$

Da die Bedingungsgleichung (13.) zwischen den Richtungsdeterminanten zweier auf einander senkrechter Geraden und den Coordinaten ihres Schnittpunkts, deren entsprechende dieselbe Eigenschaft haben, jetzt in folgende sich verwandelt:

$$(20.)\quad \alpha'\alpha_1'E_1+\beta'\beta_2'E_2+(\alpha'x_0'+\beta'y_0'+\gamma'z_0')(\alpha_1'x_0'+\beta_1'y_0'+\gamma_1'z_0') = 0,$$

so überzeugt man sich leicht davon, dass, während eine der Wurzeln der cubischen Gleichung zur Axe gehört, die beiden andern solchen Geraden entsprechen müssen, welche diese Bedingung erfüllen. Es ergeben sich diese Resultate aus den Gleichungen:

$$(21.)\quad \begin{cases} \alpha'\alpha_1'E_1+\beta'\beta_1'E_2+(\alpha'x_0'+\beta'y_0'+\gamma'z_0')(\alpha_1'x_0'+\beta_1'y_0'+\gamma_1'z_0') \\ \quad =\lambda'(\alpha'\alpha_1'+\beta'\beta_1'+\gamma'\gamma_1')=\lambda_1'(\alpha'\alpha_1'+\beta'\beta_1'+\gamma'\gamma_1'), \end{cases}$$

welche aus den Gleichungen (17.) und den analogen für α_1', β_1', γ_1', λ' folgen, sobald λ' und λ_1' verschieden sind. Nimmt man also den besondern Fall aus, worin alle drei Wurzeln der cubischen Gleichung gleich sind (es führt derselbe darauf, dass der Punkt $(x_0'y_0'z_0')$ das Centrum eines Strahlbüschels im Raum ist, dessen entsprechendes ihm gleich ist), so kann man für die zwei verschiedenen Wurzeln der cubischen Gleichung λ' und λ_1' nehmen, und sieht daher, dass eine derselben zur Axe durch den Punkt $(x_0'y_0'z_0')$ gehören wird, falls nur die zur andern Wurzel gehörige Gerade jede beliebige Richtung in der zur Axe senkrechten Ebene haben kann, d. h. falls nur die Ausdrücke für die Verhältnisse ihrer Richtungsdeterminanten unbestimmt werden. Denn macht man dasselbe mit zwei beliebigen solchen Geraden in der genannten Ebene, welche den Winkel φ bilden mögen, und mit den auf ihnen senkrechten in derselben Ebene, so entspricht ihnen im griechischen Gebiet ein eben solches Paar Gerader, welches sich in dem dem Punkt $(x_0'y_0'z_0')$ entsprechenden Punkt der entsprechenden griechischen Axe schneidet. Wegen der Eindeutigkeit der Correlation bilden aber bekanntlich beide Gebilde von vier Geraden zwei projectivische ebene Strahlbüschel, und daraus folgt, dass dem Winkel φ ein *gleicher* Winkel φ im griechischen System entspricht. Wegen der willkürlichen Grösse des Winkels φ ist also die obige Behauptung gerechtfertigt, dass die beiden so erzeugten Ebenenbüschel projectivisch gleich sind.

Es bleibt also nur noch übrig, die aus dieser nothwendigen und hinreichenden Bedingung fliessende Relation zwischen x_0', y_0', z_0' und die damit zusammenhängenden Werthe der Richtungsdeterminanten α', β', γ' der *Axe* abzuleiten.

Es wird nun das Verhältniss $\alpha_1'\ \beta_1'\ \gamma_1'$, welches zu einer zweiten Wurzel der cubischen Gleichung gehört, in folgenden zwei Hauptfällen unbestimmt.

Es sei $E_1 > E_2$ (im entgegengesetzten Fall ist ebenso zu verfahren, und der Fall, dass $E_1 = E_2$ ist, ist wiederum ein specieller Ausnahmefall). Es seien dann die drei Wurzeln der cubischen Gleichung $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ genannt, so kann man leicht einsehen, dass wenn $\lambda_3 > \lambda_2 > \lambda_1$ angenommen wird, folgende Ungleichungen bestehen:

$$\lambda_3 \geqq E_1 \geqq \lambda_2 \geqq E_2 \geqq \lambda_1 \geqq 0,$$

und es gehören zu den drei Wurzeln die drei Systeme von Coefficientenverhältnissen

$$(22.)\quad \begin{cases} \frac{\alpha_1}{\gamma_1} = \frac{x_0'}{z_0'}\frac{\lambda_3}{\lambda_3 - E_1}, & \frac{\beta_1}{\gamma_1} = \frac{y_0'}{z_0'}\frac{\lambda_3}{\lambda_3 - E_2}, \\ \frac{\alpha_2}{\gamma_1} = \frac{x_0'}{z_0'}\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - E_1}, & \frac{\beta_2}{\gamma_2} = \frac{y_0'}{z_0'}\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - E_2}, \\ \frac{\alpha_1}{\gamma_1} = \frac{x_0'}{z_0'}\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - E_1}, & \frac{\beta_1}{\gamma_1} = \frac{y_0'}{z_0'}\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - E_2}. \end{cases}$$

Ich setze nun erstens:

$$(23.)\quad \lambda_3 = E_1 + \varepsilon^2, \quad \lambda_2 = E_1 - \eta^2,$$

so erhält man bekanntlich die Formeln:

$$(24.)\quad \begin{cases} x_0' x_0' = \frac{(E_1 - \lambda_1)\varepsilon^2\eta^2}{(E_1 - E_2)E_1}, \\ y_0' y_0' = \frac{(E_2 - \lambda_1)(E_1 - E_2 + \varepsilon^2)(E_1 - E_2 - \eta^2)}{(E_1 - E_2)E_2}, \\ z_0' z_0' = \frac{\lambda_1(E_1 + \varepsilon^2)(E_1 - \eta^2)}{E_1 E_2}. \end{cases}$$

Der Ausdruck

$$\alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3$$

verschwindet, da sein Zähler, wenn man ihn durch die Formeln (22.) ausdrückt, der verschwindende Ausdruck:

$$\frac{E_1 - \lambda_1}{(E_2 - E_1)E_1} + \frac{E_2 - \lambda_1}{(E_1 - E_2)E_2} + \frac{\lambda_1}{E_1 E_2}$$

ist. Es stehen daher die beiden ihnen zugehörigen Geraden auf einander senkrecht, und da beide auf der zu

$$\alpha_1 \quad \beta_1 \quad \gamma_1$$

gehörigen Geraden aus demselben Grunde senkrecht stehen, so findet dasselbe mit den drei entsprechenden Geraden statt. Dasselbe gilt auch für unendlich kleine Werthe von ε und η. Man erhält dann aber, da die drei Gleichungen gelten:

$$\frac{x_0' x_0'}{(\lambda_1 - E_1)^2} + \frac{y_0' y_0'}{(\lambda_1 - E_2)^2} + \frac{z_0' z_0'}{\lambda_1^2} = \frac{(\lambda_1 - E_1 + \eta^2)(\lambda_1 - E_1 - \varepsilon^2)}{(\lambda_1 - E_1)(\lambda_1 - E_2)\lambda_1},$$

$$\frac{x_0' x_0'}{(\lambda_2 - E_1)^2} + \frac{y_0' y_0'}{(\lambda_2 - E_2)^2} + \frac{z_0' z_0'}{\lambda_2^2} = \frac{\eta^2 + \varepsilon^2}{\eta^2}\frac{E_1 - \lambda_1 - \eta^2}{(E_1 - E_2 - \eta^2)(E_1 - \eta^2)},$$

$$\frac{x_0' x_0'}{(\lambda_3 - E_1)^2} + \frac{y_0' y_0'}{(\lambda_3 - E_2)^2} + \frac{z_0' z_0'}{\lambda_3^2} = \frac{\eta^2 + \varepsilon^2}{\varepsilon^2}\frac{E_1 - \lambda_1 + \varepsilon^2}{(E_1 - E_2 + \varepsilon^2)(E_1 + \varepsilon^2)},$$

für $\varepsilon = 0$, $\eta = 0$

$$\alpha_1 = 0, \qquad \beta_1 = -\sqrt{\frac{\lambda_1(E_1-E_2)}{(E_1-\lambda_1)E_2}}, \quad \gamma_1 = \sqrt{\frac{E_2-\lambda_1}{E_1-\lambda_1}},$$

$$\alpha_2 = -\operatorname{Lim}\frac{\varepsilon}{\sqrt{\eta^2+\varepsilon^2}}, \quad \beta_2 = \frac{E_1}{E_2}\operatorname{Lim}\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+\varepsilon^2}}, \quad \gamma_2 = \sqrt{\frac{\lambda_1 E_1(E_1-E_2)}{E_1-\lambda_1}}\operatorname{Lim}\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+\varepsilon^2}},$$

$$\alpha_3 = \operatorname{Lim}\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+\varepsilon^2}}, \quad \beta_3 = \frac{E_1}{E_2}\operatorname{Lim}\frac{\varepsilon}{\sqrt{\eta^2+\varepsilon^2}}, \quad \gamma_3 = \sqrt{\frac{\lambda_1(E_1-E_2)E_1}{E_1-\lambda_1}}\operatorname{Lim}\frac{\varepsilon}{\sqrt{\eta^2+\varepsilon^2}}.$$

Es ist hiernach die Gleichung der gesuchten Axe, da die Richtungsdeterminanten der beiden auf sie und unter einander senkrechten unbestimmt werden,

$$\frac{y'y'_0}{E_1-E_2}+\frac{z'z'_0}{E_1} = \frac{y'_0y'_0}{E_1-E_2}+\frac{z'_0z'_0}{E_1},$$

und aus der cubischen Gleichung (18.) folgt, wenn man die Wurzel λ_2 oder λ_3 für λ' hineinsetzt und den Werth von $x'_0x'_0$ aus (24.) nimmt:

$$\frac{(E_1-\lambda_1)\varepsilon^2}{(E_2-E_1)E_1}+\frac{y'_0y'_0}{E_1-E_2-\eta^2}+\frac{z'_0z'_0}{E_1-\eta^2} = 1,$$

$$\frac{(E_1-\lambda_1)\eta^2}{(E_1-E_2)E_1}+\frac{\eta'_0\eta'_0}{E_1-E_2+\varepsilon^2}+\frac{z'_0z'_0}{E_1+\varepsilon^2} = 1,$$

also für $\varepsilon = 0$ und $\eta = 0$ die Gleichung des Orts der Punkte $(x'_0y'_0z'_0)$

$$(25.) \qquad x'_0 = 0, \quad \frac{y'_0y'_0}{E_1-E_2}+\frac{z'_0z'_0}{E_1} = 1,$$

so dass die Axe eine Tangente an die durch diese Gleichung ausgedrückte Ellipse im Punkte $(y'_0z'_0)$ ist.

Ganz auf dieselbe Weise habe ich in der zweiten Voraussetzung, wobei:

$$\lambda_2 = E_2+\varepsilon^2, \qquad \lambda_1 = E_2-\eta^2$$

gesetzt wird, die Axe als Tangente der Hyperbel in einem beliebigen ihrer Punkte gefunden, deren Gleichungen

$$y'_0 = 0, \quad \frac{z'_0z'_0}{E_2}-\frac{x'_0x'_0}{E_1-E_2} = 1$$

sind. Es werden hier die Richtungsdeterminanten

$$\alpha_1, \quad \beta_1, \quad \gamma_1,$$
$$\alpha_2, \quad \beta_2, \quad \gamma_2$$

unbestimmt.

Andere Annahmen führen auf eine unmögliche Curve oder auf nur einzelne Punkte im lateinischen Gebiet, worin die Richtungsdeterminanten zweier unter einander senkrechten und eine dritte senkrecht schneidenden Geraden unbestimmt werden.

Die beiden gefundenen Curven sind die sogenannten Focalcurven zu der in der Verschwindungsebene liegenden Ellipse, deren Gleichung in demselben Coordinatensystem

$$(26.) \qquad \frac{x'x'}{E_1} + \frac{y'y'}{E_2} = 1$$

ist.

Auf diese Weise bin ich zu dem Theorem gelangt:

Bei der eindeutigen allgemeinsten Raumcorrelation giebt es in der Verschwindungsebene eines jeden der beiden Raumgebiete eine Ellipse, deren zwei Focalcurven die Eigenschaft haben, dass ihre Tangenten Axen der Correlation und die zugehörigen Berührungspunkte respective die Schnittpunkte der Axe mit der zugehörigen Normalebene sind. —

Man kann dieses Theorem auch rein geometrisch aus den *Steiner*schen Principien der projectivischen Gebilde ableiten. Herr *Maegis* ist auf dasselbe vermittelst eines andern einfacheren Theorems gelangt, wonach *die* drei durch einen Punkt des Gebiets laufenden sich senkrecht schneidenden Geraden, deren entsprechende *dieselbe* Eigenschaft haben, mit den drei Axen einer Oberfläche zweiter Ordnung parallel laufen, deren höchster Punkt über der Verschwindungsebene dieser Punkt ist. Auch hat er die richtige Bemerkung gemacht, dass für den Fall, dass der angenommene Punkt auf einer Axe liegen soll, diese Oberfläche eine Rotationsoberfläche ist, woraus ihm dann bald auch gelungen ist, auf die obigen beiden Oerter des gesuchten Punktes zu gelangen. In unserm einfachsten letzten Coordinatensystem wird die Gleichung der genannten Oberfläche

$$(27.) \qquad \frac{(x'z'_0 - z'x'_0)^2}{E_1} + \frac{(y'z'_0 - z'y'_0)^2}{E_2} + z'z' = z'_0 z'_0,$$

woraus man sieht, dass sie die Verschwindungsebene ($z' = 0$) in der Ellipse, deren Gleichung (26.) ist, schneidet.

Ich werde nun noch auf eine andere Art, als die am Anfang angedeutete, nämlich *vermittelst zweier Axen*, die man beliebig in ihren beiden Ebenen annehmen kann, zu irgend einem Punkt des lateinischen Systems den entsprechenden des griechischen construiren. Jedenfalls giebt es verschiedene Arten das gegebene Theorem zu diesem Zweck zu benutzen.

Den beiden Ebenen, worin die Axenschaaren liegen, entsprechen im andern Gebiet ebensolche zwei Ebenen; beide Ebenenpaare stehen unter sich und auf der betreffenden Verschwindungsebene ihres Gebiets senkrecht; zu

jeder der beiden Focalcurven kann die entsprechende gefunden werden, und zu jeder Axe die entsprechende. Alle diese Behauptungen und Aufgaben lassen sich bei den einfachen Formeln analytisch leicht lösen, und andrerseits ist ihre geometrische Behandlung ohne Schwierigkeiten auszuführen. Hat man also drei Axen und die ihnen entsprechenden construirt, so darf man nur durch sie drei Ebenen ziehen, welche durch den abzubildenden Punkt gehen. Schneiden dieselben die Verschwindungsebene in drei Geraden, so hat man dieselben nur in ihrer Lage zu den Axenebenen auf das andere Gebiet zu übertragen und mit ihnen respective durch die Bilder der drei Axen parallele Ebenen zu ziehen, um im Schnittpunkt derselben das Bild des gegebenen Punktes zu erhalten. Natürlich werden gewisse von den Axen, z. B. die an den Scheiteln der Focalcurven einen Vorzug vor den übrigen haben, in so fern als sie selbst, sowie ihre Bilder leichter zu construiren sind und eine mehr symmetrische Construction gewähren. —

Ich will jedoch, ohne auf diese an sich sehr interessanten Untersuchungen näher einzugehen, nur noch Einiges über die geometrische Bedeutung der Correlationscoefficienten mittheilen.

Offenbar sind in den Grundformeln (5.) die Coefficienten

$$\begin{matrix} A_1, & B_1, & C_1, \\ A_2, & B_2, & C_2, & D, \\ A_3, & B_3, & C_3, \end{matrix}$$

von der ersten Dimension, die Grössen

$$A, \quad B, \quad C$$

von der nullten und die Grössen

$$D_1, \quad D_2, \quad D_3$$

von der zweiten anzunehmen, damit zugleich die drei griechischen, wie die drei lateinischen Coordinaten Grössen erster Dimension werden. Ebendasselbe findet bei den kleinen Buchstaben statt, bei denen drei derselben

$$a_3 = b_3 = c_3 = 0$$

sind.

Bezeichnet man nun die Determinante der 16 Grössen

$$(28.) \qquad \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix}$$

durch ∇, so ist dieselbe eine Grösse der vierten Dimension. Man erhält vermittelst ihrer die umgekehrten Correlationsformeln:

$$(29.)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{\frac{\partial\nabla}{\partial A} + X\frac{\partial\nabla}{\partial A_1} + Y\frac{\partial\nabla}{\partial A_2} + Z\frac{\partial\nabla}{\partial A_3}}{\frac{\partial\nabla}{\partial D} + X\frac{\partial\nabla}{\partial D_1} + Y\frac{\partial\nabla}{\partial D_2} + Z\frac{\partial\nabla}{\partial D_3}}, \\ \eta = \dfrac{\frac{\partial\nabla}{\partial B} + X\frac{\partial\nabla}{\partial B_1} + Y\frac{\partial\nabla}{\partial B_2} + Z\frac{\partial\nabla}{\partial B_3}}{\frac{\partial\nabla}{\partial D} + X\frac{\partial\nabla}{\partial D_1} + Y\frac{\partial\nabla}{\partial D_2} + Z\frac{\partial\nabla}{\partial D_3}}, \\ \zeta = \dfrac{\frac{\partial\nabla}{\partial C} + X\frac{\partial\nabla}{\partial C_1} + Y\frac{\partial\nabla}{\partial C_2} + Z\frac{\partial\nabla}{\partial C_3}}{\frac{\partial\nabla}{\partial D} + X\frac{\partial\nabla}{\partial D_1} + Y\frac{\partial\nabla}{\partial D_2} + Z\frac{\partial\nabla}{\partial D_3}}. \end{cases}$$

Es ist hienach das vom Anfangspunkt

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0$$

auf die lateinische Verschwindungsebene, deren Gleichung hienach

$$\frac{\partial\nabla}{\partial D} + X\frac{\partial\nabla}{\partial D_1} + Y\frac{\partial\nabla}{\partial D_2} + Z\frac{\partial\nabla}{\partial D_3} = 0$$

ist, gefällte Perpendikel, welches ich R nennen will:

$$(30.)\quad R = \frac{-\frac{\partial\nabla}{\partial D}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\nabla}{\partial D_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\nabla}{\partial D_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\nabla}{\partial D_3}\right)^2}},$$

und die Richtungsdeterminanten desselben, welche wir durch $\sin\vartheta\sin\varphi$, $\sin\vartheta\cos\varphi$, $\cos\vartheta$ bezeichnen, verhalten sich wie:

$$(31.)\quad \frac{\partial\nabla}{\partial D_1} : \frac{\partial\nabla}{\partial D_2} : \frac{\partial\nabla}{\partial D_3}.$$

Verlegt man nun den Anfangspunkt der lateinischen Coordinaten in den Fusspunkt dieses Perpendikels, so gelangt man zu dem Coordinatensystem, welches oben $x\ y\ z$ genannt ist, vermittelst der Formeln:

$$(32.)\quad \begin{cases} x = X\cos\varphi - Y\sin\varphi, \\ y = X\cos\vartheta\sin\varphi + Y\cos\vartheta\cos\varphi - Z\sin\vartheta, \\ R + z = X\sin\vartheta\sin\varphi + Y\sin\vartheta\cos\varphi + Z\cos\vartheta, \end{cases}$$

so dass diese sämmtlichen 8 Coefficienten durch φ und ϑ, also durch die 16 ursprünglichen ausgedrückt sind. Führt man in dieselben die ursprünglichen Formeln (1.) ein, so erhält man in den daraus folgenden

$$(33.)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{a_1\xi + b_1\eta + c_1\zeta + d_1}{a\xi + b\eta + c\zeta + d}, \\ y = \dfrac{a_2\xi + b_2\eta + c_2\zeta + d_2}{a\xi + b\eta + c\zeta + d}, \\ z = \dfrac{d_3}{a\xi + b\eta + c\zeta + d} \end{cases}$$

alle 13 Coefficienten durch die ursprünglichen 16 ausgedrückt.

In der That ergiebt die angedeutete Rechnung, dass, wenn man in den 3 Ausdrücken

$$(34.)\qquad \begin{cases} \dfrac{M_1\dfrac{\partial\nabla}{\partial D_1} - M_2\dfrac{\partial\nabla}{\partial D_2}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\nabla}{\partial D_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\nabla}{\partial D_2}\right)^2}} \\ \dfrac{\left\{M_1\dfrac{\partial\nabla}{\partial D_3} - M_3\dfrac{\partial\nabla}{\partial D_1}\right\}\dfrac{\partial\nabla}{\partial D_1} + \left\{M_2\dfrac{\partial\nabla}{\partial D_3} - M_3\dfrac{\partial\nabla}{\partial D_2}\right\}\dfrac{\partial\nabla}{\partial D_2}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\nabla}{\partial D_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\nabla}{\partial D_2}\right)^2}\sqrt{\left(\dfrac{\partial\nabla}{\partial D_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\nabla}{\partial D_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\nabla}{\partial D_3}\right)^2}}, \\ \dfrac{M_1\dfrac{\partial\nabla}{\partial D_1} + M_2\dfrac{\partial\nabla}{\partial D_2} + M_3\dfrac{\partial\nabla}{\partial D_3}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\nabla}{\partial D_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\nabla}{\partial D_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\nabla}{\partial D_3}\right)^2}} \end{cases}$$

statt M der Reihe nach die Grössen:

$$A \quad B \quad C \quad D$$

setzt, die Coefficienten

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & d_3 \end{matrix}$$

hervorgehen, während

$$a = A, \quad b = B, \quad c = C, \quad d = D$$

ist.

Umgekehrt kann man die 16 ursprünglichen Coefficienten durch die 13 letztern und durch die 3 geometrisch interpretrirbaren Grössen

$$R, \quad \varphi, \quad \vartheta$$

ausdrücken. Man hat zu diesem Zwecke nur nöthig, in den Formeln

$$(35.)\qquad \begin{cases} X = \quad\; x\cos\varphi + y\cos\vartheta\sin\varphi + (R+z)\sin\vartheta\sin\varphi, \\ Y = -x\sin\varphi + y\cos\vartheta\cos\varphi + (R+z)\sin\vartheta\cos\varphi, \\ Z = -y\sin\vartheta + (R+z)\cos\vartheta \end{cases}$$

die Formeln

$$(36.)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{a_1\xi+b_1\eta+c_1\zeta+d_1}{a\xi+b\eta+c\zeta+d}, \\ y = \dfrac{a_2\xi+b_2\eta+c_2\zeta+d_2}{a\xi+b\eta+c\zeta+d}, \\ z = \dfrac{d_3}{a\xi+b\eta+c\zeta+d} \end{cases}$$

einzuführen, um die gesuchten Ausdrücke

$$(37.)\qquad \begin{cases} A_1 = a_1\cos\varphi + a_2\cos\vartheta\sin\varphi + aR\sin\vartheta\sin\varphi, \\ B_1 = b_1\cos\varphi + b_2\cos\vartheta\sin\varphi + bR\sin\vartheta\sin\varphi, \\ C_1 = c_1\cos\varphi + c_2\cos\vartheta\sin\varphi + cR\sin\vartheta\sin\varphi, \\ D_1 = d_1\cos\varphi + d_2\cos\vartheta\sin\varphi + (d_3+dR)\sin\vartheta\sin\varphi, \\ A_2 = -a_1\sin\varphi + a_2\cos\vartheta\cos\varphi + aR\sin\vartheta\cos\varphi, \\ B_2 = -b_1\sin\varphi + b_2\cos\vartheta\cos\varphi + bR\sin\vartheta\cos\varphi, \\ C_2 = -c_1\sin\varphi + c_2\cos\vartheta\cos\varphi + cR\sin\vartheta\cos\varphi, \\ D_2 = -d_1\sin\varphi + d_2\cos\vartheta\cos\varphi + (d_3+dR)\sin\vartheta\cos\varphi, \\ A_3 = -a_2\sin\vartheta + Ra\cos\vartheta, \\ B_3 = -b_2\sin\vartheta + Rb\cos\vartheta, \\ C_3 = -c_2\sin\vartheta + Rc\cos\vartheta, \\ D_3 = -d_2\sin\vartheta + (d_3+Rd)\cos\vartheta \end{cases}$$

zu erhalten.

Hieraus folgt denn von selbst, dass es zur geometrischen Interpretation der 16 ursprünglichen Coefficienten genügt, die 13 letzten Coefficienten so zu interpretiren, und dass umgekehrt es hinreichend ist, geometrische Bestimmungsstücke erst durch die letztern 13 Coefficienten auszudrücken, um sie dann später auch durch die 16 ursprünglichen auszudrücken.

Ich werde daher mich zuerst mit diesen 13 Coefficienten beschäftigen. Es sind:

$$(38.)\qquad \begin{cases} \dfrac{a_1}{a}, & \dfrac{a_2}{a}, & 0, \\ \dfrac{b_1}{b}, & \dfrac{b_2}{b}, & 0, \\ \dfrac{c_1}{c}, & \dfrac{c_2}{c}, & 0, \\ \dfrac{d_1}{d}, & \dfrac{d_2}{d}, & \dfrac{d_3}{d} \end{cases}$$

die Coordinaten der 4 Punkte im lateinischen Gebiet, deren entsprechende

Punkte im griechischen Gebiet die Coordinaten

$$\begin{matrix} \infty, & 0, & 0 \\ 0, & \infty, & 0 \\ 0, & 0, & \infty \\ 0, & 0, & 0 \end{matrix}$$

haben.

Es sind

$$(39.)\quad \begin{cases} e_1 = \dfrac{aa_1+bb_1+cc_1}{a^2+b^2+c^2}, \\ e_2 = \dfrac{aa_2+bb_2+cc_2}{a^2+b^2+c^2} \end{cases}$$

die Coordinaten des oben näher beschriebenen Centrums der lateinischen Verschwindungsebene. Ebenso kann man auch den Drehungswinkel δ bestimmen und dabei gleich die Grössen E_1 und E_2.

Es ergiebt sich nach leichter Rechnung, dass die Formeln (12′.), wenn man für die 13 Grössen

$$d_3, \qquad \begin{matrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{matrix}$$

die aus den Gleichungen (16.) entsprechenden analogen

$$d_3, \qquad \begin{matrix} a & b & c & d \\ \left|\begin{matrix} a_1-ae_1 & \sin\delta \\ a_2-ae_2 & \cos\delta \end{matrix}\right| & \left|\begin{matrix} b_1-be_1 & \sin\delta \\ b_2-be_2 & \cos\delta \end{matrix}\right| & \left|\begin{matrix} c_1-ce_1 & \sin\delta \\ c_2-ce_2 & \cos\delta \end{matrix}\right| & \left|\begin{matrix} d_1-de_1 & \sin\delta \\ d_2-de_2 & \cos\delta \end{matrix}\right| \\ \left|\begin{matrix} a_1-ae_1 & -\cos\delta \\ a_2-ae_2 & \sin\delta \end{matrix}\right| & \left|\begin{matrix} b_1-be_1 & -\cos\delta \\ b_2-be_2 & \sin\delta \end{matrix}\right| & \left|\begin{matrix} c_1-ce_1 & -\cos\delta \\ c_2-ce_2 & \sin\delta \end{matrix}\right| & \left|\begin{matrix} d_1-de_1 & -\cos\delta \\ d_2-de_2 & \sin\delta \end{matrix}\right| \end{matrix}$$

substituirt, in folgende übergehen:

$$(40.)\quad \begin{cases} E_1 = \\ \dfrac{\{(bc_1-cb_1)\cos\delta-(bc_2-cb_2)\sin\delta\}^2+\{(ca_1-ac_1)\cos\delta-(ca_2-ac_2)\sin\delta\}^2+\{(ab_1-ba_1)\cos\delta-(ab_2-ba_2)\sin\delta\}^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} \\ E_2 = \\ \dfrac{\{(bc_1-cb_1)\sin\delta+(bc_2-cb_2)\cos\delta\}^2+\{(ca_1-ac_1)\sin\delta+(ca_2-ac_2)\cos\delta\}^2+\{(ab_1-ba_1)\sin\delta+(ab_2-ba_2)\sin\delta\}^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} \\ \operatorname{tang} 2\delta = \dfrac{(bc_1-cb_1)(bc_2-cb_2)+(ca_1-ac_1)(ca_2-ac_2)+(ab_1-ba_1)(ab_2-ba_2)}{(bc_2-cb_2)^2+(ca_2-ac_2)^2+(ab_2-ba_2)^2-(bc_1-cb_1)^2-(ca_1-ac_1)^2-(ab_1-ba_1)} . \end{cases}$$

Es sind auf diese Weise die sämmtlichen geometrischen Grössen, welche in der früheren Betrachtung vorkommen, nämlich die 3 Punkte in der lateinischen

Verschwindungsebene, welche den drei unendlich entfernten Punkten in den Richtungen der drei griechischen Coordinaten-Axen entsprechen, und der Punkt, dessen Bild der Anfangspunkt in diesem griechischen Gebiet ist, das Centrum in der lateinischen Verschwindungsebene und die Lage der beiden Ebenen, worin die Schaaren der Axen liegen, so wie die beiden Focalcurven, die von diesen Axenschaaren eingehüllt werden, durch die 13 Coefficienten ausgedrückt. Zur umgekehrten Bestimmung der 13 Coefficienten durch geometrische Bestimmungsstücke nehme ich, was freisteht,

$$a^2+b^2+c^2 = 1$$

an und sehe d_3 selbst als geometrische Bestimmungsgrösse an. In der That sind dann a, b, c Richtungsdeterminanten einer Normale auf die griechische Verschwindungsebene, und es folgt aus der dritten Gleichung (33.)

$$d_3 = z\ (a\xi+b\eta+c\zeta+d).$$

Wenn man daher im griechischen System einen Punkt Π nimmt, dessen Entfernung von der griechischen Verschwindungsebene die zu Grunde gelegte Längeneinheit ist, so folgt aus dieser Gleichung, dass $\sqrt{d_3}$ die mittlere Proportionale zwischen der Längeneinheit und der Entfernung des dem Punkte Π entsprechenden Punktes P von der lateinischen Verschwindungsebene ist. Ich habe dann als geometrische 12 Bestimmungsstücke nur solche eingeführt, welche im lateinischen Gebiet ihre geometrische Rolle spielen, und die besonders ausgezeichneten Elementen des griechischen Gebiets entsprechen, und werde nun durch dieselben die 13 Coefficienten ausdrücken, von denen drei der Gleichung

$$a^2+b^2+c^2 = 1$$

Genüge leisten sollen.

Es seien die lateinischen Coordinaten des den Punkten des griechischen Systems, deren Coordinaten

$$\begin{aligned} &\xi = 0, && \eta = 0, && \zeta = 0, \\ &\xi = \infty, && \eta = 0, && \zeta = 0, \\ &\xi = 0, && \eta = \infty, && \zeta = 0, \\ &\xi = 0, && \eta = 0, && \zeta = \infty \end{aligned}$$

sind, respective:

$$\begin{array}{lll} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & 0 \\ x_4 & y_4 & 0. \end{array}$$

Sind dann ferner die Entfernung des Punktes im lateinischen Gebiet von der Verschwindungsebene, dessen entsprechender im griechischen von der betreffenden Verschwindungsebene um 1 entfernt ist, und die beiden Coordinaten des Durchschnittspunkts der beiden Ebenen, worin die Schaaren der Axen im lateinischen Gebiet liegen, respective

$$z_6$$
$$x_5 \quad y_5,$$

so hat man die folgenden Formeln zur Bestimmung der 13 Coefficienten:

$$a^2 = \frac{x_3y_4 - x_4y_3 + x_4y_5 - x_5y_4 + x_5y_3 - x_3y_5}{x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_4 - x_4y_3 + x_4y_2 - x_2y_4},$$

$$b^2 = \frac{x_4y_2 - x_2y_4 + x_2y_5 - x_5y_2 + x_5y_4 - x_4y_5}{x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_4 - x_4y_3 + x_4y_2 - x_2y_4},$$

$$c^2 = \frac{x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_5 - x_5y_3 + x_5y_2 - x_2y_5}{x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_4 - x_4y_3 + x_4y_2 - x_2y_4},$$

$$a_1 = ax_2, \qquad a_2 = ay_2,$$
$$b_1 = bx_3, \qquad b_2 = by_3,$$
$$c_1 = cx_4, \qquad c_2 = cy_4,$$

$$\text{Längeneinheit} = \frac{d_3}{z_6}, \quad d = \frac{d_3}{z_1}, \quad d_1 = \frac{x_1}{z_1}d_3, \quad d_2 = \frac{y_1}{z_1}d_3.$$

Wie man aus diesen Coefficienten die 16 ursprünglichen zusammensetzt, ist oben angegeben. Natürlich kann man diese letztern auch direct aus den genannten 12 geometrischen Stücken und der Lage der lateinischen Verschwindungsebene ausdrücken und symmetrische Ausdrücke erhalten. Die lateinische Verschwindungsebene wird dann durch die 3 auf ihr liegenden Punkte bestimmt, die den Punkten

$$\xi = \infty, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0,$$
$$\xi = 0, \qquad \eta = \infty, \qquad \zeta = 0,$$
$$\xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = \infty$$

entsprechen, und deren lateinische Coordinaten als gegeben angenommen werden. Sie seien:

$$(41.) \quad \begin{cases} X_2 = \frac{A_1}{A}, & X_3 = \frac{B_1}{B}, & X_4 = \frac{C_1}{C}, \\ Y_2 = \frac{A_2}{A}, & Y_3 = \frac{B_2}{B}, & Y_4 = \frac{C_2}{C}, \\ Z_2 = \frac{A_3}{A}, & Z_3 = \frac{B_3}{B}, & Z_4 = \frac{C_3}{C}. \end{cases}$$

Die Coefficienten des dem Punkte:

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0$$

entsprechenden geben:

$$(42.) \qquad X_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad Y_1 = \frac{D_2}{D}, \qquad Z_1 = \frac{D_3}{D}.$$

Es ist die Gleichung der lateinischen Verschwindungsebene

$$0 = X\begin{vmatrix} Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ Z_2 & Z_3 & Z_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + Y\begin{vmatrix} Z_2 & Z_3 & Z_4 \\ 1 & 1 & 1 \\ X_2 & X_3 & X_4 \end{vmatrix} + Z\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ X_2 & X_3 & X_4 \\ Y_2 & Y_3 & Y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_2 & X_3 & X_4 \\ Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ Z_2 & Z_3 & Z_4 \end{vmatrix}.$$

Wird also der Kürze halber:

$$M = \sqrt{\begin{vmatrix} Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ Z_2 & Z_3 & Z_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} Z_2 & Z_3 & Z_4 \\ 1 & 1 & 1 \\ X_2 & X_3 & X_4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ X_2 & X_3 & X_4 \\ Y_2 & Y_3 & Y_4 \end{vmatrix}^2}$$

gesetzt, so ist das Perpendikel R vom Punkt XYZ auf die lateinische Verschwindungsebene:

$$R = \frac{1}{M}\left\{ X\begin{vmatrix} Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ Z_2 & Z_3 & Z_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + Y\begin{vmatrix} Z_2 & Z_3 & Z_4 \\ 1 & 1 & 1 \\ X_2 & X_3 & X_4 \end{vmatrix} + Z\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ X_2 & X_3 & X_4 \\ Y_2 & Y_3 & Y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_2 & X_3 & X_4 \\ Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ Z_2 & Z_3 & Z_4 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= -\frac{D}{M}\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \frac{1}{A\xi + B\eta + C\zeta + D}.$$

Wenn daher ein Punkt, welchem im griechischen Gebiet ein um die Längeneinheit von der griechischen Verschwindungsebene entfernter Punkt entspricht, d. h. ein solcher, wofür

$$A\xi + B\eta + C\zeta + D = 1$$

ist, die Coordinaten $X\ Y\ Z$ hat, so erhält man:

$$R = \frac{D}{M} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 \end{vmatrix}.$$

Es ist daher auch umgekehrt

$$D = MR : \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 \end{vmatrix},$$

und aus den Formeln (42.) folgt dann endlich

$$D_1 = X_1 D, \quad D_2 = X_2 D, \quad D_3 = X_3 D.$$

Nun bleiben noch die 3 Coefficienten A, B, C zu bestimmen übrig, der Art dass $A^2+B^2+C^2=1$. Dieselben folgen aber aus den gegebenen Coordinaten des Centrums der lateinischen Verschwindungsebene

$$\begin{aligned} X_5 &= AA_1+BB_1+CC_1, \\ Y_5 &= AA_2+BB_2+CC_2, \\ Z_5 &= AA_3+BB_3+CC_3, \end{aligned}$$

welche Ausdrücke sich sehr leicht ergeben und vermittelst der Formeln (41.) auf die Gleichungen führen:

$$\begin{aligned} A^2X_2+B^2X_3+C^2X_4 &= X_5, \\ A^2Y_2+B^2Y_3+C^2Y_4 &= Y_5, \\ A^2Z_2+B^2Z_3+C^2Z_4 &= Z_5. \end{aligned}$$

Es folgt hieraus

$$A^2 : B^2 : C^2 = \begin{vmatrix} X_3 & X_4 & X_5 \\ Y_3 & Y_4 & Y_5 \\ Z_3 & Z_4 & Z_5 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} X_4 & X_2 & X_5 \\ Y_4 & Y_2 & Y_5 \\ Z_4 & Z_2 & Z_5 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} X_2 & X_3 & X_5 \\ Y_2 & Y_3 & Y_5 \\ Z_2 & Z_3 & Z_5 \end{vmatrix}.$$

Der von mir eingeschlagene Weg zur Behandlung der eindeutigen Raumcorrelation hat zugleich den eigenthümlichen Charakter, dass man ihn auch bei der allgemeinsten eindeutigen Correlation zwischen zwei Gebieten von n Dimensionen mit nur geringen Modificationen verfolgen kann.

Ich meine diejenige Correlation zwischen zwei Systemen von Variabeln

$$\begin{matrix} X_1 & X_2 & \ldots & X_n \\ \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_n, \end{matrix}$$

welche durch die Formeln:

$$X_1 = \frac{f_1}{f}, \quad X_2 = \frac{f_2}{f}, \quad \ldots \quad X_n = \frac{f_n}{f}$$

definirt wird, wobei $f\, f_1\, f_2 \ldots f_n$ lineare Ausdrücke der Variabeln $\xi_1\, \xi_2 \ldots \xi_n$ sind. Wenn man nur die Analoga von Punkt, Gerader, Ebene im Raum, sowie von Orthogonalität von Richtungen etc. für diese Gattung von Gebieten definirt hat, so führt die Untersuchung auf demselben Gange fortgeführt zu ganz analogen Resultaten, wie ich es bei anderer Gelegenheit mittheilen werde.

Königsberg, 29. October 1868.

Ueber einige allgemeine Eigenschaften der geometrischen Curven.

(Von Herrn *A. Olivier* in Schaffhausen.)

Den Betrachtungen in dieser Abhandlung liegt das folgende allgemeine von *Chasles* gegebene Theorem zu Grunde:

Fallen von einem Curvenbüschel der n^{ten} Ordnung die n^2 Basispunkte auf eine Curve $C_{(n+n')}$ der $(n+n')^{ten}$ Ordnung, so giebt es immer ein zu jenem Curvenbüschel der n^{ten} Ordnung projectivisches Curvenbüschel der n'^{ten} Ordnung, dessen Basispunkte ebenfalls auf die Curve $C_{(n+n')}$ fallen, und welches mit jenem durch den Durchschnitt der entsprechenden Elemente die Curve $C_{n+n'}$ erzeugt *).

Mittelst desselben werden wir eine Reihe allgemeiner Eigenschaften der Curven einer beliebigen Ordnung entwickeln, in welchen sehr viele, zum Theil bekannte Sätze über Kegelschnitte u. s. w. als besondere Fälle enthalten sind.

I.

Es seien K_1 und K_2 zwei Curven der n^{ten} Ordnung in einer Ebene, welche sich in den n^2 Punkten

$$b_1\ b_2\ \ldots\ b_{n^2}$$

schneiden und ein Curvenbüschel (K_1, K_2) der n^{ten} Ordnung bestimmen. In der Ebene dieses Curvenbüschels nehmen wir noch zwei weitere Curven S_3 und K_3 der n^{ten} Ordnung an, von denen S_3 durch die sämmtlichen Basispunkte

$$b_1\ b_2\ \ldots\ b_{n^2}$$

des Curvenbüschels (K_1, K_2) gehen, K_3 aber ganz beliebig liegen soll. Die beiden Curven S_3 und K_3 bilden zusammen einen zusammengesetzten Ort (S_3+K_3) der $2n^{ten}$ Ordnung; da nun die Basispunkte

$$b_1\ b_2\ \ldots\ b_{n^2}$$

des Curvenbüschels (K_1, K_2) auf diesem zusammengesetzten Ort (S_3+K_3) ver-

*) *Chasles*, Deux théorèmes généraux sur les courbes et les surfaces géométriques de tous les ordres. (Comptes rendus, 28 décembre 1857.)

theilt liegen, so muss es (nach dem obigen Theoreme) ein zu (K_1, K_2) projectivisches Curvenbüschel (S_1, S_2) der n^{ten} Ordnung geben, dessen Basispunkte ebenfalls auf den Ort (S_3+K_3) fallen müssen, und welches mit (K_1, K_2) durch den Durchschnitt der entsprechenden Elemente (S_1 und K_1; S_2 und K_2 etc.) jenen zusammengesetzten Ort (S_3+K_3) erzeugt. Die beiden Curven S_1 und S_2 lassen sich wie folgt bestimmen.

Die Curve K_1 des Büschels (K_1, K_2) schneidet die Curve K_3 in den n^2 Punkten

$$\alpha_1 \ \alpha_2 \ \ldots \ \alpha_{n^2},$$

und diese bestimmen mit dem willkürlich auf der Curve S_3 gewählten Punkt P die Curve S_1; ebenso schneidet K_2 die Curve K_3 in den Punkten

$$\beta_1 \ \beta_2 \ \ldots \ \beta_{n^2},$$

und diese bestimmen mit P die Curve S_2. Damit ist das zu (K_1, K_2) projectivische Curvenbüschel (S_1, S_2) der n^{ten} Ordnung festgestellt, *und die* (n^2-1) *übrigen Basispunkte desselben (ausser P) müssen ebenfalls auf die Curve* S_3 *fallen.* Aus dieser Betrachtung ergiebt sich folgender Satz:

Hat man in einer Ebene drei beliebige Curven K_1, K_2, K_3 *der* n^{ten} *Ordnung und legt durch einen willkürlichen Punkt P in dieser Ebene drei andere Curven* S_1, S_2, S_3, *ebenfalls von der* n^{ten} *Ordnung, durch die jedesmaligen Durchschnittspunkte von zwei der obigen Curven* (K_1 *und* K_2; K_1 *und* K_3; K_2 *und* K_3), *so treffen sich diese drei Curven* S_1, S_2, S_3 *(ausser im Punkte P) in noch weiteren* (n^2-1) *Punkten.*

Man hätte diesen Satz auch so aussprechen können:

Schneidet man zwei Curven K_1 *und* K_2 *der* n^{ten} *Ordnung durch eine Curve* K_3 *derselben Ordnung, so kann man durch die Durchschnittspunkte von* K_1 *mit* K_3 *eine beliebige Curve* S_1 *der* n^{ten} *Ordnung und durch die Durchschnittspunkte von* K_2 *mit* K_3 *eine beliebige Curve* S_2 *(ebenfalls von der* n^{ten} *Ordnung) legen; alsdann müssen immer die* n^2 *Schnittpunkte von* K_1 *und* K_2 *und die* n^2 *Schnittpunkte von* S_1 *und* S_2 *auf einer und derselben Curve* S_3 *der* n^{ten} *Ordnung liegen.*

Diese Sätze lassen sich leicht auf Kegelschnitte übertragen; wir wollen hier nur noch auf einige besondere Fälle aufmerksam machen:

Schneidet eine Gerade A (eigentlich zwei zusammenfallende Gerade) zwei Kegelschnitte K_1 *und* K_2 *in den Punktepaaren* (a_1a_2), (b_1b_2), *so werden zwei durch einen Punkt P gehende Kegelschnitte* S_1 *und* S_2, *von denen der erste* K_1 *in* a_1 *und* a_2 *und der zweite* K_2 *in* b_1 *und* b_2 *berührt, sich in noch drei weitern Punkten schneiden, die auf denjenigen Kegel-*

schnitt fallen müssen, der durch den Punkt P und die vier Schnittpunkte von K_1 und K_2 bestimmt wird.

Fällt die Gerade A mit einer der gemeinschaftlichen Tangenten beider Kegelschnitte zusammen, so folgt:

Die acht Kegelschnitte, welche in den Berührungspunkten a und α, b und β, c und γ, d und δ der gemeinschaftlichen Tangenten von K_1 und K_2 mit diesen eine vierpunktige Berührung besitzen und durch denselben Punkt P gehen, schneiden sich paarweise in noch drei Punkten desjenigen Kegelschnittes, der durch P und die vier Schnittpunkte von K_1 und K_2 bestimmt wird.

Bekanntlich liegen die acht Berührungspunkte (a, α), (b, β), (c, γ), (d, δ) der gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kegelschnitte K_1 und K_2 wieder auf einem Kegelschnitt; daher gilt folgender Satz:

Legt man durch die vier Berührungspunkte a, b, c, d auf K_1 und ebenso durch die vier Berührungspunkte α, β, γ, δ auf K_2 zwei Kegelschnitte, die sich in demselben Punkt P schneiden, so fallen ihre übrigen drei Schnittpunkte auf denjenigen Kegelschnitt, der durch P und die vier Schnittpunkte von K_1 und K_2 bestimmt wird.

etc. etc.

II.

Seien S_1 und S_2 zwei Elemente eines Curvenbüschels (S_1, S_2) der n^{ten} Ordnung und

$$a_1 a_2 \ldots a_p b_1 b_2 \ldots b_q$$

die $n^2 = p+q$ Basispunkte desselben. Ueber die Zahl q soll so verfügt werden, dass die q Punkte

$$b_1 b_2 \ldots b_q$$

zur Bestimmung einer Curve E_3 der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung gerade hinreichen, also:

$$q = \tfrac{1}{2}(n-1)(n+2) = \tfrac{1}{2}(\overline{n-1})(\overline{n-1}+3);$$

dann ist

$$p = \tfrac{1}{2}n(n-1)+1.$$

Legt man nun durch die p Punkte

$$a_1 a_2 \ldots a_p$$

eine beliebige weitere Curve S_3 der n^{ten} Ordnung, so bilden die beiden Curven S_3 und E_3 einen zusammengesetzten Ort (S_3+E_3) der $(2n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, auf welchem die Basispunkte des Curvenbüschels (S_1, S_2) vertheilt liegen; nach

dem in der Einleitung gegebenen Theorem muss es daher ein zum Curvenbüschel (S_1, S_2) der n^{ten} Ordnung projectivisches Curvenbüschel der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung geben, dessen Basispunkte ebenfalls auf dem zusammengesetzten Ort (S_3+E_3) vertheilt liegen, und welches mit dem ersten Büschel (S_1, S_2) durch den Durchschnitt der entsprechenden Elemente jenen Ort erzeugt. Bezeichnet man die den Curven S_1 und S_2 entsprechenden Curven im zweiten Büschel mit E_1 und E_2; also das Curvenbüschel selbst mit (E_1, E_2), so entsteht die Frage: Wie viele von den $(n-1)^2$ Basispunkten fallen auf S_3 und wie viele auf E_3? Aus der Zahl der Durchschnittspunkte von S_1 und S_2 mit S_3 und E_3 ergiebt sich nun sehr leicht, dass von der Basis

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_\lambda \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_\mu$$

des Curvenbüschels (E_1, E_2)

$$\lambda = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

Punkte auf S_3 und

$$\mu = \tfrac{1}{2} n(n-1)$$

Punkte auf E_3 fallen müssen.

Betrachtet man andererseits die beiden Curven S_1 und S_3 als die Elemente eines Curvenbüschels (S_1, S_3) der n^{ten} Ordnung, während die Curven (S_2+E_2) den zusammengesetzten Ort der $(2n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung darstellen, so wird jetzt (E_1, E_3) das zu (S_1, S_3) projectivische Zeugungsbüschel dieses Ortes, und von den $\lambda+\mu = (n-1)^2$ Basispunkten

$$\alpha'_1 \alpha'_2 \ldots \alpha'_\lambda \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_\mu$$

desselben fallen die Punkte

$$\alpha'_1 \alpha'_2 \ldots \alpha'_\lambda$$

auf die Curve S_2, während die Punkte

$$\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_\mu$$

wie oben die Schnittpunkte von E_1, E_2 und E_3 darstellen.

Entsprechend verhält sich die Sache, wenn man (S_2, S_3) und (E_2, E_3) als projectivische Zeugungsbüschel des Ortes (S_1+E_1) auffasst. Aus dieser Betrachtung entspringt folgender Satz:

Schneiden sich drei Curven

$$S_1, \quad S_2, \quad S_3$$

der n^{ten} Ordnung in denselben

$$p = \tfrac{1}{2} n(n-1)+1$$

Punkten

$$a_1 \; a_2 \; a_3 \; \ldots \; a_p,$$

so schneiden sie sich paarweise in noch weitern

$$q = \tfrac{1}{2}(n-1)(n+2) = \tfrac{1}{2}(\overline{n-1})(\overline{n-1}+3)$$

Punkten und bestimmen dadurch drei Curven

$$E_1, \quad E_2, \quad E_3$$

der $(n-1)^{ten}$ *Ordnung. Diese drei Curven*

$$E_1, \quad E_2, \quad E_3$$

gehen durch dieselben

$$\mu = \tfrac{1}{2}n(n-1)$$

Punkte

$$\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_\mu$$

der Ebene, während ihre übrigen

$$\lambda = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

Schnittpunkte paarweise genommen bezüglich auf die drei Curven

$$S_1, \quad S_2, \quad S_3$$

zu liegen kommen.

Für $n = 2$ ergiebt sich daraus der bekannte Lehrsatz:

Schneiden sich drei Kegelschnitte in denselben zwei Punkten der Ebene, so schneiden sie sich paarweise in noch weitern zwei Punkten; die durch diese Punktepaare bestimmten drei Geraden gehen durch denselben Punkt der Ebene.

Ebenso folgt für $n = 3$:

Schneiden sich drei Curven der dritten Ordnung in denselben vier Punkten, so schneiden sie sich paarweise in noch fünf Punkten; die dadurch bestimmten drei Kegelschnitte gehen durch dieselben drei Punkte der Ebene, während ihre vierten Schnittpunkte bezüglich auf die drei Curven der dritten Ordnung zu liegen kommen.

etc. etc.

III.

Wie in II. seien S_1 und S_2 wieder zwei Curven eines Curvenbüschels (S_1, S_2) der n^{ten} Ordnung, dessen $p+q=n^2$ Basispunkte

$$a_1 a_2 \ldots a_p b_1 b_2 \ldots b_q$$

diesmal so vertheilt werden sollen, dass durch die q Punkte

$$b_1 b_2 \ldots b_q$$

eine Curve E_3 der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung bestimmt wird; also

$$q = \tfrac{1}{2}(n-2)(n+1) = \tfrac{1}{2}(\overline{n-2})(\overline{n-2}+3),$$
$$p = \tfrac{1}{2}n(n+1)+1.$$

Indem man alsdann durch die p Punkte

$$a_1 a_2 \ldots a_p$$

wieder eine beliebige weitere Curve S_3 der n^{ten} Ordnung legt und die Untersuchung genau wie in II. durchführt, gelangt man zu dem entsprechenden Satze:

Schneiden sich drei Curven

$$S_1, \quad S_2, \quad S_3$$

der n^{ten} Ordnung in denselben

$$p = \tfrac{1}{2}n(n+1)+1$$

Punkten

$$a_1 a_2 \ldots a_p,$$

so schneiden sie sich paarweise in noch weitern

$$q = \tfrac{1}{2}(n-2)(n+1) = \tfrac{1}{2}(\overline{n-2})(\overline{n-2}+3)$$

Punkten und bestimmen dadurch drei Curven

$$E_1, \quad E_2, \quad E_3$$

der $(n-2)^{ten}$ Ordnung. Diese drei Curven

$$E_1, \quad E_2, \quad E_3$$

gehen durch dieselben

$$\mu = \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)$$

Punkte

$$\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_\mu$$

der Ebene; ihre übrigen

$$\lambda = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

Schnittpunkte (paarweise genommen) fallen bezüglich auf die drei Curven

$$S_1, \quad S_2, \quad S_3.$$

So folgt für $n = 3$:

Schneiden sich drei Curven der dritten Ordnung in denselben sieben Punkten der Ebene, so schneiden sie sich paarweise in noch zwei Punkten: die dadurch bestimmten drei Geraden bilden ein Dreiseit, dessen drei Eckpunkte bezüglich auf die drei Curven der dritten Ordnung zu liegen kommen.

Ebenso für $n = 4$:

Gehen drei Curven der vierten Ordnung durch dieselben elf Punkte der Ebene, so schneiden sie sich paarweise in noch fünf Punkten und

bestimmen drei Kegelschnitte. Diese drei Kegelschnitte treffen sich in einem und demselben Punkte der Ebene, während ihre drei übrigen Schnittpunkte bezüglich auf die drei Curven der vierten Ordnung fallen.

etc. etc.

Die vielen besondern Fälle, die in diesen allgemeinen Sätzen enthalten sind und dadurch hervorgehen, dass man von den Schnittpunkten der Curven einige oder alle zusammenfallen lässt, sollen hier übergangen werden; ebenso auch die Uebertragung dieser Sätze mittelst des Polaritätsgesetzes auf die Curven der entsprechenden Classe.

Schaffhausen, im Juni 1868.

Ueber die Differentialquotienten der Kugelfunctionen.

(Von Herrn *R. Most* in Stettin.)

Die ersten Differentialquotienten der Kugelfunctionen $\frac{dP^n(x)}{dx}$ und $\frac{dQ^n(x)}{dx}$ sind von den Herren *Christoffel**) und *Heine***) in Reihen nach Kugelfunctionen entwickelt worden; dass auch die höheren Differentialquotienten zu den Functionen gehören, welche auf einfache Reihenentwicklungen nach Kugelfunctionen führen, lässt sich folgendermassen übersehen. Setzt man:

$$(1.) \qquad [1-2\alpha x+\alpha^2]^{-\nu} = \sum_{n=0}^{n=\infty} C_\nu^n(x)\,\alpha^n,$$

wo ν eine beliebige Zahl sein kann, so erhält man durch Differentiiren nach x und α folgende Gleichungen:

$$(2.) \qquad \frac{d^p C_\nu^n(x)}{dx^p} = 2^p \nu(\nu+1)\ldots(\nu+p-1)\,C_{\nu+p}^{n-p}(x),$$

$$(3.) \quad \begin{cases} \frac{n+\nu}{\nu} C_\nu^n(x) = C_{\nu+1}^n(x) - C_{\nu+1}^{n-2}(x), \\ \frac{n+\nu}{\nu} x \frac{dC_\nu^n(x)}{dx} = n\,C_{\nu+1}^n(x) + (n+2\nu)\,C_{\nu+1}^{n-2}(x), \\ \frac{n+\nu}{\nu}(x^2-1)\frac{d^2C_\nu^n(x)}{dx^2} = n(n-1)\,C_{\nu+1}^n(x) - (n+2\nu+1)(n+2\nu)\,C_{\nu+1}^{n-2}(x). \end{cases}$$

Die Gleichungen (3.) enthalten den Grund dafür, dass alle Functionen y, welche der Gleichung:

$$(4.) \qquad \alpha(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2} + \beta x \frac{dy}{dx} + \gamma y = 0$$

Genüge thun, einfache Reihenentwicklungen nach Kugelfunctionen geben. Die Coefficienten der Reihe:

$$(5.) \qquad y = \sum_{p=q}^{p=r} A_p\,C_\nu^p(x)$$

werden nämlich mit Hülfe der Gleichungen (3.) durch folgende Bedingungen bestimmt:

---

*) De motu permanenti electricitatis in corporibus homogeneis, p. 53.

**) Handbuch der Kugelfunctionen, p. 54.

$$(6.)\quad \begin{cases} A_q C_\nu^{q-2}(x)[\alpha(q+2\nu+1)(q+2\nu)-\beta(q+2\nu)+\gamma] = 0, \\ A_{q+1} C_\nu^{q-1}(x)[\alpha(q+2\nu+2)(q+2\nu+1)-\beta(q+2\nu+1)+\gamma] = 0, \\ A_{p+2} = \dfrac{p+\nu+2}{p+\nu}\dfrac{\alpha p(p-1)+\beta p+\gamma}{\alpha(p+2\nu+3)(p+2\nu+2)-\beta(p+2\nu+2)+\gamma} A_p, \\ A_{r-1}[\alpha(r-1)(r-2)+\beta(r-1)+\gamma] = 0, \\ A_r[\alpha r(r-1)+\beta r+\gamma] = 0. \end{cases}$$

Den beiden ersten Gleichungen wird in den meisten Fällen durch $q=0$ Genüge gethan, da $C_\nu^{-2}(x)$ und $C_\nu^{-1}(x)$ der Null gleich sind; zuweilen aber ist q aus dem Verschwinden der Klammergrösse zu bestimmen.

Um die beiden ersten Coefficienten A_q und A_{q+1} zu gewinnen, folgere man aus der bei Ableitung der Gleichungen (3.) gewonnenen Beziehung:

$$(7.)\quad (x^2-1)\frac{d^2 C_\nu^n(x)}{dx^2}+(2\nu+1)x\frac{dC_\nu^n(x)}{dx}-n(2\nu+n)C_\nu^n(x) = 0$$

nach bekannten Methoden den Werth der Integrale

$$(8.)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} C_\nu^n(x) C_\nu^m(x)\,dx = 0, \\ \displaystyle\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}[C_\nu^n(x)]^2\,dx = \frac{2^{2\nu-1}}{\nu+n}\frac{\Pi(2\nu+n-1)}{\Pi(n)}\frac{\Pi^2(\nu-\frac{1}{2})}{\Pi^2(2\nu-1)}, \\ \qquad\qquad \text{oder} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{(\nu+n)\Pi(n)}\dfrac{\Pi(2\nu+n-1)}{\Pi(2\nu-1)}\dfrac{\Pi(\nu-\frac{1}{2})}{\Pi(\nu-1)}. \end{cases}$$

Dann ist:

$$A_q = \frac{\displaystyle\int_{-1}^{+1} y(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} C_\nu^q(x)\,dx}{\displaystyle\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}[C_\nu^q(x)]^2\,dx},$$

und A_{q+1} hat den entsprechenden Werth.

Da $\cos m\vartheta$ und $\sin m\vartheta$ für $x=\cos\vartheta$ der Differentialgleichung (4.) mit den Werthen $\alpha=\beta=1$, $\gamma=-m^2$ genügen, so erhält man nach den Gleichungen (6.) und (8.) für $\nu=\frac{1}{2}$ die Entwicklungen bei einem beliebigen m:

$$(9.)\quad \begin{cases} 2\cos m\vartheta = \dfrac{1+\cos m\pi}{1^2-m^2}\left[1+\dfrac{m^2}{m^2-3^2}5P^2(x)+\dfrac{m^2(m^2-2^2)}{(m^2-3^2)(m^2-5^2)}9P^4(x)+\cdots\right] \\ \qquad +\dfrac{1-\cos m\pi}{2^2-m^2}\left[3P^1(x)+\dfrac{m^2-1^2}{m^2-4^2}7P^3(x)+\dfrac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{(m^2-4^2)(m^2-6^2)}11P^5(x)+\cdots\right], \\ 2\sin m\vartheta = \dfrac{\sin m\pi}{1^2-m^2}\left[1+\dfrac{m^2}{m^2-3^2}5P^2(x)+\cdots\right] \\ \qquad -\dfrac{\sin m\pi}{2^2-m^2}\left[3P^1(x)+\dfrac{m^2-1^2}{m^2-4^2}7P^3(x)+\cdots\right]. \end{cases}$$

Ist m eine ganze Zahl, so wird die Entwicklung von $\sin m\vartheta$ bedeutungslos; alsdann giebt aber auch die erste Bedingungsgleichung aus (6.):

$$(q+1)^2-m^2 = 0$$

für q einen möglichen Werth, und man erhält:

$$\frac{4}{\pi}\frac{2.4\ldots 2m-2}{1.3\ldots 2m-3}\sin m\vartheta = (2m-1)P^{m-1}(x)+\frac{(m-1)^2-m^2}{(m+2)^2-m^2}(2m+3)P^{m+1}(x)$$
$$+\frac{[(m-1)^2-m^2][(m+1)^2-m^2]}{[(m+2)^2-m^2][(m+4)^2-m^2]}(2m+7)P^{m+3}(x)+\cdots,$$

eine Entwicklung, welche nach geringen Umformungen mit der von Herrn *Heine* *) gegebenen übereinstimmt.

Entsprechend erhält man:

$$(10.)\quad \begin{cases} 2e^{m\vartheta} = \dfrac{1+e^{m\pi}}{m^2+1^2}\left[1+\dfrac{m^2}{m^2+3^2}5P^2(x)+\dfrac{m^2(m^2+2^2)}{(m^2+3^2)(m^2+5^2)}9P^4(x)+\cdots\right] \\ \quad +\dfrac{1-e^{m\pi}}{m^2+2^2}\left[3P^1(x)+\dfrac{m^2+1^2}{m^2+4^2}7P^3(x)+\dfrac{(m^2+1^2)(m^2+3^2)}{(m^2+4^2)(m^2+6^2)}11P^5(x)+\cdots\right]. \end{cases}$$

Für $(1-x^2)^m$ wird $\alpha=1$, $\beta=-2(m-1)$ und $\gamma=-2m$, so dass

$$(11.)\quad \begin{cases} (1-x^2)^m = \dfrac{\Pi(\nu-1)}{\Pi(m+\nu)}\dfrac{\Pi(m+\nu-\frac{1}{2})}{\Pi(\nu-\frac{1}{2})}\left[\nu-(\nu+2)\dfrac{1.m}{(2\nu+1)(\nu+m+1)}C_\nu^2(x)\right. \\ \quad \left.+(\nu+4)\dfrac{1.3.m(m-1)}{(2\nu+1)(2\nu+3)(\nu+m+1)(\nu+m+2)}C_\nu^4(x)-\cdots\right] \end{cases}$$

wird; ist m eine ganze Zahl, so bricht die Reihe mit $C_\nu^{2m}(x)$ ab.

Für x^m ist $\alpha=0$, $\beta=1$ und $\gamma=-m$, daher wird, wenn m eine ganze Zahl ist,

$$(12.)\quad \begin{cases} x^m = \dfrac{\Pi(m)\Pi(\nu-1)}{2^m\Pi(m+\nu)}\left[(\nu+m)C_\nu^m(x)+\dfrac{\nu+m}{1}(\nu+m-2)C_\nu^{m-2}(x)\right. \\ \quad \left.+\dfrac{(\nu+m)(\nu+m-1)}{1.2}(\nu+m-4)C_\nu^{m-4}(x)\right]. \end{cases}$$

Ist m ein Bruch, so sind A_0 und A_1 nach der Vorschrift *Dirichlets* zu berechnen **), man erhält:

---

*) Handbuch der Kugelfunctionen, pag. 46.

**) Vergleiche *Bauer,* Entwicklung nach Kugelfunctionen, Bd. 56, pag. 113 dieses Journals.

$$(12^a.)\left\{\begin{aligned} & x^m = \\ & \tfrac{1}{4}\frac{\Pi\left(\frac{m-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\frac{\Pi(\nu-1)}{\Pi\left(\frac{m}{2}+\nu\right)}\Big[\nu+\frac{m}{m+2\nu+2}(\nu+2)C_\nu^2(x) \\ & \qquad +\frac{m(m-2)}{(m+2\nu+2)(m+2\nu+4)}(\nu+4)C_\nu^4(x)+\cdots\Big] \\ & +\tfrac{1}{4}\frac{\Pi\left(\frac{m}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\frac{\Pi(\nu-1)}{\Pi\left(\frac{m}{2}+\nu+\frac{1}{2}\right)}\Big[(\nu+1)C_\nu^1(x)+\frac{m-1}{m+2\nu+3}(\nu+3)C_\nu^3(x) \\ & \qquad +\frac{(m-1)(m-3)}{(m+2\nu+3)(m+2\nu+5)}(\nu+5)C_\nu^5(x)+\cdots\Big]. \end{aligned}\right.$$

Aus der Gleichung (11.) lässt sich nun zunächst der Werth des Integrals:

$$(13.)\left\{\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}C_\mu^n(x)\,dx \\ & = (-1)^{\frac{1}{2}n}\frac{\sqrt{\pi}}{\Pi(\frac{1}{2}n)}\frac{\Pi(\nu-\mu)}{\Pi(\nu-\mu-\frac{1}{2}n)}\frac{\Pi(\nu-\frac{1}{2})}{\Pi(\nu+\frac{1}{2}n)}\frac{\Pi(\mu+\frac{1}{2}n-1)}{\Pi(\mu-1)}, \end{aligned}\right.$$

wo n eine gerade Zahl ist, folgern; bezeichnet n eine ungerade Zahl, so wird das Integral der Null gleich, weil $C_\mu^n(-x)=(-1)^n C_\mu^n(x)$ ist. Mit Hülfe der Gleichungen (6.) und (13.) erhält man dann die Reihenentwicklung:

$$(14.)\left\{\begin{aligned} & C_\mu^n(x) = \\ & \frac{\Pi(\mu+n-1)}{\Pi(\mu-1)}\frac{\Pi(\nu-1)}{\Pi(n+\nu)}\Big[(n+\nu)C_\nu^n(x)-(n+\nu-2)\frac{(\nu-\mu)(n+\nu)}{1.(n+\mu-1)}C_\nu^{n-2}(x) \\ & \quad +(n+\nu-4)\frac{(\nu-\mu)(\nu-\mu-1)(n+\nu)(n+\nu-1)}{1.2(n+\mu-1)(n+\mu-2)}C_\nu^{n-4}(x)-\cdots\Big]. \end{aligned}\right.$$

Diese Reihe hat zunächst, ihrer Ableitung nach, nur Gültigkeit, wenn $\nu>\mu$ ist, doch überzeugt man sich von ihrer Allgemeingültigkeit, wenn man sich $C_\mu^n(x)$ in Potenzen nach x entwickelt und diese Potenzen nach (12.) durch Functionen $C_\nu^p(x)$ ausgedrückt denkt; da dieser Ausdruck für ein beliebiges ν gilt, so müssen die zu $C_\nu^p(x)$ gehörigen Coefficienten auch allgemeine Geltung haben. — Durch die Gleichungen (14.) und (8.) bestimmt man das Integral:

$$(15.)\left\{\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}C_\nu^n(x)C_\mu^p(x)\,dx = \\ & (-1)^{\frac{p-n}{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{\Pi(n)\Pi\left(\frac{p-n}{2}\right)}\frac{\Pi(\nu-\mu)}{\Pi\left(\nu-\mu-\frac{p-n}{2}\right)}\frac{\Pi(2\nu+n-1)}{\Pi(2\nu-1)}\frac{\Pi(\nu-\frac{1}{2})}{\Pi\left(\nu+\frac{p+n}{2}\right)}\frac{\Pi\left(\mu+\frac{p+n}{2}-1\right)}{\Pi(\mu-1)}, \end{aligned}\right.$$

wenn $\nu>\mu$ ist; im entgegengesetzten Falle geht die rechte Seite der Gleichung (15.) über in:

$$(15^a.)\quad +\frac{\sqrt{\pi}}{\Pi(n)\,\Pi\left(\frac{p-n}{2}\right)}\,\frac{\Pi\left(\mu-\nu+\frac{p-n}{2}-1\right)}{\Pi(\mu-\nu-1)}\,\frac{\Pi(2\nu+n-1)}{\Pi(2\nu-1)}\,\frac{\Pi(\nu-\frac{1}{2})}{\Pi\left(\nu+\frac{p+n}{2}\right)}\,\frac{\Pi\left(\mu+\frac{p+n}{2}-1\right)}{\Pi(\mu-1)};$$

beide Ausdrücke gelten nur, wenn p grösser als n und gleichgradig mit n ist; sind diese Bedingungen nicht erfüllt, so wird das Integral der Null gleich.

Mit Hülfe des Integrals (15.) gewinnt man die Reihenentwicklung:

$$(16.)\quad \begin{cases} (1-x^2)^{\mu}\,C_{\nu}^{n}(x) \\ = \frac{1}{2^{2\mu}}\,\frac{\Pi(2\nu+n-1)}{\Pi(\nu+n)\Pi(\nu-1)}\,\frac{\Pi(\nu-\mu-1)\,\Pi(\nu-\mu+n-1)}{\Pi(2\nu-2\mu+n-1)}\Big[(\nu-\mu+n)\,C_{\nu-\mu}^{n}(x) \\ -(\nu-\mu+n+2)\,\frac{\mu(n+1)(n+2)(\nu-\mu+n)}{1.(2\nu-2\mu+n)(2\nu-2\mu+n+1)(\nu+n+1)}\,C_{\nu-\mu}^{n+2}(x) \\ +(\nu-\mu+n+4)\,\frac{\mu(\mu-1)(n+1)\ldots(n+4)(\nu-\mu+n)(\nu-\mu+n+1)}{1.2(2\nu-2\mu+n)\ldots(2\nu-2\mu+n+3)(\nu+n+1)(\nu+n+2)}\,C_{\nu-\mu}^{n+4}(x)+\cdots\Big], \end{cases}$$

welche als eine Erweiterung der dritten Gleichung unter (3.) angesehen werden kann. — Indem der Raum hier nicht gestattet, alle Anwendungen der Gleichung (4.) aufzuführen, gehen wir zu den Differentialquotienten der Kugelfunctionen über; zunächst ist klar, dass die aus der ersten der Gleichungen (3.) abzuleitende Beziehung:

$$(17.)\quad \nu C_{\nu+1}^{n}(x)=(n+\nu)\,C_{\nu}^{n}(x)+(n+\nu-2)\,C_{\nu}^{n-2}(x)+(n+\nu-4)\,C_{\nu}^{n-4}(x)+\cdots$$

für $\nu=\frac{1}{2}$ den für $\frac{dP^n(x)}{dx}$ von Herrn *Christoffel* *) gegebenen Ausdruck darstellt; im Allgemeinen aber erhält man aus Gleichung (14.), wenn $\nu-\mu$ eine ganze positive Zahl darstellt und $\mu=\frac{1}{2}$ gesetzt wird, die Gleichung:

$$(18.)\quad \begin{cases} P^n(x) \\ = \frac{1}{2^m}\,\frac{\Pi(n-\frac{1}{2})}{\Pi(n+m+\frac{1}{2})}\Big[(n+m+\tfrac{1}{2})\,\frac{d^m P^{n+m}(x)}{dx^m}-\frac{m(n+m+\frac{1}{2})}{1.(n-\frac{1}{2})}\,(n+m-\tfrac{3}{2})\,\frac{d^m P^{n+m-2}}{dx^m} \\ +\frac{m(m-1)(n+m+\frac{1}{2})(n+m-\frac{1}{2})}{1.2(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})}\,(n+m-\tfrac{7}{2})\,\frac{d^m P^{n+m-4}(x)}{dx^m}-\cdots\Big], \end{cases}$$

und im entgegengesetzten Falle, wenn $\mu-\nu$ eine ganze Zahl darstellt und $\nu=\frac{1}{2}$ gesetzt wird, ergiebt sich aus (14.):

$$(18^a.)\quad \begin{cases} \frac{d^m P^n(x)}{dx^m}=\frac{2^m\,\Pi(n-\frac{1}{2})}{\Pi(n-m+\frac{1}{2})}\Big[(n-m+\tfrac{1}{2})P^{n-m}(x)+\frac{m(n-m+\frac{1}{2})}{1(n-\frac{1}{2})}\,(n-m-\tfrac{3}{2})\,P^{n-m-2}(x) \\ +\frac{m(m+1)(n-m+\frac{1}{2})(n-m-\frac{1}{2})}{1.2(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})}\,(n-m-\tfrac{7}{2})\,P^{n-m-4}(x)+\cdots\Big]. \end{cases}$$

---

*) a. a. O. pag. 53.

Mit Hülfe der Gleichung $\frac{1}{y-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} (2n+1) P^n(x) Q^n(y)$ leitet man dann die entsprechende Gleichung für die Kugelfunctionen zweiter Art ab:

$$(19.)\quad \frac{d^m Q^n(x)}{dx^m} = (-2)^m \frac{\Pi(n+m-\frac{1}{2})}{\Pi(n+\frac{1}{2})}\Big[(n+m+\tfrac{1}{2})\,Q^{n+m}(x) + \frac{m(n+m+\frac{1}{2})}{1.(n+\frac{3}{2})}(n+m+\tfrac{5}{2})\,Q^{n+m+2}(x) + \frac{m(m+1)(n+m+\frac{1}{2})(n+m+\frac{3}{2})}{1.2.(n+\frac{3}{2})(n+\frac{5}{2})}(n+m+\tfrac{9}{2})\,Q^{n+m+4}(x) + \cdots\Big].$$

Stettin, 1868.

Ueber eine algebraische Aufgabe, welche einer Gattung geometrischer Probleme zu Grunde liegt.

(Von den Herren *Rosanes* und *Pasch* in Breslau.)

Die in diesem Journal Bd. 64. S. 126 ff. behandelte geometrische Aufgabe*) — und überhaupt eine Klasse von solchen — tritt, rein algebraisch aufgefasst, in folgender Form auf. Zwischen zwei Grössen t_0, t_1 besteht eine symmetrische und in Bezug auf beide quadratische Gleichung

$$f(t_0, t_1) = at_0^2t_1^2+2bt_0t_1(t_0+t_1)+c(t_0+t_1)^2+2dt_0t_1+2e(t_0+t_1)+f=0.$$

Der Werth von t_1 bestimmt durch die Gleichung $f(t_1, t_2)=0$ zwei Werthe von t_2, von denen wir den von t_0 verschiedenen wählen und durch Einsetzen desselben in die Gleichung $f(t_2, t_3)=0$ den von t_1 verschiedenen Werth von t_3 berechnen, u. s. f. In der so entstehenden Folge von Zahlen t_0, t_1, t_2, ... ist irgend eine, t_n, mit t_0 durch eine Gleichung von der Form

$$f_{n-1}(t_0,t_n)=a_{n-1}t_0^2t_n^2+2b_{n-1}t_0t_n(t_0+t_n)+c_{n-1}(t_0+t_n)^2+2d_{n-1}t_0t_n+2e_{n-1}(t_0+t_n)+f_{n-1}=0$$

verbunden, wo a_{n-1}, b_{n-1}, ... ganze homogene Functionen von a, b, ... vom Grade n^2 sind. Die Forderung ist, dass für ein gegebenes n, welches >2, $t_n=t_0$ sei, zugleich aber auch $t_{n+1}=t_1$, wodurch allgemein $t_h=t_{h+n}=t_{h-n}$ bedingt wird, d. h. die Werthe t_0, ..., t_n sollen eine Reihe bilden, welche sich *von jedem aus nach beiden Seiten* schliesst.

I. Zunächst wird es sich darum handeln, die Form der Function $f_{n-1}(t_0, t_n)$ näher festzustellen. Bei Einführung der Grössen

$$\lambda_n = 4\begin{vmatrix} a_n & b_n & d_n \\ b_n & c_n & e_n \\ d_n & e_n & f_n \end{vmatrix},$$

$$4A_n=\frac{\partial\lambda_n}{\partial a_n},\ 8B_n=\frac{\partial\lambda_n}{\partial b_n},\ 4C_n=\frac{\partial\lambda_n}{\partial c_n},\ 8D_n=\frac{\partial\lambda_n}{\partial d_n},\ 8E_n=\frac{\partial\lambda_n}{\partial e_n},\ 4F_n=\frac{\partial\lambda_n}{\partial f_n}$$

ergiebt sich die Discriminante von $f_n(t_0, t_{n+1})$

$$\Delta_n(t_0) = A_n-2B_nt_0+(C_n+2D_n)t_0^2-2E_nt_0^3+F_nt_0^4.$$

*) Zu dem dort gegebenen Literatur-Nachweise ist jetzt hinzuzufügen: *M. Simon*, De relationibus inter constantes duarum linearum secundi ordinis, ut sit polygonum alteri inscriptum, circumscriptum alteri, Inauguraldissertation, Berlin 1867. In dieser Abhandlung, welche mit Zugrundlegung der Normalform der elliptischen Functionen des Herrn *Weierstrass* die nothwendigen Bedingungsgleichungen in den Invarianten der zwei Kegelschnitte entwickelt, ist die vorliegende Aufgabe pag. 10—12 gleichfalls berührt.

Ihre Bedeutung beweist, dass dieselbe für alle Wurzeln der Gleichung $\Delta(t_0) = 0$ verschwindet und somit das Product von $\Delta(t_0)$ und dem Quadrate einer ganzen Function P_n von $a, b, \ldots$ ist. Durch Benutzung dieses Umstandes liefern die Relationen $\lambda_n a_n = 4(C_n F_n - E_n^2)$, $\lambda_n b_n = 4(D_n E_n - B_n F_n)$ etc. mit Zuziehung von $\lambda a = 4(CF - E^2)$, $\lambda b = 4(DE - BF)$ etc. folgende Formen der Coefficienten $a_n, b_n, \ldots$

$$(1.)\begin{cases} a_n = aR_{n+1} - 4FS_{n+1},\ b_n = bR_{n+1} + 2ES_{n+1},\ c_n = cR_{n+1} - 4DS_{n+1} - \lambda\dfrac{S_{n+1}^2}{R_{n+1}}, \\ f_n = fR_{n+1} - 4AS_{n+1},\ e_n = eR_{n+1} + 2BS_{n+1},\ d_n = dR_{n+1} + (4D - 2C)S_{n+1} + 2\lambda\dfrac{S_{n+1}^2}{R_{n+1}}, \end{cases}$$

in welchen $R_{n+1} = \dfrac{\lambda P_n^4}{\lambda_n}$, $S_{n+1} = \dfrac{P_n^2(CP_n^2 - C_n)}{\lambda_n}$ ganze Functionen sind, weil $aA - fF$ und $bB - eE$ keinen gemeinsamen Factor besitzen; ebenso $\lambda\dfrac{S_{n+1}^2}{R_{n+1}}$.

Um das Bildungsgesetz dieser Functionen zu ermitteln, setzen wir

$$\begin{aligned} f_{n+1}(t_0, t_n) &= t_n^2\varphi_{n-1}(t_0) + 2t_n\psi_{n-1}(t_0) + \chi_{n-1}(t_0), \\ f(t_n, t_{n+1}) &= t_n^2\varphi(t_{n+1}) + 2t_n\psi(t_{n+1}) + \chi(t_{n+1}) \end{aligned}$$

und erhalten durch Elimination von t_n:

$$(2.)\begin{aligned} f_{n-2}(t_0, t_{n+1}) f_n(t_0, t_{n+1}) &= \{\varphi(t_{n+1})\chi_{n-1}(t_0) - \varphi_{n-1}(t_0)\chi(t_{n+1})\}^2 \\ &\quad + 4\{\varphi(t_{n+1})\psi_{n-1}(t_0) - \varphi_{n-1}(t_0)\psi(t_{n+1})\}\{\chi(t_{n+1})\psi_{n-1}(t_0) - \chi_{n-1}(t_0)\psi(t_{n+1})\}. \end{aligned}$$

Die hieraus durch Vergleichung der höchsten Potenzen sich ergebende Gleichung

$$a_n a_{n-2} = (ac_{n-1} - a_{n-1}c)^2 - 4(ab_{n-1} - a_{n-1}b)(bc_{n-1} - b_{n-1}c)$$

geht durch Einführung der Werthe von a_n, a_{n-1}, a_{n-2} ... nach (1.) in

$$\begin{aligned} &a^2R_{n+1}R_{n-1} - 4aF(R_{n+1}S_{n-1} + R_{n-1}S_{n+1}) + 16F^2S_{n+1}S_{n-1} \\ &= S_n^2\left\{8(aE + 2bF)\left(2cE + 4bD + b\lambda\frac{S_n}{R_n}\right) + \left(4cF - 4aD - a\lambda\frac{S_n}{R_n}\right)^2\right\} \\ &= S_n^2\left\{a^2\lambda^2\frac{S_n^2}{R_n^2} - 8\lambda\frac{S_n}{R_n}(aF\delta + 2F^2) - 4F(a\lambda - 4F\sigma)\right\} \end{aligned}$$

über, da, wenn der Kürze wegen $\delta = d - c$, $\sigma = \delta^2 - 4D + C$ *) gesetzt wird,

$$b(aE + 2bF) - a(cF - aD) = a(aD + bE + dF) - F(ad + ac - 2b^2) = -aF\delta - 2F^2,$$

$$\begin{aligned} &(aE + 2bF)(cE + 2bD) + (cF - aD)^2 = F(2bcE + c^2F + 2acD - 4DF) + acE^2 + 2abDE + a^2D^2 \\ &= 2cF(aD + bE + dF) + F^2(\delta^2 - d^2 - 4D) + E^2F + (aD + bE)^2 = F^2\sigma - \tfrac{1}{4}aF\lambda \end{aligned}$$

ist. Man hat somit:

$$(3.)\quad a^2\xi_n + 4aF\eta_n + 16F^2\zeta_n = 0, \quad \text{wo}$$

$$\xi_n = R_{n+1}R_{n-1} - \left(\frac{\lambda S_n^2}{R_n}\right)^2,\quad \eta_n = -(S_{n+1}R_{n-1} + S_{n-1}R_{n+1}) + \lambda S_n^2\left(2\delta\frac{S_n}{R_n} + 1\right),$$

$$\zeta_n = S_{n+1}S_{n-1} - S_n^2\left(\sigma - \lambda\frac{S_n}{R_n}\right).$$

---

*) δ, σ, λ sind die einfachsten Invarianten der bi-binären Form $u_0^2u_1^2 f\left(\dfrac{t_0}{u_0}, \dfrac{t_1}{u_1}\right)$.

Ebenso gilt, da ξ_n, η_n, ζ_n durch gleichzeitige Vertauschung von a und f, b und e sich nicht ändern, die Gleichung

$$(4.) \qquad f^2\xi_n + 4fA\eta_n + 16A^2\zeta_n = 0.$$

Zu diesen beiden Gleichungen (3.) und (4.) tritt die bemerkenswerthe Identität

$$(5.) \qquad S_{n-1}^2\left(\xi_n\frac{S_{n-1}^2}{R_{n-1}^2} + \eta_n\frac{S_{n-1}}{R_{n-1}} + \zeta_n\right) - S_n^2\left(\xi_{n-1}\frac{S_n^2}{R_n^2} + \eta_{n-1}\frac{S_n}{R_n} + \zeta_{n-1}\right) = 0$$

hinzu, und wir haben somit zwischen ξ_n, η_n, ζ_n drei Gleichungen, welche beweisen, dass diese drei Ausdrücke für jedes n identisch verschwinden. In der That ist dazu ausreichend, dass für irgend ein n einer der Ausdrücke zu Null wird, da die Determinante der drei Gleichungen, $= a_{n-2}f_{n-2}(aA - fF)$, nicht identisch verschwinden kann; und für $n = 1$ geht aus (2.), indem man $f_{-1}(t_0, t_2) = -(t_0 - t_2)^2$ nimmt, hervor, dass $a_1 = a\lambda - 4F\sigma$, $f_1 = f\lambda - 4A\sigma$, mithin $R_1 = 1$, $S_1 = 0$, $R_2 = \lambda$, $S_2 = \sigma$, folglich $\zeta_2 = 0$ ist.

Die beiden Folgen von Grössen R_n, S_n werden nunmehr auf eine reducirt, wenn man q_n durch die Gleichungen

$$S_n = q_{n-1}q_n^2q_{n+1}, \quad q_1 = q_2 = 1$$

einführt und $\xi_n = 0$, $\xi_{n+1} = 0$ somit in

$$R_{n+1}R_n^2R_{n-1} = \lambda^2 q_{n+1}^4 q_n^8 q_{n-1}^4, \quad R_{n+2}R_{n+1}^2R_n = \lambda^2 q_{n+2}^4 q_{n+1}^8 q_n^4$$

umgestaltet, woraus durch Division

$$\frac{R_n}{q_n^4}\cdot\frac{R_{n-1}}{q_{n-1}^4} = \frac{R_{n+1}}{q_{n+1}^4}\cdot\frac{R_{n+2}}{q_{n+2}^4}$$

folgt. Da $R_1 = q_1^4$, $R_2 = \lambda q_2^4$, $R_3R_2^2R_1 = \lambda^2 q_3^4 q_2^8 q_1^4$, also $R_3 = q_3^4$ ist, so wird allgemein

$$R_{2n} = \lambda q_{2n}^4, \qquad R_{2n+1} = q_{2n+1}^4,$$

so dass sich q_n als ganze Function erweist. Schliesslich erhält man also:

n gerade: $f_{n-1}(t_0, t_n) = \lambda q_n^4 f(t_0, t_n) - 4q_n^2 q_{n-1}q_{n+1}\varphi(t_0, t_n) - q_{n-1}^2 q_{n+1}^2 (t_0 - t_n)^2$,

n ungerade: $f_{n-1}(t_0, t_n) = q_n^4 f(t_0, t_n) - 4q_n^2 q_{n-1}q_{n+1}\varphi(t_0, t_n) - \lambda q_{n-1}^2 q_{n+1}^2 (t_0 - t_n)^2$,

wo $\varphi(t_0, t_n) = Ft_0^2t_n^2 - Et_0t_n(t_0 + t_n) + D(t_0 + t_n)^2 - (2D - C)t_0t_n - B(t_0 + t_n) + A$,

also $\varphi(t_0, t_0) = \Delta(t_0)$ *).

II. Bei der vorgelegten Aufgabe ist es nothwendig, dass t_h für jedes h, an Stelle von t_{h+n} gesetzt, die Gleichungen

$$f_{n-1}(t_h, t_{h+n}) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f_{n-1}(t_h, t_{h+n})}{\partial t_{h+n}} = 0$$

erfüllt und mithin mindestens doppelte Wurzel der Gleichung $f_{n-1}(t_h, t_h) = 0$

---

*) Hieraus ist leicht zu sehen, wie $f(t_0, t_1)$ aus $f_{n-1}(t_0, t_n)$ gefunden wird. Bildet man $\varphi_{n-1}(t_0, t_n)$ aus f_{n-1}, wie φ aus f, so ergiebt sich

$$R_n f(t_0, t_1) = f_{n-1}(t_0, t_1) + 4\alpha\varphi_{n-1}(t_0, t_1) - \lambda_{n-1}\alpha^2(t_0 - t_1)^2,$$

wo α von einer Gleichung des Grades n^2 abhängt.

ist, d. h., wegen $n > 2$, dass $f_{n-1}(t_h, t_h)$ *identisch verschwindet.* Die Reihe $t_0, t_1, t_2, \ldots$ schliesst sich also entweder gar nicht oder für jeden Werth von t_0.

Die gewünschte Bedingung ergiebt sich demnach aus dem den Coefficienten der Function $f_{n-1}(t_0, t_0)$ gemeinschaftlichen Factor*) in der Form

$$q_n = 0$$

in Uebereinstimmung damit, dass die geometrischen und analytischen Untersuchungen über hierher gehörige Aufgaben immer zu einer *einzigen, vom Anfangswerthe unabhängigen* Bedingung geführt haben. Das Bildungsgesetz der Function q_n wird auf Grund der Gleichungen $\eta_n = \zeta_n = 0$ durch die Formeln

n gerade:	n ungerade:
$q_{n-2}q_{n+2} + q_{n-1}q_{n+1} = \sigma q_n^2,$	$q_{n-2}q_{n+2} + \lambda q_{n-1}q_{n+1} = \sigma q_n^2,$
$q_{n-2}q_{n+1}^2 + q_{n+2}q_{n-1}^2 = q_n(\lambda q_n^2 + 2\delta q_{n-1}q_{n+1}),$	$q_{n-2}q_{n+1}^2 + q_{n+2}q_{n-1}^2 = q_n(q_n^2 + 2\delta q_{n-1}q_{n+1}),$

$$q_0 = 0, \quad q_1 = q_2 = 1, \quad q_3 = \sigma$$

auf zwei Arten ausgedrückt, deren Gleichwerthigkeit wegen der Uebereinstimmung der Anfangswerthe durch die identische Relation (5.) dargethan ist. Im Besonderen hat man:

$$q_4 = \lambda + 2\delta\sigma = \begin{vmatrix} a & 2b & c \\ 2b & 2(c+d) & 2e \\ c & 2e & f \end{vmatrix}, \quad q_5 = \sigma^3 - \lambda q_4 = \sigma^3 - \lambda^2 - 2\delta\lambda\sigma.$$

Die erhaltenen Formeln lassen erkennen, dass q_n eine ganze Function der drei Invarianten λ, σ, δ ist, welche für $\lambda = \sigma = 0$ verschwindet. In a, b, c, ... ist die Dimension $= \frac{1}{4}n^2 - 1$ oder $\frac{1}{4}(n^2-1)$, jenachdem n gerade oder ungerade ist. Es zeigt sich ferner, der geometrischen Bedeutung entsprechend, dass, wenn gleichzeitig $q_m = q_n = 0$ und m, n auf einander folgende oder überhaupt relativ prime Zahlen sind, auch λ und σ, sowie sämmtliche q verschwinden. Durch die Substitution

$$s_n = \frac{q_{n-1}q_{n+1}}{q_n^2}$$

ergiebt sich:

$$s_n^2 s_{n-1}s_{n+1} + s_n = \sigma, \quad s_n^2(s_{n-1} + s_{n+1}) = 2\delta s_n + \lambda, \quad \text{wenn } n \text{ gerade,}$$
$$s_n^2 s_{n-1}s_{n+1} + \lambda s_n = \sigma, \quad s_n^2(s_{n-1} + s_{n+1}) = 2\delta s_n + 1, \quad \text{wenn } n \text{ ungerade,}$$

---

*) Die nach Ausscheidung dieses Factors verbleibenden Bedingungen führen entweder dazu, dass $f(t_0, t_1)$ ein vollständiges Quadrat und zwar für ungerade n gleich $(t_0 - t_1)^2$, oder dass $\lambda = \sigma = 0$ sein, d. h. $f(t_0, t_1)$ einen Factor $(t_0 - \alpha)(t_1 - \alpha)$ enthalten und die folgenden Functionen f identisch verschwinden müssen.

und durch Elimination von s_{n+1} entweder:

(6.) $s_n^2 s_{n-1}^2 - 2\delta s_n s_{n-1} - s_n - \lambda s_{n-1} + \sigma = 0$ oder $s_n^2 s_{n-1}^2 - 2\delta s_n s_{n-1} - \lambda s_n - s_{n-1} + \sigma = 0$,

Gleichungen, welche nur zwei Indices enthalten.

III. Um jetzt die Bedingung für ein n-Eck zu erhalten, welches einem Kegelschnitt $A = 0$ einbeschrieben und einem andern $B = 0$ umschrieben ist, hat man das Resultat der Elimination von ψ aus den Gleichungen (12.) in der Eingangs erwähnten Abhandlung in algebraischer Form darzustellen und erhält dann, indem man unter $\delta_0\alpha^3 + \delta_1\alpha^2 + \delta_2\alpha + \delta_3$ die Discriminante der Function $B - \alpha A$ versteht:

$$\lambda = 16\delta_0\delta_3^2, \quad \sigma = \delta_2^2 - 4\delta_1\delta_3, \quad \delta = \delta_2,$$

$$q_3 = \delta_2^2 - 4\delta_1\delta_3, \quad q_4 = 2\{8\delta_0\delta_3^2 + \delta_2(\delta_2^2 - 4\delta_1\delta_3)\}, \quad q_5 = q_3^3 - 16\delta_0\delta_3^2 q_4 \text{ etc.},$$

so dass q_n in den Coefficienten der Kegelschnitte vom Grade $3(\frac{1}{4}n^2 - 1)$ oder $\frac{3}{4}(n^2 - 1)$ ist, jenachdem n gerade oder ungerade ist. (Vgl. §. 9 d. a. Abhdl.) — Die für denselben Fall in *Salmons* Geometrie d. Kegelschn., übers. v. *Fiedler*, Art. 375 angegebenen Gleichungen zwischen w_3, w_4 und w_4, w_5 stimmen mit (6.) überein.

Ihre allgemeinere Anwendung finden die obigen Resultate bei jeder Curve, *deren Coordinaten sich durch eine Grösse rational ausdrücken lassen*, wenn auf ihr zu jedem Punkte P_0 zwei Punkte P_1 so bestimmt werden, dass P_0 auch dem Punkte P_1 entspricht. Ist diese Curve ein Kegelschnitt, so kann man nachweisen, dass die Gerade P_0P_1 wieder einen Kegelschnitt umhüllt, (welcher sich auf zwei Punkte reducirt, wenn die zwischen P_0 und P_1 gegebene Relation zerlegbar, nur auf einen, wenn sie ein vollständiges Quadrat ist), und kommt also auf keine allgemeinere, als die eben besprochene Aufgabe. Ebenso schliesst man: die Gerade P_0P_h hüllt einen Kegelschnitt ein; desgleichen die Verbindungslinie der Punkte, in welchen P_0P_h und P_hP_{2h} diesen berühren; der Durchschnittspunkt der Tangenten des ersten Kegelschnittes in P_0 und P_h durchläuft einen neuen, u. s. w. — Schliesst sich also die Reihe $P_0, P_1, \ldots, P_n$ und ist n gerade, so gehen alle Geraden $P_hP_{h+\frac{1}{2}n}$ durch einen Punkt, und zwar hat dieser in Bezug auf den ersten Kegelschnitt und den von P_0P_1 eingehüllten dieselbe Polare; denn $P_{\frac{1}{2}n}$ ist Schnittpunkt, wenn P_0 es ist (§. 8. extr. d. a. Abhdl.).

In Kürze mag hier noch die Entwickelung der mit $q_n = 0$ aequivalenten Bedingung Platz finden, welche sich bekanntlich durch Einführung von elliptischen Functionen herstellen lässt. Dieselbe wird zeigen, wie auch das analytische Verfahren bei genauer Durchführung, in Uebereinstimmung mit der oben gegebenen Fassung der Aufgabe, die *beiden* Gleichungen $t_n = t_0$, $t_{n+1} = t_1$ als Forderungen voraussetzt und dann im Allgemeinen nur *eine* Bedingung ergiebt.

Schliessen wir nämlich aus, dass $\Delta(t)$ ein volles Quadrat ist, und dass es für einen der Werthe $t_0, t_1, \ldots, t_n$ verschwindet, so können wir wegen der Relation

$$4(at_0^2+2bt_0+c)f(t_0,t_1) = \left(\frac{\partial f(t_0,t_1)}{\partial t_1}\right)^2+4\Delta(t_0)$$

unter μ eine einfache Wurzel der Gleichung $f(t_0, t_0) = 0$ verstehen und, da dann $dt_0 = -dt_1$ für $t_0 = t_1 = \mu$, zwischen t_0 und t_1 die Differentialgleichung

$$\frac{dt_0}{\sqrt{\Delta(t_0)}} - \frac{dt_1}{\sqrt{\Delta(t_1)}} = 0$$

mit der Massgabe aufstellen, dass $\sqrt{\Delta(t_0)}$ und $\sqrt{\Delta(t_1)}$ für $t_0 = t_1 = \mu$ zwei entgegengesetzte Werthe, ω und $-\omega$, annehmen. Wir bezeichnen ferner (die Zahlen durch Punkte der Ebene repräsentirt) mit w einen Weg, der von μ bis in die Nähe einer einfachen Wurzel ν der Gleichung $\Delta(\nu) = 0$, auf einem Kreise um diesen herum und auf der ersten Strecke nach μ zurückführt; mit w_0 einen Weg von μ nach t_0, mit w_h die Abbildung des Weges $w + w_{h-1}$ durch die Gleichung $f(t_{h-1}, t_h) = 0$, μ als Anfangswerth genommen; endlich mit J und J_h die Integrale von $dt(\Delta(t))^{-\frac{1}{2}}$, ersteres längs w mit dem Anfangswerthe ω, letzteres längs w_h mit dem Anfangswerthe $-\omega$ von $\sqrt{\Delta(t)}$. Dann ist $J + J_h - J_{h+1} = 0$, folglich $nJ + J_0 - J_n = 0$. Die Abbildung des von t_0 nach t_n führenden Weges $-w_0 + w_n$ oder $-(w + w_0) + (w + w_n)$ ist aber der Weg $-w_1 + w_{n+1}$, welcher von t_1 nach t_{n+1} führt. Ist also $t_n = t_0$ und $t_{n+1} = t_1$, so sind die Werthe von $\sqrt{\Delta(t)}$ an den oberen Grenzen der Integrale J_0 und J_n gleich und mithin

$$nJ = \text{einer Periode von } \int \frac{dt}{\sqrt{\Delta(t)}}.$$

Das Stattfinden einer solchen Gleichung gestattet auch umgekehrt den Schluss, dass beide Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind.

Breslau, im October 1868.

Note zu dem Aufsatze „über eine Eigenschaft von Functionaldeterminanten“ Bd. 69, p. 355. dieses Journals.

(Von Herrn *A. Clebsch* in Göttingen.)

In dem erwähnten Aufsatze habe ich folgenden Satz bewiesen:

Es seien $f_1, f_2, \ldots f_{n+1}$ $n+1$ *homogene ganze Functionen* r^{ter} *Ordnung von* n *Variabeln,* $x_1, x_2, \ldots x_n$; *ferner* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n+1}$ *die aus ihnen gebildeten Functionaldeterminanten, und* $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{n+1}$ *wiederum die aus den* φ *gebildeten Functionaldeterminanten. Dann unterscheiden sich die* ψ *von den* f *nur um einen gemeinschaftlichen Factor* M, *so dass man die Gleichungen hat:*

$$\psi_1 = M.f_1, \quad \psi_2 = M.f_2, \quad \ldots \quad \psi_{n+1} = M.f_{n+1}.$$

Eine Methode den Factor M zu finden besass ich zur Zeit der Abfassung jenes Aufsatzes noch nicht; ich verdanke seitdem eine solche der Mittheilung des Herrn Professor *Gordan* in Giessen und erlaube mir dieselbe hier mit einigen Modificationen zu reproduciren. Da in den ψ keine höheren Differentialquotienten der f vorkommen als die zweiten, so genügt es, die Bildung von M unter der Voraussetzung zu geben, dass alle f von der zweiten Ordnung seien; und man erhält aus diesem Resultate sofort das allgemeine, wenn man darin statt der Coefficienten der Functionen zweiter Ordnung die zweiten Differentialquotienten der f setzt, dividirt durch $r.r-1$. Bezeichnen wir also symbolisch die Functionen f, welche jetzt von der zweiten Ordnung sein sollen, durch

$$f_1 = a_x'^2, \quad f_2 = a_x''^2, \quad \ldots \quad f_{n+1} = a_x^{(n+1)^2},$$

wo Ausdrücke wie a_x die Bedeutung $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots$ haben. Die Functionaldeterminanten φ (dividirt durch passend gewählte Zahlen) erhalten wir als die Coefficienten der α in der Determinante:

$$D = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \cdots + \alpha_{n+1}\varphi_{n+1}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \ldots & \frac{1}{2}\frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_1} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{1}{2}\frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \ldots & \frac{1}{2}\frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_n} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n+1} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante verschwindet, wenn wir darin die α durch die f oder durch ihre nach einem der x genommenen Differentialquotienten ersetzen, oder endlich, wenn wir statt der f_k die Grössen

$$\tfrac{1}{2}\sum_i \frac{\partial f_k}{\partial x_i} y_i = a_x^{(k)} a_y^{(k)}$$

setzen, in welchen die y ganz beliebig sind. Es bestehen also identisch für die x wie für die y die Gleichungen:

$$(1.)\quad \begin{cases} 0 = \varphi_1 . a_x'^2 + \varphi_2 . a_x''^2 + \cdots + \varphi_{n+1} . a_x^{(n+1)^2}, \\ 0 = \varphi_1 . a_x' a_y' + \varphi_2 . a_x'' a_y'' + \cdots + \varphi_{n+1} . a_x^{(n+1)} a_y^{(n+1)}. \end{cases}$$

Die Functionen φ_k sind jetzt von der n^{ten} Ordnung; setzen wir daher symbolisch:

$$\varphi_1 = l_x'^n, \quad \varphi_2 = l_x''^n, \quad \ldots \quad \varphi_{n+1} = l_x^{(n+1)^n}.$$

Hierdurch verwandeln sich die Gleichungen (1.) in:

$$(2.)\quad \begin{cases} 0 = l_x'^n . a_x'^2 + l_x''^n . a_x''^2 + \cdots + l_x^{(n+1)^n} . a_x^{(n+1)^2}, \\ 0 = l_x'^n . a_x' a_y' + l_x''^n . a_x'' a_y'' + \cdots + l_x^{(n+1)^n} . a_x^{(n+1)} a_y^{(n+1)}; \end{cases}$$

zu denen, wenn man die erste nach den x differentiirt, mit den y multiplicirt und auf die Summe die zweite Gleichung anwendet, noch die folgende tritt:

$$(3.)\quad 0 = l_x'^{n-1} l_y' . a_x'^2 + l_x''^{n-1} l_y'' . a_x''^2 + \cdots + l_x^{(n+1)^{n-1}} l_y^{(n+1)} . a_x^{(n+1)^2}.$$

Aus den Gleichungen (2.) und (3.) ergeben sich aber noch weitere Gleichungen, welche benutzt werden sollen. Differentiirt man die zweite Gleichnng (2.) nach den x und multiplicirt mit neuen Grössen z, so lässt sich dem Resultate die Form geben:

$$\sum_{k=1}^{k=n+1} l_x^{(k)^n} . a_y^{(k)} a_z^{(k)} = -n \sum_{k=1}^{k=n+1} l_x^{(k)^{n-1}} l_z^{(k)} . a_x^{(k)} a_y^{(k)}.$$

Da hier die linke Seite durch Vertauschung der y mit den z ungeändert bleibt, so muss auf der rechten dasselbe stattfinden, und man muss also haben (die Summe immer für k von 1 bis $n+1$ ausgedehnt):

$$\sum_k l_x^{(k)^{n-1}} l_z^{(k)} . a_x^{(k)} a_y^{(k)} = \sum_k l_x^{(k)^{n-1}} l_y^{(k)} . a_x^{(k)} a_z^{(k)},$$

oder, indem man die Coefficienten vergleicht und zu den wirklichen Ausdrücken zurückkehrt:

$$(4.)\quad \sum_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_h} = \sum_k \frac{\partial f_k}{\partial x_h} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}.$$

Differentiirt man aber die zweite Gleichung (2.) und die Gleichung (3.)

nach den x und multiplicirt wieder mit den y, so erhält man die Gleichungen:

$$(5.)\quad \begin{cases} 0 = n.\sum_k l_x^{(k)n-1} l_y^{(k)} . a_x^{(k)} a_y^{(k)} + \sum_k l_x^{(k)n} . a_y^{(k)2} \\ 0 = (n-1)\sum_k l_x^{(k)n-2} l_y^{(k)2} . a_x^{(k)2} + 2\sum_k l_x^{(k)n-1} l_y^{(k)} . a_x^{(k)} a_y^{(k)}, \end{cases}$$

so dass wir eine Function Ω von der zweiten Ordnung in den y bilden können, welche die Formen annimmt:

$$(6.)\quad \begin{cases} \Omega = \sum_k \{ a_x^{(k)} l_y^{(k)} - l_x^{(k)} a_y^{(k)} \}^2 l_x^{(k)n-2} \\ = \frac{n+1}{n-1} \sum_k l_x^{(k)n} . a_y^{(k)2} = -\frac{n.n+1}{n-1} \sum_k l_x^{(k)n-1} l_y^{(k)} . a_x^{(k)} a_y^{(k)} \\ = \frac{n.n+1}{2} \sum_k l_x^{(k)n-2} l_y^{(k)2} . a_x^{(k)2}. \end{cases}$$

Die erste dieser Formen ist die wichtigste. Sie lehrt, dass Ω die y nur in den Verbindungen $x_i y_h - x_h y_i$ enthält und eine homogene Function zweiter Ordnung dieser Grössen ist. Insofern Ω eine Function der y ist, werde sie symbolisch durch

$$(7.)\qquad \Omega = c_y^2 = c_y'^2 = \cdots$$

bezeichnet; sofern sie aber eine Function der Verbindungen $x_i y_h - x_h y_i$ ist, sei sie symbolisch

$$(8.)\qquad \Omega = (p_x q_y - q_x p_y)^2.$$

Der Uebergang von diesen Symbolen zu wirklichen Grössen geschieht mit Hülfe der Formeln

$$(9.)\quad \begin{cases} c_i c_h = (p_x q_i - q_x p_i)(p_x q_h - q_x p_h) = \sum_k (a_x^{(k)} l_i^{(k)} - l_x^{(k)} a_i^{(k)})(a_x^{(k)} l_h^{(k)} - l_x^{(k)} a_h^{(k)}) l_x^{(k)n-2} \\ \quad = \frac{1}{n.n-1} \sum_k f_k \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_i \partial x_h} - \frac{1}{2n} \sum_k \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_h} + \frac{\partial f_k}{\partial x_h} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \right) + \tfrac{1}{2} \sum_k \varphi_k \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_h}, \\ p_{i'} p_{h'} q_i q_h = \sum_k a_{i'}^{(k)} l_i^{(k)} a_{h'}^{(k)} l_h^{(k)} l_x^{(k)n-2} = \frac{1}{2n.n-1} \sum_k \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_{i'} \partial x_{h'}} \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_i \partial x_h}. \end{cases}$$

Aus der Definition der c folgt noch, dass für jeden Werth von i

$$(10.)\qquad c_i c_x = 0,$$

und dass $c_x^2 = 0$.

Sowie die φ aus D, werden die ψ aus den Coefficienten der β in der folgenden Determinante definirt:

In Kürze mag hier noch die Entwickelung der mit $q_n = 0$ aequivalenten Bedingung Platz finden, welche sich bekanntlich durch Einführung von elliptischen Functionen herstellen lässt. Dieselbe wird zeigen, wie auch das analytische Verfahren bei genauer Durchführung, in Uebereinstimmung mit der oben gegebenen Fassung der Aufgabe, die *beiden* Gleichungen $t_n = t_0$, $t_{n+1} = t_1$ als Forderungen voraussetzt und dann im Allgemeinen nur *eine* Bedingung ergiebt.

Schliessen wir nämlich aus, dass $\Delta(t)$ ein volles Quadrat ist, und dass es für einen der Werthe $t_0, t_1, \ldots, t_n$ verschwindet, so können wir wegen der Relation

$$4(at_0^2+2bt_0+c)f(t_0,t_1) = \left(\frac{\partial f(t_0,t_1)}{\partial t_1}\right)^2 + 4\Delta(t_0)$$

unter μ eine einfache Wurzel der Gleichung $f(t_0, t_0) = 0$ verstehen und, da dann $dt_0 = -dt_1$ für $t_0 = t_1 = \mu$, zwischen t_0 und t_1 die Differentialgleichung

$$\frac{dt_0}{\sqrt{\Delta(t_0)}} - \frac{dt_1}{\sqrt{\Delta(t_1)}} = 0$$

mit der Massgabe aufstellen, dass $\sqrt{\Delta(t_0)}$ und $\sqrt{\Delta(t_1)}$ für $t_0 = t_1 = \mu$ zwei entgegengesetzte Werthe, ω und $-\omega$, annehmen. Wir bezeichnen ferner (die Zahlen durch Punkte der Ebene repräsentirt) mit w einen Weg, der von μ bis in die Nähe einer einfachen Wurzel ν der Gleichung $\Delta(\nu) = 0$, auf einem Kreise um diesen herum und auf der ersten Strecke nach μ zurückführt; mit w_0 einen Weg von μ nach t_0, mit w_h die Abbildung des Weges $w + w_{h-1}$ durch die Gleichung $f(t_{h-1}, t_h) = 0$, μ als Anfangswerth genommen; endlich mit J und J_h die Integrale von $dt(\Delta(t))^{-\frac{1}{2}}$, ersteres längs w mit dem Anfangswerthe ω, letzteres längs w_h mit dem Anfangswerthe $-\omega$ von $\sqrt{\Delta(t)}$. Dann ist $J + J_h - J_{h+1} = 0$, folglich $nJ + J_0 - J_n = 0$. Die Abbildung des von t_0 nach t_n führenden Weges $-w_0 + w_n$ oder $-(w + w_0) + (w + w_n)$ ist aber der Weg $-w_1 + w_{n+1}$, welcher von t_1 nach t_{n+1} führt. Ist also $t_n = t_0$ und $t_{n+1} = t_1$, so sind die Werthe von $\sqrt{\Delta(t)}$ an den oberen Grenzen der Integrale J_0 und J_n gleich und mithin

$$nJ = \text{einer Periode von } \int \frac{dt}{\sqrt{\Delta(t)}}.$$

Das Stattfinden einer solchen Gleichung gestattet auch umgekehrt den Schluss, dass beide Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind.

Breslau, im October 1868.

Note zu dem Aufsatze „über eine Eigenschaft von Functionaldeterminanten“ Bd. 69, p. 355. dieses Journals.

(Von Herrn *A. Clebsch* in Göttingen.)

In dem erwähnten Aufsatze habe ich folgenden Satz bewiesen:

Es seien $f_1, f_2, \ldots f_{n+1}$ $n+1$ *homogene ganze Functionen* r^{ter} *Ordnung von* n *Variabeln,* $x_1, x_2, \ldots x_n$; *ferner* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n+1}$ *die aus ihnen gebildeten Functionaldeterminanten, und* $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{n+1}$ *wiederum die aus den* φ *gebildeten Functionaldeterminanten. Dann unterscheiden sich die* ψ *von den* f *nur um einen gemeinschaftlichen Factor* M, *so dass man die Gleichungen hat:*

$$\psi_1 = M.f_1, \quad \psi_2 = M.f_2, \quad \ldots \quad \psi_{n+1} = M.f_{n+1}.$$

Eine Methode den Factor M zu finden besass ich zur Zeit der Abfassung jenes Aufsatzes noch nicht; ich verdanke seitdem eine solche der Mittheilung des Herrn Professor *Gordan* in Giessen und erlaube mir dieselbe hier mit einigen Modificationen zu reproduciren. Da in den ψ keine höheren Differentialquotienten der f vorkommen als die zweiten, so genügt es, die Bildung von M unter der Voraussetzung zu geben, dass alle f von der zweiten Ordnung seien; und man erhält aus diesem Resultate sofort das allgemeine, wenn man darin statt der Coefficienten der Functionen zweiter Ordnung die zweiten Differentialquotienten der f setzt, dividirt durch $r.r-1$. Bezeichnen wir also symbolisch die Functionen f, welche jetzt von der zweiten Ordnung sein sollen, durch

$$f_1 = a_x'^2, \quad f_2 = a_x''^2, \quad \ldots \quad f_{n+1} = a_x^{(n+1)^2},$$

wo Ausdrücke wie a_x die Bedeutung $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots$ haben. Die Functionaldeterminanten φ (dividirt durch passend gewählte Zahlen) erhalten wir als die Coefficienten der α in der Determinante:

$$D = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \cdots + \alpha_{n+1}\varphi_{n+1}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \ldots & \frac{1}{2}\frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_1} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{1}{2}\frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{2}\frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{1}{2}\frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \ldots & \frac{1}{2}\frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_n} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n+1} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante verschwindet, wenn wir darin die α durch die f oder durch ihre nach einem der x genommenen Differentialquotienten ersetzen, oder endlich, wenn wir statt der f_k die Grössen

$$\tfrac{1}{2}\sum_i \frac{\partial f_k}{\partial x_i} y_i = a_x^{(k)} a_y^{(k)}$$

setzen, in welchen die y ganz beliebig sind. Es bestehen also identisch für die x wie für die y die Gleichungen:

$$(1.)\quad \begin{cases} 0 = \varphi_1 . a_x'^2 + \varphi_2 . a_x''^2 + \cdots + \varphi_{n+1} . a_x^{(n+1)^2}, \\ 0 = \varphi_1 . a_x' a_y' + \varphi_2 . a_x'' a_y'' + \cdots + \varphi_{n+1} . a_x^{(n+1)} a_y^{(n+1)}. \end{cases}$$

Die Functionen φ_k sind jetzt von der n^{ten} Ordnung; setzen wir daher symbolisch:

$$\varphi_1 = l_x'^n, \quad \varphi_2 = l_x''^n, \quad \ldots \quad \varphi_{n+1} = l_x^{(n+1)^n}.$$

Hierdurch verwandeln sich die Gleichungen (1.) in:

$$(2.)\quad \begin{cases} 0 = l_x'^n . a_x'^2 + l_x''^n . a_x''^2 + \cdots + l_x^{(n+1)^n} . a_x^{(n+1)^2}, \\ 0 = l_x'^n . a_x' a_y' + l_x''^n . a_x'' a_y'' + \cdots + l_x^{(n+1)^n} . a_x^{(n+1)} a_y^{(n+1)}; \end{cases}$$

zu denen, wenn man die erste nach den x differentiirt, mit den y multiplicirt und auf die Summe die zweite Gleichung anwendet, noch die folgende tritt:

$$(3.)\quad 0 = l_x'^{n-1} l_y' . a_x'^2 + l_x''^{n-1} l_y'' . a_x''^2 + \cdots + l_x^{(n+1)^{n-1}} l_y^{(n+1)} . a_x^{(n+1)^2}.$$

Aus den Gleichungen (2.) und (3.) ergeben sich aber noch weitere Gleichungen, welche benutzt werden sollen. Differentiirt man die zweite Gleichnng (2.) nach den x und multiplicirt mit neuen Grössen z, so lässt sich dem Resultate die Form geben:

$$\sum_{k=1}^{k=n+1} l_x^{(k)^n} . a_y^{(k)} a_z^{(k)} = -n \sum_{k=1}^{k=n+1} l_x^{(k)^{n-1}} l_z^{(k)} . a_x^{(k)} a_y^{(k)}.$$

Da hier die linke Seite durch Vertauschung der y mit den z ungeändert bleibt, so muss auf der rechten dasselbe stattfinden, und man muss also haben (die Summe immer für k von 1 bis $n+1$ ausgedehnt):

$$\sum_k l_x^{(k)^{n-1}} l_z^{(k)} . a_x^{(k)} a_y^{(k)} = \sum_k l_x^{(k)^{n-1}} l_y^{(k)} . a_x^{(k)} a_z^{(k)},$$

oder, indem man die Coefficienten vergleicht und zu den wirklichen Ausdrücken zurückkehrt:

$$(4.)\quad \sum_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_h} = \sum_k \frac{\partial f_k}{\partial x_h} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}.$$

Differentiirt man aber die zweite Gleichung (2.) und die Gleichung (3.)

nach den x und multiplicirt wieder mit den y, so erhält man die Gleichungen:

$$(5.)\quad \begin{cases} 0 = n.\sum_k l_x^{(k)n-1} l_y^{(k)}.a_x^{(k)}a_y^{(k)} + \sum_k l_x^{(k)n}.a_y^{(k)2} \\ 0 = (n-1)\sum_k l_x^{(k)n-2} l_y^{(k)2}.a_x^{(k)2} + 2\sum_k l_x^{(k)n-1} l_y^{(k)}.a_x^{(k)}a_y^{(k)}, \end{cases}$$

so dass wir eine Function Ω von der zweiten Ordnung in den y bilden können, welche die Formen annimmt:

$$(6.)\quad \begin{cases} \Omega = \sum_k \{a_x^{(k)} l_y^{(k)} - l_x^{(k)} a_y^{(k)}\}^2 l_x^{(k)n-2} \\ = \frac{n+1}{n-1}\sum_k l_x^{(k)n}.a_y^{(k)2} = -\frac{n.n+1}{n-1}\sum_k l_x^{(k)n-1} l_y^{(k)}.a_x^{(k)}a_y^{(k)} \\ = \frac{n.n+1}{2}\sum_k l_x^{(k)n-2} l_y^{(k)2}.a_x^{(k)2}. \end{cases}$$

Die erste dieser Formen ist die wichtigste. Sie lehrt, dass Ω die y nur in den Verbindungen $x_i y_h - x_h y_i$ enthält und eine homogene Function zweiter Ordnung dieser Grössen ist. Insofern Ω eine Function der y ist, werde sie symbolisch durch

$$(7.)\qquad \Omega = c_y^2 = c_y'^2 = \cdots$$

bezeichnet; sofern sie aber eine Function der Verbindungen $x_i y_h - x_h y_i$ ist, sei sie symbolisch

$$(8.)\qquad \Omega = (p_x q_y - q_x p_y)^2.$$

Der Uebergang von diesen Symbolen zu wirklichen Grössen geschieht mit Hülfe der Formeln

$$(9.)\quad \begin{cases} c_i c_h = (p_x q_i - q_x p_i)(p_x q_h - q_x p_h) = \sum_k (a_x^{(k)} l_i^{(k)} - l_x^{(k)} a_i^{(k)})(a_x^{(k)} l_h^{(k)} - l_x^{(k)} a_h^{(k)})\, l_x^{(k)n-2} \\ \quad = \frac{1}{n.n-1}\sum_k f_k \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_i \partial x_h} - \frac{1}{2n}\sum_k \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_h} + \frac{\partial f_k}{\partial x_h}\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\right) + \tfrac{1}{2}\sum_k \varphi_k \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_h}, \\ p_{i'} p_{h'} q_i q_h = \sum_k a_{i'}^{(k)} l_i^{(k)} a_{h'}^{(k)} l_h^{(k)} l_x^{(k)n-2} = \frac{1}{2n.n-1}\sum_k \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_{i'} \partial x_{h'}}\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x_i \partial x_h}. \end{cases}$$

Aus der Definition der c folgt noch, dass für jeden Werth von i

$$(10.)\qquad c_i c_x = 0,$$

und dass $c_x^2 = 0$.

Sowie die φ aus D, werden die ψ aus den Coefficienten der β in der folgenden Determinante definirt:

$$\Delta = \beta_1\psi_1+\beta_2\psi_2+\cdots+\beta_{n+1}\psi_{n+1}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{n}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{1}{n}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{1}{n}\frac{\partial\varphi_{n+1}}{\partial x_1} \\ \frac{1}{n}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \frac{1}{n}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{1}{n}\frac{\partial\varphi_{n+1}}{\partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} & \frac{1}{n}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{1}{n}\frac{\partial\varphi_{n+1}}{\partial x_n} \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{n+1} \end{vmatrix}.$$

Multipliciren wir nun die Determinanten D und Δ, so entsteht aus dem Product eine ähnliche Determinante, deren Elemente folgender Art sind:

1. $\frac{1}{2n}\sum_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_h}$, was nach (4.) durch Vertauschung von i und h sich nicht ändert, und also nach der dritten Form von Ω (6.) gleich $-\frac{n-1}{2n(n+1)}\frac{\partial^2\Omega}{\partial y_i\partial y_h}$ ist.

2. $\frac{1}{n}\sum_k \alpha_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}$. Wegen der Willkürlichkeit der α kann man diese Elemente gleich beliebigen Grössen u_i setzen, und findet dann auch noch

$$\Sigma\alpha_k\varphi_k = u_x.$$

3. $\frac{1}{n}\sum_k \beta_k\frac{\partial f_k}{\partial x_i}$. Wegen der Willkürlichkeit der β kann man diese Grössen ebenfalls den u gleich setzen, und erhält dann noch

$$\sum_k \beta_k\psi_k = M\sum_k \beta_k f_k = M.u_x.$$

4. $\sum_k \alpha_k\beta_k$. In der resultirenden Determinante ist dieses Element mit der Determinante der Grössen $\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_i\partial x_h}$, also mit der Discriminante von Ω multiplicirt. Aber diese verschwindet identisch, da die Differentialquotienten von Ω nach den y für $y=x$ sämmtlich verschwinden. Das erwähnte Element kann man also durch Null ersetzen.

So kann man nunmehr der aus der Multiplication von D und Δ entspringenden Determinante die Form geben:

$$(11.)\quad M.u_x^2 = \left(-\frac{n-1}{n.n+1}\right)^{n-1}\cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial y_1^2} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial y_1\partial y_2} & \cdots & \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial y_1\partial y_n} & u_1 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial y_1\partial y_2} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial y_2^2} & \cdots & \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial y_2\partial y_n} & u_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial y_1\partial y_n} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial y_2\partial y_n} & \cdots & \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial y_n^2} & u_n \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_n & 0 \end{vmatrix}.$$

Die Aufgabe M zu finden kommt also jetzt auf die Aufgabe zurück, aus der rechten Seite dieses Ausdrucks den Factor u_x^2 zu entfernen. Dies geschieht folgendermassen. Es ist bekannt, dass die Determinante auf der rechten Seite der Gleichung (11.) (entsprechend der Darstellung eines Kegelschnitts in Liniencoordinaten) durch den symbolischen Ausdruck $-(cc'\dots c^{(n-2)}u)^2$ dargestellt wird, wo

$$(c\,c'\dots c^{(n-2)}\,u)$$

die Determinante $\Sigma \pm c_1 c_2' \dots c_{n-1}^{(n-2)} u_n$ bedeutet. Setzen wir nun an Stelle von $c_i^{(n-2)} c_h^{(n-2)}$ das nach (9.) diesem Product äquivalente Symbol

$$c_i^{(n-2)} c_h^{(n-2)} = (p_x q_i - q_x p_i)(p_x q_h - q_x p_h),$$

so wird der symbolische Ausdruck jener Determinante:

$$-\big((cc'\dots c^{(n-3)}\,q\,u)\,p_x - (cc'\dots c^{(n-3)}\,p\,u)\,q_x\big)^2.$$

Aber die Wurzel des Quadrats geht nach einer bekannten Identität in

$$(cc'\dots c^{(n-3)}\,qp)\,u_x + (pc'\dots c^{(n-3)}\,qu)\,c_x + (cp\dots c^{(n-3)}\,qu)\,c_x' \dots$$

über, oder, weil nach (10.) alles in c_x, c_x' etc. Multiplicirte ausgelassen werden darf, in

$$(cc'\dots c^{(n-3)}\,qp)\,u_x,$$

so dass die Gleichung (11.) durch u_x^2 theilbar wird, und die folgende Gleichung zur Bestimmung von M übrig bleibt:

$$M = (-1)^n \cdot \Big(\frac{n-1}{n+1.k}\Big)^{n-1} \cdot (cc'\dots c^{(n-3)}\,pq)^2.$$

Indem man nur die Symbole p, q zurückbehält, kann man dies wieder als Determinante schreiben:

$$(12.)\quad M = (-1)^n \cdot \Big(\frac{n-1}{n+1.n}\Big)^{n-1} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial y_1^2} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial y_1 \partial y_2} & \dots & \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial y_1 \partial y_n} & p_1 & q_1 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial y_1 \partial y_2} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial y_2^2} & \dots & \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial y_2 \partial y_n} & p_2 & q_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial y_1 \partial y_n} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial y_2 \partial y_n} & \dots & \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial y_n^2} & p_n & q_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & 0 & 0 \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Die Determinante rechts entsteht, wie man sofort sieht, aus

$$\Omega = (p_x q_y - q_x p_y)^2,$$

wenn man darin die Producte

$$(x_i y_h - x_h y_i)(x_{i'} y_{h'} - x_{h'} y_{i'})$$

durch die zweiten Unterdeterminanten der Determinante von Ω ersetzt. Und so ergiebt sich zur Bildung von M folgende allgemeine Regel:

Man bilde die in den y quadratische Function

$$\Omega = \frac{1}{n.n-1}\sum_k\Big(f_k\sum_i\sum_h\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x_i\partial x_h}y_iy_h\Big)-\frac{1}{n}\sum_k\Big(\sum_i\frac{\partial f_k}{\partial x_i}y_i\sum_h\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_h}y_h\Big)+\tfrac{1}{2}\sum_k\Big(\varphi_k\sum_i\sum_h\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i\partial x_k}y_iy_k\Big)$$

$$= \frac{1}{2n.n-1}\sum_k\sum_{ihi'h'}(x_iy_i-y_ix_i)(x_{h'}y_h-y_{h'}x_h)\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_{i'}\partial x_{h'}}\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x_i\partial x_h},$$

bilde ferner die zweiten Unterdeterminanten $V_{i'h',ih}$ der Determinante von Ω, dann ist

$$M = (-1)^n\Big(\frac{n-1}{n+1.n}\Big)^{n-1}\cdot\frac{1}{2n.n-1}\sum_k\sum_{ihi'h'}V_{i'h',ih}\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_{i'}\partial x_{h'}}\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x_i\partial x_h}. \quad -$$

Für $n=2$ zerfällt Ω nach (6.) oder (8.) in zwei Factoren

$$\Omega=(p_1q_2-p_2q_1)^2(x_1y_2-x_2y_1)^2=(x_1y_2-x_2y_1)^2\sum_k(a_1^{(k)}l_2^{(k)}-a_2^{(k)}l_1^{(k)})^2,$$

und daher erhält man aus (11.):

$$M = \tfrac{1}{6}(p_1q_2-p_2q_1)^2 = \tfrac{1}{6}\sum_k(a_1^{(k)}l_2^{(k)}-a_2^{(k)}l_1^{(k)})^2.$$

Ist nun

$$f_1 = a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2,$$
$$f_2 = b_{11}x_1^2+2b_{12}x_1x_2+b_{22}x_2^2,$$
$$f_3 = c_{11}x_1^2+2c_{12}x_1x_2+c_{22}x_2^2,$$

so entsteht das erste Glied der Summe rechts aus

$$\varphi_1=\begin{vmatrix} b_{11}x_1+b_{12}x_2 & c_{11}x_1+c_{12}x_2\\ b_{21}x_1+b_{22}x_2 & c_{12}x_1+c_{22}x_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_{11} & c_{11} & x_2^2\\ b_{12} & c_{12}-x_1x_2 & \\ b_{22} & c_{22} & x_1^2\end{vmatrix},$$

wenn man darin x_1^2, x_1x_2, x_2^2 durch a_{22}, $-a_{12}$, a_{11} ersetzt, und dieses Glied der Summe wird also gleich der Determinante

$$r=\begin{vmatrix} a_{11} & b_{11} & c_{11}\\ a_{12} & b_{12} & c_{12}\\ a_{22} & b_{22} & c_{22}\end{vmatrix};$$

und indem die andern Glieder der Summe diesem gleich werden, hat man

$$M = \tfrac{1}{2}r. \quad -$$

Für $n=3$ sei der Kürze wegen:

$$x_2y_3-x_3y_2=u_1,\quad x_3y_1-x_1y_3=u_2,\quad x_1y_2-x_2y_1=u_3;$$

dann ist

$$\Omega = \sum_k \begin{vmatrix} a_1^{(k)} & a_2^{(k)} & a_3^{(k)} \\ l_1^{(k)} & l_2^{(k)} & l_3^{(k)} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}^2 \begin{vmatrix} l_x^{(k)} = \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}^2,$$

und indem man Ω einmal als Function der y, das andre Mal als Function der u betrachtet, wird

$$M = -\frac{1}{4.36} \sum_i \sum_h \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_i \partial y_h} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_i \partial u_h}.$$

Drückt man nun die Differentialquotienten von Ω nach den y durch die nach den u genommenen aus, so ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_1^2} &= \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_2^2} x_3^2 - 2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_2 \partial u_3} x_2 x_3 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_3^2} x_2^2, \\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_2^2} &= \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_3^2} x_1^2 - 2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_3 \partial u_1} x_3 x_1 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_1^2} x_3^2, \\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_3^2} &= \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_1^2} x_2^2 - 2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_1 \partial u_2} x_1 x_2 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_2^2} x_1^2, \\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_2 \partial y_3} &= \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_2 \partial u_3} x_1^2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_1 \partial u_3} x_1 x_2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_2 \partial u_3} x_1 x_3 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_1^2} x_2 x_3, \\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_3 \partial y_1} &= \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_3 \partial u_1} x_2^2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_2 \partial u_1} x_2 x_3 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_3 \partial u_1} x_3 x_1 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_2^2} x_3 x_1, \\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y_1 \partial y_2} &= \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_1 \partial u_2} x_3^2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_3 \partial u_2} x_3 x_1 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_1 \partial u_2} x_1 x_2 + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_3^2} x_1 x_2,
\end{aligned}$$

und daher

$$M = \tfrac{1}{3\,6} \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_1^2} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_1 \partial u_2} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_1 \partial u_3} & x_1 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_1 \partial u_2} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_2^2} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_2 \partial u_3} & x_2 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_1 \partial u_3} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_2 \partial u_3} & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u_3^2} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Göttingen, den 29. December 1868.

Sur une équation du 16ème degré *).

(Par M. *Camille Jordan* à Paris.)

M. *Kummer* a montré (Monatsbericht der Berliner Akademie 1864, pag. 246, 247) 1° qu'il existe des surfaces du quatrième degré possédant 16 points singuliers, 2° que ces points sont situés 6 à 6 sur 16 plans tangents singuliers, qui réciproquement se coupent 6 à 6 aux points considérés.

Soient

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & k & l & m \\ n & p & q & r \end{array}$$

les 16 plans. Prenons arbitrairement dans le tableau ci-dessus une ligne horizontale, telle que $e\,f\,g\,h$, et une colonne verticale, telle que $c\,g\,l\,q$: supprimons le plan g commun à cette ligne et à cette colonne; les six plans restants e, f, h, c, l, q formeront l'une des 16 combinaisons de six plans concourants.

Ces résultats admis, ajoutons ensemble les divers produits $e\,f\,h\,c\,l\,q$ respectivement correspondants aux 16 combinaisons de plans: nous obtiendrons une forme du 6ème degré

$$\begin{aligned} \varphi = {} & bcdein + cdafkp + dabglq + abchmr + fghina \\ & + ghekpb + heflqc + efgmrd + klmnae + lmipbf \\ & + mikqcg + iklrdh + pqraei + qrnbfk + rnpcgl \\ & + npqdhm. \end{aligned}$$

Considérons maintenant l'équation du 16ème degré dont dépendent les plans tangents singuliers; et convenons de représenter par a, b, c, ... celles des racines de cette équation qui correspondent respectivement aux plans a, b, c, ... *Le groupe G de cette équation ne contiendra d'autres substitutions que celles qui laissent invariable l'expression* φ.

En effet, soit $bcdein$ un quelconque des termes de φ: les 6 plans b, c, d, e, i, n sont concourants, et cette condition s'exprimera analytiquement par certaines relations entre les racines correspondantes. Soient

$$\psi(b, c, d, e, i, n) = 0, \quad \chi(b, c, d, e, i, n) = 0, \quad \ldots$$

*) Extrait d'un traité des équations algébriques, en cours de publication.

ces relations. Les fonctions ψ, χ, ... ayant une valeur nulle et *a fortiori* rationnelle, restent inaltérées par toute substitution de G. Soient donc S une substitution quelconque de G; b', c', d', e', i', n' les racines qu'elle fait succéder à b, c, d, e, i, n: on aura

$$\psi(b', c', d', e', i', n') = 0, \quad \chi(b', c', d', e', i', n') = 0, \quad \ldots .$$

Donc les 6 plans b', c', d', e', i', n' seront concourants et $b'c'd'e'i'n'$ sera l'un des termes de φ. Donc S transforme les termes de φ les uns dans les autres, et n'altère pas leur somme.

Le groupe G ne peut contenir plus de 16.15.8.6 *substitutions.* En effet, le nombre des systèmes de places différents où ses substitutions permettent d'amener a et b ne dépasse pas 16.15. D'autre part, celles de ses substitutions qui laissent a et b immobiles laissent évidemment invariable la fonction partielle $ab(chmr+dglq)$ formée par ceux des termes de φ qui contiennent ab en facteur. Elles ne permettent donc de donner à c qu'une des 8 places précédemment occupées par c, h, m, r, d, g, l, q. Celles des substitutions de G qui laissent a, b, c immobiles laissent invariable le terme $abchmr$; elles permutent donc entre elles les trois racines hmr, ce qui ne peut se faire que de 6 manières. Enfin on vérifie immédiatement que toute substitution de G qui laisse a, b, c, h, m, r immobiles se réduit à l'unité.

Le groupe G contient précisément 16.15.8.6 *substitutions.* Car il contient les suivantes

$$A = (ei)(fk)(gl)(hm), \qquad B = (ch)(dg)(kn)(ip),$$
$$C = (bc)(fg)(kl)(pq), \qquad D = (in)(kp)(lq)(mr),$$
$$E = (cd)(gh)(lm)(qr), \qquad F = (ab)(ef)(ik)(np),$$

qui permettent d'amener a à une place quelconque, puis b à l'une quelconque des 15 places restantes, puis c à l'une quelconque des 8 places précédemment occupées par c, h, m, r, d, g, l, q, puis enfin de permuter entre elles d'une manière quelconque les trois racines h, m, r.

Supposons que les 16 racines actuellement désignées par a, b, c, ... soient représentées à l'avenir par une même lettre, affectée de quatre indices x, y, z, u, variables chacun de 0 à 1. On peut donner à la racine a les indices 0, 0, 0, 0, puis choisir les indices correspondants aux autres racines de telle sorte que les substitutions A, B, C, D, E, F prennent les formes suivantes:

$$A = |x, y, z, u \quad x, y, u, z|, \qquad B = |x, y, z, u \quad x+y+u, y, y+z+u, u|,$$
$$C = |x, y, z, u \quad y, x, z, u|, \qquad D = |x, y, z, u \quad x, y, z+u, u|,$$
$$E = |x, y, z, u \quad x+y, y, z, u|, \qquad F = |x, y, z, u \quad x+y+1, y, z, u|.$$

Le groupe G a donc toutes ses substitutions linéaires, et contiendra en particulier les 15 substitutions de la forme

$$(1.) \quad |x, y, z, u \quad x+\alpha,\ y+\beta, z+\gamma, u+\delta|$$

lesquelles dérivent de EF et de ses transformées par C, CB, CAB.

Cela posé, considérons la fonction

$$\varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b} + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

Elle est évidemment invariable, ainsi que φ, par toutes les substitutions de G. D'ailleurs chaque terme de φ fournissant 6 termes par la différentiation, φ' en contiendra 96. Mais ces termes peuvent être groupés 16 à 16 en 6 systèmes, en réunissant ensemble ceux que les substitutions (1.) permutent entre eux. Et l'on vérifie immédiatement que chacune des substitutions A, B, C, D, E, F dont G est dérivé, remplace les termes de chaque système par ceux d'un même système. Ces systèmes sont donc les racines d'une équation du 6ème degré dont les coefficients sont invariables par les substitutions de G, et par suite rationnels.

Cette équation auxiliaire étant supposé résolue, le groupe de la proposée sera réduit à celles de ses substitutions qui n'altèrent pas les systèmes, c'est-à-dire aux substitutions (1.); et l'on achèvera sa résolution par quatre extractions de racines carrées. Car soient f_1, f_2, . . . quatre fonctions des racines respectivement invariables par les substitutions des formes suivantes

$$|x, y, z, u \quad x, y+\beta, z+\gamma, u+\delta|$$
$$|x, y, z, u \quad x+\alpha, y, z+\gamma, u+\delta|$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .,$$

chacune d'elles dépend d'une équation du second degré: et leur adjonction, réduisant le groupe de la proposée à la seule substitution 1, la résout complètement.

Paris, 1869.

Sur les assemblages de lignes.

(Par M. *Camille Jordan* à Paris.)

1. Soient $x, y, z, u, \ldots$ des points en nombre quelconque; xy, xz, $yu, \ldots$ des arêtes droites ou courbes, mais non bifurquées, dont chacune joint ensemble deux de ces points. Nous appellerons un semblable système un *assemblage d'arêtes*, dont $x, y, z, u, \ldots$ sont les sommets. Un tel assemblage peut être représenté symboliquement par la forme quadratique $xy+xz+yu+\cdots$, dont les divers termes représentent les diverses arêtes de l'assemblage. Si d'ailleurs a de ces arêtes ont les mêmes extrémités x, y, la forme représentative de l'assemblage contiendra a fois le terme xy.

Soient maintenant $xy, xz, \ldots$ ceux des termes de la forme quadratique qui contiennent x; $yu, \ldots$ ceux qui ont une lettre commune avec quelqu'un de ceux-là; $uv, \ldots$ ceux qui ont une lettre commune avec les précédents, etc.... Il est clair que l'assemblage sera *continu* si l'ensemble de ces termes $xy, xz, \ldots, yu, \ldots, uv, \ldots$ contient toutes les lettres: sinon, non. L'assemblage sera dit $n+1$ *fois continu* s'il est possible de couper n des arêtes qui le forment sans détruire sa continuité.

Deux assemblages A et A' seront dits *pareils*, si l'on peut établir entre leurs arêtes et sommets une correspondance telle, qu'à chaque arête xy de l'un des assemblages corresponde dans l'autre une arête $x'y'$ joignant ensemble les sommets x', y' respectivement correspondants à x et à y. Dans ce cas, si $axy+bxz+\cdots$ est la forme représentative de A, $ax'y'+bx'z'+\cdots$ sera évidemment la forme représentative de A'.

Un assemblage peut être pareil à lui-même sous divers points de vue. Dans ce cas, A' se confondra avec A, et $x', y', z', \ldots$ seront, à l'ordre près, identiques à $x, y, z, \ldots$. De plus les deux formes $axy+bxz+\cdots$ et $ax'y'+bx'z'+\cdots$, représentatives du même réseau, seront nécessairement identiques. Donc la substitution qui remplace $x, y, z, \ldots$ par $x', y', z', \ldots$ n'altère pas la forme $axy+bxz+\cdots$. Réciproquement, soit S une substitution qui n'altère pas cette forme, et supposons qu'elle remplace respectivement $x, y, z, \ldots$ par $x', y', z', \ldots$. Faisons correspondre aux sommets $x, y, z, \ldots$ les sommets $x', y', z', \ldots$; aux a arêtes qui joignent x et y les arêtes analogues qui joignent les sommets analogues x', y', ces dernières arêtes étant

prises dans un ordre quelconque; etc. . . . ; l'assemblage restera pareil à lui-même.

L'ordre de symétrie de l'assemblage, c'est-à-dire le nombre de manières différentes dont il est pareil à lui-même est donc égal à $1.2\ldots a.1.2\ldots b\ldots N$, N étant le nombre des substitutions telles que S.

2. Problème. *Quels sont les assemblages continus, non pareils entre eux, que l'on peut former avec m arêtes? Quels sont le degré de continuité et la symétrie de chacun d'eux?*

Le tableau ci-joint donne la solution de ce problème pour $m = 2$, 3 ou 4. Chaque assemblage y est désigné par sa forme représentative. (On construira aisément la figure géométrique correspondante.) En regard sont indiqués son degré de continuité (en chiffres romains) et son ordre de symétrie (en chiffres arabes).

$m=2$	$ab+bc$	I; 2	$2ab$	II; 4	
$m=3$	$ab+bc+cd$	I; 2	$2ab+bc$	II; 2	
	$ab+bc+bd$	I; 6	$3ab$	III; 12	
	$ab+bc+ca$	II; 6			
$m=4$	$ab+bc+cd+de$	I; 2	$2ab+bc+bd$	II; 4	
	$ab+bc+cd+ce$	I; 2	$2ab+bc+ad$	II; 4	
	$ab+bc+bd+be$	I; 24	$2ab+bc+ca$	III; 4	
	$ab+bc+cd+bd$	II; 2	$2ab+2bc$	III; 8	
	$ab+bc+cd+da$	II; 8	$3ab+bc$	III; 6	
	$2ab+bc+cd$	II; 2	$4ab$	IV; 48.	

On étendrait sans peine ce tableau au cas où $m = 5$, etc . . . . Mais la complication croîtrait assez vite. On obtient plus aisément des résultats ayant quelque généralité, en laissant m indéterminé, et examinant successivement les assemblages à continuité simple, double, triple, etc. . . .

3. Assemblages à continuité simple. Soit x un sommet quelconque de l'assemblage. On peut distinguer dans l'assemblage diverses *branches*, formées chacune par l'une des arêtes xy_1, xy_2, ... qui aboutissent au sommet x et par l'ensemble des arêtes qui se rattachent à x par l'intermédiaire de celle-là. Soient p_1, p_2, ... les nombres d'arêtes respectivement contenues dans ces diverses branches; q le plus grand de ces nombres. *L'assemblage contiendra un sommet pour lequel* $q \geqq \frac{m}{2}$, *ou deux sommets, situés aux deux extrémités*

de la même arête et pour lesquels $q = \frac{m+1}{2}$. *Pour tous les autres sommets de l'assemblage,* q *sera* $> \frac{m+1}{2}$.

Supposons en effet que x soit choisi de telle sorte que q atteigne son minimum, et soit pour fixer les idées $q_1 = q$. Soient xy_1, $x'y_1$, $x''y_1$, ... les arêtes qui aboutissent au sommet y_1; r, r', r'', ... les nombres respectifs d'arêtes qui se rattachent à y_1 par l'intermédiaire de ces arêtes: on aura évidemment $r = m - q + 1$, $r' + r'' + \cdots = q - 1$. Donc $q \leqq \frac{m+1}{2}$, sans quoi on aurait à la fois r, r', r'', ... $< q$, contrairement à l'hypothèse.

Cela posé, soit d'abord $q < \frac{m+1}{2}$. Soient u un sommet quelconque autre que x; xy_μ, ..., zu les arêtes successives, en nombre k, par lesquelles il se rattache à x. Le nombre des arêtes qui se rattachent à u par l'intermédiaire de l'arête zu est évidemment égal ou supérieur à $k + m - p_\mu$, nombre supérieur à $\frac{m+1}{2}$, k étant au moins égal à 1 et p_μ au plus égal à q.

Si $q = \frac{m+1}{2}$ la même démonstration s'applique, à moins que l'on n'ait à la fois $k = 1$ et $p_\mu = q = \frac{m+1}{2}$, d'où $\mu = 1$, auquel cas le sommet u se réduit à y_1.

On peut appeler *centre* de l'assemblage le sommet ou l'arête remarquable dont nous venons d'établir l'existence. Il est clair que ce centre se correspond à lui-même sous tous les aspects relativement auxquels l'assemblage serait pareil à lui-même.

Considérons maintenant un assemblage quelconque: admettons, pour fixer les idées, que son centre soit un sommet, et que les branches issues de ce point se répartissent ainsi: 1° k branches formées de n arêtes, parmi lesquelles il en existe k_1 *pareilles* entre elles (c'est à dire où les arêtes soient assemblées dans le même ordre); puis k_2 pareilles entre elles et différentes des précédentes; etc. 2° k' branches formées de n' arêtes, parmi lesquelles il en existe k'_1 pareilles entre elles, puis k'_2 pareilles entre elles et différentes des précédentes, etc. ... 3° etc. ... Supposons en outre que parmi les nombres k_1, k_2, ... il y en ait a_1 égaux entre eux, puis a_2 égaux entre eux mais différents des précédents, etc. ...; que parmi les nombres k'_1, k'_2, ... il y en ait a'_1 égaux entre eux, puis a'_2 égaux entre eux et différents des précédents, etc..... Soient δ le nombre des quantités a_1, a_2, ..., δ' le nombre des quantités a'_1, a'_2, ... etc..... Soit enfin B_n le nombre de manières différentes dont on peut con-

stituer une branche avec n lignes. Il est clair que le nombre des assemblages différents correspondants aux valeurs données de n, k, k_1, k_2, ..., n', k', k'_1, k'_2, ... sera

$$(1.)\qquad \frac{B_n(B_n-1)\dots(B_n-\delta+1)}{1.2\dots a_1.1.2\dots a_2\dots 1.2\dots a_\delta}\cdot\frac{B_{n'}(B_{n'}-1)\dots(B_{n'}-\delta'+1)}{1.2\dots a'_1.1.2\dots a'_2\dots 1.2\dots a'_{\delta'}}\dots$$

et l'on aura le nombre total des assemblages formés avec m arêtes en sommant les expressions relatives à tous les systèmes de valeurs de ces quantités qui satisfont aux relations

$$(2.)\qquad kn+k'n'+\dots=m,\quad k_1+k_2+\dots=k,\quad k'_1+k'_2+\dots=k',\quad \dots$$

$$(3.)\qquad \frac{m+1}{2}>n>n'\dots$$

dont la dernière exprime que x est le centre de l'assemblage.

L'ordre de symétrie de chacun des assemblages ainsi obtenus sera évidemment égal à

$$(4.)\qquad 1.2\dots k_1S_1^{k_1}.1.2\dots k_2S_2^{k_2}\dots 1.2\dots k'_1S_1'^{k'_1}.1.2\dots k'_2S_2'^{k'_2}\dots$$

S_1, S_2, ..., S'_1, S'_2, ... étant les ordres de symétrie respectifs des diverses sortes de branches qu'il contient.

Il reste à déterminer B_n, S_1, et les quantités analogues. Remarquons pour cela qu'une branche formée de n arêtes se compose 1° d'une première arête xy, 2° d'autres arêtes en nombre $n-1$, formant ensemble un assemblage dont y est un sommet: B_n est évidemment égal au nombre de manières de construire cet assemblage, et S_1 à son ordre de symétrie. On obtiendra donc ces deux nombres par des formules analogues à celles ci-dessus, où m serait remplacé par $n-1$. La sommation doit d'ailleurs être étendue à toutes les valeurs des variables qui satisfont aux relations analogues à (2.), car le point y pouvant être un sommet quelconque du nouvel assemblage, on n'a ici aucune relation analogue à (3.).

Le cas des assemblages à arête centrale se traiterait non moins facilement.

4. Soit A un assemblage quelconque à continuité simple. Parmi les arêtes qui le forment, il en existe nécessairement qui ne se rattachent au reste de l'assemblage que par une de leurs extrémités, l'autre restant libre. Supprimons-les toutes à la fois; supprimons de même dans l'assemblage restant A' toutes les arêtes qui ont une extrémité libre; et répétons cette opération jusqu'au moment où on ne peut plus la répéter sans faire disparaître toutes les arêtes restantes. Deux cas pourront alors se présenter:

1°. Il ne reste plus qu'une arête.

2°. Il reste plusieurs arêtes, ayant toutes une extrémité libre. Leurs autres extrémités concourent évidemment en un même sommet.

Voilà donc une nouvelle manière de discerner dans l'assemblage une arête ou sommet remarquable, jouissant de propriétés à lui spéciales, et dont la position dans l'assemblage peut être considérée à certains égards comme centrale. Nous lui donnerons le nom de *centre de seconde espèce.*

5. On peut déterminer encore comme il suit deux autres sommets ou arêtes remarquables:

Nous distinguerons dans A trois sortes de sommets: 1° les sommets ordinaires, où aboutissent deux arêtes, 2° les sommets terminaux, où il n'en aboutit qu'une, 3° ceux de branchement, où il en aboutit plus de deux. Cela posé, l'assemblage peut évidemment être divisé en sections, limitées à des sommets terminaux ou de branchement. Chacune de ces sections sera d'ailleurs formée d'une seule arête, ou d'arêtes successives se joignant en des sommets ordinaires.

Ces diverses sections, considérées chacune comme un seul tout, forment un assemblage, où l'on peut déterminer par les méthodes précédentes deux centres, dont chacun correspondra à lui-même sous tous les aspects pour lesquels A est pareil à lui-même. Le centre considéré peut être un sommet, ou une section. Dans le second cas, suivant que la section sera composée d'un nombre pair ou impair d'arêtes, son milieu sera un sommet ou une arête remarquable, lequel sera évidemment homologue à lui-même sous tous les aspects pour lesquels A est pareil à lui-même.

6. Assemblages à continuité double. Opérons comme au No. 4. tant qu'il restera dans l'assemblage des arêtes ayant une extrémité libre. Les lignes restantes formeront un contour fermé, toujours homologue à lui-même. Cette observation faite, on posera sans peine, comme au No. 3., les formules qui donnent la solution du problème.

7. Assemblages à continuité triple. Opérons comme au No. 4. Les arêtes restantes formeront un système A', triplement continu. On y pourra donc déterminer des arêtes formant un contour fermé C. Coupons l'une de ces arêtes: il restera un assemblage à continuité double, sur lequel on pourra répéter les opérations du No. 4. jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un contour fermé D. Deux cas seront ici à distinguer.

1°. Si C et D n'ont aucune arête commune, A' sera formé de ces deux contours et d'une ligne de jonction L, généralement polygonale, mais qui pourra, dans certains cas particuliers, se réduire à une seule arête, ou même à un point. Le milieu de L sera un *centre* de l'assemblage.

2°. Si les contours C et D ont une portion commune, cette portion et les deux autres portions non communes forment un système de trois lignes ayant leurs extrémités en deux mêmes points, p, p', qu'on pourra appeler *les pôles de l'assemblage:* et il est clair que le système formé par ces deux points sera constamment homologue à lui-même.

8. On continuera de même pour les assemblages à continuité quadruple, etc. . . . Mais voici un résultat relatif aux assemblages quelconques.

Soient A un assemblage, S l'un de ses sommets. Partageons les arêtes qui aboutissent en S en deux catégories; puis supposons qu'on disjoigne les arêtes de la première catégorie de celles de la seconde, sans rompre la liaison existante entre les arêtes d'une même catégorie. On peut appeler cette opération une *scission*. Et un assemblage sera *composé* ou *primitif*, suivant qu'on pourra ou non détruire sa continuité par une scission.

Cela posé, il est clair que tout assemblage composé pourra être fractionné par une suite de scissions convenables en assemblages partiels qui seront primitifs; et ces fragments étant supposés ressoudés entre eux, on voit aisément par des raisonnements analogues à ceux des No. 3, 4, 5, qu'il existe quatre manières différentes de déterminer dans l'assemblage un sommet ou fragment central, constamment homologue à lui-même.

Le problème de la symétrie des assemblages se trouve ainsi ramené au cas des assemblages primitifs.

Paris, 1869.

Ueber relative Primzahlen.

(Von Herrn *Victor Schemmel.*)

Es lassen sich aus den relativen Primzahlen einer ungeraden Zahl m, welche kleiner als m sind, eine bestimmte Anzahl Gruppen von je n aufeinanderfolgenden Zahlen zusammenstellen. Eine gleiche Gruppenzahl ergiebt sich, wenn man die n Glieder jeder Gruppe nicht um die Einheit sondern um eine andere zu m relativ prime Zahl äquidistant wählt. So kann man z. B. aus den relativen Primzahlen zu 35, die kleiner als 35 sind, drei Gruppen von je 4 aufeinanderfolgenden und ebenfalls drei Gruppen von je 4 um die Zahl 11 äquidistanten Zahlen bilden:

1	2	3	4	1	12	23	34
16	17	18	19	11	22	33	9
31	32	33	34	26	2	13	24.

Diese Anzahl der möglichen Gruppen von je n Gliedern bezeichne ich mit $\varphi_n(m)$. Von dieser Function gelten die Beziehungen:

$$\varphi_n(a^\alpha) = a^{\alpha-1}\varphi_n(a),$$

ferner für zwei theilerfremde Zahlen m und m'

$$\varphi_n(m.m') = \varphi_n(m).\varphi_n(m')$$

und schliesslich für eine Primzahl $\varphi_n(p) = p - n$. Daraus bestimmt sich für eine zusammengesetzte Zahl $m = a^\alpha . b^\beta . c^\gamma \ldots$ der Werth der Function:

$$\varphi_n(m) = a^{\alpha-1}(a-n).b^{\beta-1}(b-n).c^{\gamma-1}(c-n)\ldots.$$

Im speziellen Falle $n = 1$ erhält man die bekannte Function $\varphi_1(m)$, welche die Anzahl der einzelnen relativen Primzahlen angiebt.

Die für die Function $\varphi_1(m)$ bekannten Sätze lassen sich auf die allgemeinere Function $\varphi_n(m)$ erweitern. Von diesen Erweiterungen will ich im Folgenden zwei kurz angeben.

Es besteht zwischen den Divisoren δ einer Zahl m und der Function φ_1 die Relation, welche durch die Formel

$$\Sigma\varphi_1(\delta) = m$$

ausgedrückt wird, in welcher die Summation über alle Divisoren δ auszudehnen ist. Die analoge Beziehung zwischen der Function φ_n und der Zahl m lässt sich in folgender Weise aussprechen:

Bildet man für jeden Divisor $\delta = a^{\alpha'}.b^{\beta'}.c^{\gamma'}\ldots$ der Zahl m die Function $\varphi_n(\delta)$ und dividirt dieselbe durch $n^{\alpha'}.n^{\beta'}.n^{\gamma'}\ldots$, wo α', β', $\gamma'\ldots$ die Exponenten der Primzahlfactoren des Divisors bedeuten, so ist die Summe aller Ausdrücke dieser Art gleich der Zahl m, dividirt durch $n^{\alpha}.n^{\beta}.n^{\gamma}\ldots$; also

$$\Sigma\frac{\varphi_n(\delta)}{n^{\alpha'}.n^{\beta'}.n^{\gamma'}\ldots} = \frac{m}{n^{\alpha}.n^{\beta}.n^{\gamma}\ldots}.$$

Wählt man aus jeder der $\varphi_n(m)$ Gruppen das λ^{te} Glied und bildet aus diesen Gliedern das Product, welches ich mit

$$\Pi_n A_{\lambda k}$$

bezeichnen will, wo k die Differenz je zweier aufeinander folgenden Glieder in einer Gruppe bedeutet, so erhält man für dieses Product im Falle $n=1$ den *Wilson*schen, wenn dagegen $n>1$, folgenden Satz:

$$\{\Pi_n A_{\lambda k}\}^{n-1} \equiv \{(-1)^{\lambda-1}k^{n-1}(\lambda-1)!(n-\lambda)!\}^{\varphi_n(m)} \pmod{m},$$

wo die Facultäten $(\lambda-1)!$ und $(n-\lambda)!$, wenn $\lambda=1$ oder $\lambda=n$ wird, durch die Einheit zu ersetzen sind. In dem speziellen Falle $k=1$, $\lambda=1$, $n=2$ kann man folgenden Satz aussprechen:

Das Product derjenigen relativen Primzahlen, welche um die Zahl 1 vergrössert wiederum zu m relativ prim sind, ist $\equiv 1 \pmod{m}$.

Berlin, im Juli 1868.

Ueber das Additionstheorem der *Abel*schen Functionen.

(Von Herrn *H. Weber* in Heidelberg.)

Die in dem vorliegenden Aufsatz mitgetheilten Untersuchungen über das Additionstheorem der allgemeinen *Abel*schen Functionen beruhen im Wesentlichen auf der Anwendung der Principien von *Riemann*. Als Begriff der *Abel*schen Functionen lege ich den aus dem *Jacobi*schen Umkehrproblem hervorgehenden zu Grunde, und aus diesem habe ich auch die Aufgabe der Addition entnommen. Ich bin übrigens der Ansicht, dass die Lösung des *Jacobi*schen Umkehrproblems auf dem von *Riemann* in der Abhandlung „über die Theorie der *Abel*schen Functionen" (Bd. 54 dieses Journals) vorgezeichneten Wege vollständig zu finden ist, wie ich dies im §. 3 der vorliegenden Arbeit zu zeigen versucht habe. Eine einfache Anwendung des *Abel*schen Theorems führt in ähnlicher Weise, wie *Abel* das Additionstheorem für die elliptischen Integrale entwickelt hat*), und wie es später durch Herrn *Weierstrass* auf die hyperelliptischen Integrale ausgedehnt wurde**), zur Lösung des Additionsproblems für die Integrale erster Gattung, eine Lösung, die sich mit Hülfe von ϑ-Functionen durch die unabhängigen Variablen des Umkehrproblems darstellen lässt. Genau dieselben Betrachtungen führen auch zur Lösung des Additionsproblems für die zweite und dritte Gattung, wenn man gewisse Summen von Integralen zweiter und dritter Gattung, betrachtet als Functionen der Integralsummen erster Gattung, als Transcendenten zweiter und dritter Gattung einführt.

§. 1.

Das *Abel*sche Theorem.

Da die im Folgenden aufzustellenden Sätze fast ausschliesslich auf der Anwendung des *Abel*schen Theorems beruhen, so sei es mir gestattet, dasselbe hier kurz auszusprechen in der Fassung, von welcher im Nachstehenden Gebrauch gemacht werden soll, und die im Wesentlichen übereinkommt mit der Form, in welcher *Riemann* dasselbe Theorem im §. 14 der in der Einleitung citirten

*) Précis d'une théorie des fonctions elliptiques. Chapitre II. Bd. 4 dieses Journals.

**) Bd. 52 dieses Journals.

Abhandlung für die Integrale erster Gattung aufgestellt und für die übrigen algebraischen Integrale angedeutet hat.

Es sei s eine algebraische Function von z und mit z durch die algebraische Gleichung

$$F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0$$

verbunden. Durch die Fläche T sei die Verzweigungsart der Function s dargestellt. Es sei ferner ζ eine in der Fläche T einwerthige Function, die in ν Punkten dieser Fläche unendlich von der ersten Ordnung wird und demzufolge auch jeden beliebigen Werth in ν Punkten der Fläche T annimmt. Eine solche Function kann durch s und z rational ausgedrückt werden *). Endlich bedeute ω irgend ein Integral einer rationalen Function von s und z. Der Differentialquotient $\frac{\partial\omega}{\partial\zeta}$ ist dann eine algebraische Function von ζ, welche für jeden Werth von ζ ν Werthe hat, und wenn man diese Werthe mit $\frac{\partial\omega^{(h)}}{\partial\zeta}$ bezeichnet, so ist die Summe:

$$\frac{\partial\omega^{(1)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial\omega^{(2)}}{\partial\zeta}+\cdots+\frac{\partial\omega^{(\nu)}}{\partial\zeta}$$

eine einwerthige und folglich rationale Function von ζ, deren Integral durch rationale Functionen und Logarithmen ausgedrückt werden kann. Also:

Die Summe der Werthe des Integrals einer wie T verzweigten Function, bis zu solchen Punkten als oberen Grenzen erstreckt, in denen eine beliebige wie T verzweigte Function ζ denselben Werth annimmt, ist durch rationale und logarithmische Functionen von ζ darstellbar.

Wendet man diesen Satz auf zwei verschiedene Werthe der Function ζ, ζ und ζ_0, an und bezeichnet die Punkte, in denen der Werth ζ stattfindet, mit $x_1, x_2, \ldots x_\nu$, die Punkte, in denen der Werth ζ_0 stattfindet, mit $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots x_\nu^{(0)}$, so fliessen daraus für die Integrale erster, zweiter und dritter Gattung die nachstehenden Formeln:

Bedeutet ω irgend ein Integral erster Gattung, so ist:

$$(1.)\quad \int_{x_1^{(0)}}^{x_1} d\omega+\int_{x_2^{(0)}}^{x_2} d\omega+\cdots+\int_{x_\nu^{(0)}}^{x_\nu} d\omega = 0.$$

Ist ferner $t_{(\varepsilon)}$ ein Integral zweiter Gattung, nämlich eine Function von der Eigenschaft, dass (falls ε kein Verzweigungspunkt ist) $t_{(\varepsilon)}-\frac{1}{z-z_\varepsilon}$ im

*) *Riemann* l. c. §. 8.

Punkte ε, dem der Werth z_ε von z entspricht, endlich bleibt, so ergiebt sich in gleicher Weise, wenn man mit η und η' die Werthe der Function ζ und ihres Differentialquotienten im Unstetigkeitspunkt ε bezeichnet:

$$(2.)\quad \int_{x_1^{(0)}}^{x_1} dt_{(\varepsilon)} + \int_{x_2^{(0)}}^{x_2} dt_{(\varepsilon)} + \cdots + \int_{x_\nu^{(0)}}^{x_\nu} dt_{(\varepsilon)} = \frac{\eta'}{\zeta - \eta} - \frac{\eta'}{\zeta_0 - \eta},$$

vorausgesetzt, dass in dem Punkte ε nicht zwei oder mehrere einander gleiche Werthe von ζ zusammenfallen. (In diesem Ausnahmefall, der im Folgenden nicht ins Gewicht fällt, würde auf der rechten Seite der Gleichung (2.) ebenfalls 0 zu stehen kommen.)

Endlich bezeichne $\pi_{(\varepsilon_1\varepsilon_2)}$ ein Integral dritter Gattung, also eine Function von der Beschaffenheit, dass $\pi_{(\varepsilon_1\varepsilon_2)} + \log(z - z_{\varepsilon_1})$ und $\pi_{(\varepsilon_1\varepsilon_2)} - \log(z - z_{\varepsilon_2})$ respective in den Punkten ε_1, ε_2 endlich bleiben (wieder vorausgesetzt, dass diese Punkte keine Verzweigungspunkte sind). Unter dieser Voraussetzung folgt aus dem *Abel*schen Satz, wenn $\eta_{/1}$, $\eta_{/2}$ die Werthe von ζ in den Punkten ε_1, ε_2 bedeuten:

$$(3.)\quad \int_{x_1^0}^{x_1} d\pi_{(\varepsilon_1\varepsilon_2)} + \int_{x_2^0}^{x_2} d\pi_{(\varepsilon_1\varepsilon_2)} + \cdots + \int_{x_\nu^0}^{x_\nu} d\pi_{(\varepsilon_1\varepsilon_2)} = \log\frac{\zeta - \eta_{/2}}{\zeta - \eta_{/1}} - \log\frac{\zeta_0 - \eta_{/2}}{\zeta_0 - \eta_{/1}}.$$

Diese Formel bleibt auch dann noch richtig, wenn in dem Punkt ε_1 oder ε_2 oder in beiden zwei oder mehrere gleiche Werthe der Function ζ zusammenfallen; dagegen verschwindet hier die rechte Seite, sobald $\eta_{/2} = \eta_{/1}$ ist, d. h. sobald die Unstetigkeitspunkte solche sind, in welchen die Function ζ denselben Werth hat.

Die Formeln (1.), (2.), (3.) sind nur genau bis auf gewisse additive Constanten, welche aber lineare homogene Functionen mit ganzzahligen Coefficienten von den Periodicitätsmoduln der betreffenden Integrale sind; oder anders ausgedrückt: die Formeln (1.), (2.), (3.) sind nur richtig, wenn man die Integrationswege gehörig bestimmt, und zwar werden dieselben dabei durchaus nicht nothwendig alle in der einfach zusammenhängenden Fläche T' verlaufen, sondern werden im Allgemeinen die Querschnitte überschreiten müssen. Nur so viel lässt sich im Allgemeinen schliessen, und das ist für die Folge von Wichtigkeit: die ganzzahligen Coefficienten der entsprechenden Periodicitätsmoduln in den erwähnten additiven Constanten werden für die Formeln (1.), (2.), (3.) und alle ähnlich gebildeten dieselben sein, sobald die Integrationswege zwischen denselben Grenzen dieselben sind.

§. 2.

Sätze über Integrale zweiter und dritter Gattung.

Ich stelle in diesem Paragraphen einige Sätze zusammen, von denen im Folgenden Gebrauch zu machen sein wird, die zum Theil von *Riemann* ausgesprochen sind, zum Theil in dem Werke über *Abel*sche Fnnctionen der Herren *Clebsch* und *Gordan* *) sich finden, und die ich daher nur kurz erwähnen werde, um ihnen diejenige Ausdrucksweise zu geben, die für den vorliegenden Zweck die geeignete erscheint.

Die $(2p+1)$fach zusammenhängende Fläche T werde durch die Querschnitte $a_\nu b_\nu$ in der Weise in eine einfach zusammenhängende Fläche T' verwandelt, wie es *Riemann* a. a. O. §. 20 auseinander gesetzt hat. Es sei u_μ eines der p Normalintegrale erster Gattung, dessen Periodicitätsmoduln an den Querschnitten a_ν, mit Ausnahme von $a_\mu = 0$, an $a_\mu = \pi i$ und an $b_\mu = a_{\mu\nu}$ sind, so dass $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$. Ferner mögen als Normalintegrale zweiter und dritter Gattung, $t_{(\varepsilon_1)}$, $\pi_{(\varepsilon_1\varepsilon_2)}$ solche betrachtet werden, deren Periodicitätsmoduln an den Querschnitten a_μ sämmtlich verschwinden, eine Form, die aus jedem Integral zweiter und dritter Gattung durch Hinzufügung eines geeigneten Integrals erster Gattung hergestellt werden kann.

Die gedachten Sätze fliessen nun alle sehr leicht aus einer und derselben Quelle, nämlich aus der Bestimmung der Werthe der folgenden Integrale:

$$(4.)\qquad \int t_{(\varepsilon)}\,du_\mu,\quad \int \pi_{(\varepsilon_1\varepsilon_2)}\,du_\mu,\quad \int t_{(\varepsilon)}\,d\pi_{(\varepsilon_1\varepsilon_2)},\quad \int \pi_{(\varepsilon_1\varepsilon_2)}\,d\pi_{(\xi_1\xi_2)}$$

in positiver Richtung um die ganze Begrenzung von T' erstreckt, welche Werthe gleich sein müssen den entsprechenden Integralen über beliebige Curven, welche die Unstetigkeitsstellen der unter dem Integralzeichen stehenden Functionen einschliessen.

Die beiden ersten Integrale ergeben auf diese Weise behandelt **) die Periodicitätsmoduln der Functionen $t_{(\varepsilon)}$ und $\pi_{(\varepsilon_1\varepsilon_2)}$ an dem Querschnitt a_μ, nämlich den von $t_{(\varepsilon)}$

$$(5.)\qquad -2\left(\frac{\partial u_\mu}{\partial z}\right)_{z=z_\varepsilon}$$

und den von $\pi_{(\varepsilon_1\varepsilon_2)}$

$$(6.)\qquad 2\,(u_\mu^{(z_{\varepsilon_2})} - u_\mu^{(z_{\varepsilon_1})}) = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} du_\mu.$$

*) *Clebsch* und *Gordan*, Theorie der *Abel*schen Functionen. Leipzig 1866. Fünfter Abschnitt.

**) Siehe *Riemann* l. c. §. 20.

Das dritte der obigen Integrale, in ähnlicher Weise behandelt, ergiebt die merkwürdige Formel:

$$(7.) \qquad \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} dt_{(\varepsilon)} = -\frac{\partial \pi^{(z_\varepsilon)}_{(\varepsilon_1 \varepsilon_2)}}{\partial z_\varepsilon},$$

welche aussagt, dass das Normalintegral zweiter Gattung eine wie T verzweigte, also algebraische Function seines Unstetigkeitspunktes ist, dass es also, wenn man die Grenzen als fest, den Unstetigkeitspunkt als veränderlich ansieht, rational durch die in seinem Unstetigkeitspunkte stattfindenden Werthe von s und z ausgedrückt werden kann. Das letzte Integral (4.), in gleicher Weise behandelt, führt zu dem Satz von der Vertauschung von Parameter und Argument für die Integrale dritter Gattung, nämlich zu der Formel:

$$(8.) \qquad \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} d\pi_{(\xi_1 \xi_2)} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} d\pi_{(\varepsilon_1 \varepsilon_2)}.$$

In den Formeln (6.), (7.), (8.) verlaufen die Integrationswege in der einfach zusammenhängenden Fläche T'; bei anderer Bestimmung können noch Vielfache der Periodicitätsmoduln hinzutreten, und bei den Integralen dritter Gattung noch Vielfache von $2\pi i$.

§. 3.

Das Umkehrproblem.

Es sollen nun, um später Unklarheiten zu vermeiden, die Formeln aufgestellt werden, die sich, mit Hülfe des *Abel*schen Theorems, unmittelbar aus *Riemann*s Resultaten ergeben, und die das Umkehrproblem in der *Jacobi*schen Fassung lösen, Formeln, die im Wesentlichen übereinstimmen mit den von den Herren *Clebsch* und *Gordan**) auf anderem Wege entwickelten. Ich bediene mich dabei, um eine Grössenreihe wie

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots \quad v_m$$

abgekürzt darzustellen, der von *Riemann* in der Abhandlung „über das Verschwinden der ϑ-Functionen“ **) gebrauchten sehr zweckmässigen Bezeichnung:

$$\left(\sum_{h}^{m} (v_h)\right),$$

wobei h gewissermassen wie der Index bei einem Summenzeichen, 1 und m wie die Grenzen eines solchen zu betrachten sind. Bezeichnet man nun mit

---

*) l. c. Sechster Abschnitt.

**) Bd. 65 dieses Journals.

$v_1, v_2 \ldots v_p$ ein beliebiges Grössensystem (unabhängige Variable), so lassen sich, wie *Riemann* nachgewiesen hat*), immer, und im Allgemeinen, d. h. wenn zwischen den Grössen $v_1, v_2 \ldots v_p$ nicht gewisse Bedingungen bestehen, nur auf eine Weise die Punkte $x_1, x_2 \ldots x_p$ in der Fläche T so bestimmen, dass die Gleichungen erfüllt sind:

$$(9.) \qquad v_\varrho = \int_{c_1}^{x_1} du_\varrho + \int_{c_2}^{x_2} du_\varrho + \cdots + \int_{c_p}^{x_p} du_\varrho, \qquad \varrho = 1, 2 \ldots p$$

vorausgesetzt, dass die Integrationswege gehörig bestimmt werden. Es bedeuten dabei $c_1, c_2 \ldots c_p$ beliebige, ein für allemal als fest angenommene Punkte, welche möglicherweise auch alle oder theilweise in einen zusammenfallen können. Ich hebe gleich hier hervor, dass ich immer voraussetze, dass in den p in (9.) enthaltenen Gleichungen zu derselben oberen Grenze auch immer dieselbe untere Grenze gehöre. Bei der von *Riemann* für die Argumente der ϑ-Function festgesetzten Bestimmungsart der unteren Grenzen sind gerade umgekehrt für die verschiedenen Integrale erster Gattung die unteren Grenzen wesentlich verschieden, dagegen für dasselbe Integral, auch wenn die oberen Grenzen verschieden sind, immer dieselbe, ein Umstand, der bei der Anwendung der Formeln von *Riemann* auf unsern Fall wohl zu beachten ist.

Das *Jacobi*sche Umkehrproblem besteht nun darin, wenn die Grössen $v_1, v_2 \ldots v_p$ als beliebig gegeben betrachtet werden, die Punkte $x_1, x_2 \ldots x_p$ zu ermitteln, und um diese Aufgabe zu lösen bieten die *Riemann*schen Untersuchungen zwei verschiedene Wege dar.

Der eine dieser Wege besteht darin, dass man direct darauf ausgeht, mit Hülfe von ϑ-Functionen eine rationale Function von s und z zu bilden, welche gerade in den Punkten $x_1, x_2 \ldots x_p$ und in keinen andern, in diesen aber mindestens von der zweiten Ordnung unendlich klein wird, und dazu sind in §. 27 der mehrfach citirten *Riemann*schen Abhandlung die Mittel vollständig gegeben. Der zweite Weg den ich hier in der Kürze darlegen will, löst das Problem durch Vermittlung von Integralen dritter Gattung in ähnlicher Weise, wie es von den Herren *Clebsch* und *Gordan* durchgeführt ist.

Betrachtet man eine Summe von Normalintegralen dritter Gattung:

$$(10.) \qquad \int_{c_1}^{x_1} d\pi_{(\varepsilon_1\varepsilon_2)} + \int_{c_2}^{x_2} d\pi_{(\varepsilon_1\varepsilon_3)} + \cdots + \int_{c_p}^{x_p} d\pi_{(\varepsilon_1\varepsilon_3)},$$

*) Theorie der *Abel*schen Fnnctionen §. 24. Eingehender, rücksichtlich der Ausnahmefälle in der erwähnten Abhandlung „über das Verschwinden der ϑ-Functionen".

so kann diese Summe, vorausgesetzt dass man die Integrationswege in derselben Weise bestimmt, wie in den Gleichungen (9.), als Function der Grössen $v_1, v_2 \ldots v_p$ angesehen werden, welche bis auf Vielfache von $2\pi i$ völlig eindeutig ist. So betrachtet möge diese Function bezeichnet werden durch:

$$P_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(v_1, v_2 \ldots v_p).$$

Diese Summe findet sich bei *Riemann* (l. c. §. 25.) durch ϑ-Functionen ausgedrückt. Bezeichnet man diejenigen Punkte, welche nach *Riemanns* Bestimmungsweise den unteren Grenzen der Integrale erster Gattung entsprechen, mit $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_p$, so ergiebt sich aus den erwähnten Formeln ohne Weiteres:

$$(11.)\quad P_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(v_1, v_2 \ldots v_p) = \log \frac{\vartheta\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}\left(\int_{\gamma_h}^{\varepsilon_2} du_h - v_h + k_h\right)\right)\vartheta\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}\left(\int_{\gamma_h}^{\varepsilon_1} du_h + k_h\right)\right)}{\vartheta\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}\left(\int_{\gamma_h}^{\varepsilon_1} du_h - v_h + k_h\right)\right)\vartheta\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}\left(\int_{\gamma_h}^{\varepsilon_2} du_h + k_h\right)\right)},$$

worin die Constanten k_h die Bedeutung haben:

$$(12.)\quad k_h = \int_{c_1}^{\gamma_h} du_h + \int_{c_2}^{\gamma_h} du_h + \cdots + \int_{c_p}^{\gamma_h} du_h \text{ *}).$$

Nimmt man nun eine beliebige rationale Function σ von s und z an, die in

*) Die Argumente der ϑ-Functionen lassen sich ohne Kenntniss der Punkte γ_h vollständig durch die v_h ausdrücken. Versteht man nämlich unter c_0 eine beliebige, allen Integralen erster Gattung gemeinschaftliche untere Grenze, so kommt es, um in (11.) die Argumente der ϑ-Functionen vollständig ausdrücken zu können, nur auf die Kenntniss von

$$\int_{\gamma_h}^{c_0} du_h + k_h$$

an. Setzt man aber für die Argumente der ϑ-Functionen:

$$\int_{c_0}^{z,s} du_h - \sum_{i=1}^{i=p} \int_{c_0}^{x_i} du_h + k'_h,$$

wenn die ϑ-Function in den Punkten x_i verschwinden soll, so lassen sich nach *Riemann* (über das Verschwinden der ϑ-Functionen) die Constanten k'_h vollständig bestimmen. Dies vorausgesetzt folgt aus der Gleichung:

$$\int_{\gamma_h}^{z,s} du_h - \sum_{i=1}^{i=p} \int_{c_i}^{x_i} du_h + k_h = \int_{c_0}^{z,s} du_h - \sum_{i=1}^{i=p} \int_{c_0}^{x_i} du_h + k'_h,$$

$$\int_{\gamma_h}^{c_0} du_h + k_h = \sum_{i=1}^{i=p} \int_{c_i}^{c_0} du_h + k'_h,$$

wo auf der rechten Seite nur bekannte Grössen stehen.

μ Punkten $\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)} \ldots \xi_\mu^{(0)}$ unendlich von der ersten Ordnung wird, und daher auch jeden andern Werth σ in μ Punkten $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_\mu$ annimmt, so kann die Aufgabe des Umkehrproblems so gestellt werden, dass die ganze rationale Function p^{ten} Grades von σ:

$$\psi(\sigma) = (\sigma-\sigma_1)(\sigma-\sigma_2)\ldots(\sigma-\sigma_p) = \sigma^p + M_1\sigma^{p-1} + \cdots + M_{p-1}\sigma + M_p$$

bestimmt werden soll, deren Wurzeln $\sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_p$ die p Werthe der Function σ in den Punkten $x_1, x_2 \ldots x_p$ sind. Bezeichnet man aber mit $\sigma_1^{(0)}, \sigma_2^{(0)} \ldots \sigma_p^{(0)}$ die Werthe derselben Functionen in den festen Punkten $c_1, c_2 \ldots c_p$, so ist nach dem *Abel*schen Theorem:

$$(13.)\qquad \int_{\xi_1^{(0)}}^{\xi_1} d\pi_{(c_\varrho x_\varrho)} + \int_{\xi_2^{(0)}}^{\xi_2} d\pi_{(c_\varrho x_\varrho)} + \cdots + \int_{\xi_\mu^{(0)}}^{\xi_\mu} d\pi_{(c_\varrho x_\varrho)} = \log\frac{\sigma-\sigma_\varrho}{\sigma-\sigma_\varrho^{(0)}}\cdot \qquad \varrho = 1, 2, \ldots p$$

Addirt man diese Gleichungen für die verschiedenen Werthe von ϱ und wendet den Satz von der Vertauschung des Arguments und Parameters an, so folgt:

$$\log\frac{(\sigma-\sigma_1)(\sigma-\sigma_2)\ldots(\sigma-\sigma_p)}{(\sigma-\sigma_1^{(0)})(\sigma-\sigma_2^{(0)})\ldots(\sigma-\sigma_p^{(0)})} = \sum_{i=1}^{i=\mu} P_{\xi_i^{(0)}\,\xi_i}(v_1, v_2 \ldots v_p)$$

und daraus, wenn man schliesslich noch $(\sigma-\sigma_1^{(0)})(\sigma-\sigma_2^{(0)})\ldots(\sigma-\sigma_p^{(0)})$ mit $\psi^{(0)}(\sigma)$ bezeichnet:

$$(14.)\qquad \frac{\psi(\sigma)}{\psi^{(0)}(\sigma)} = \prod_{i=1}^{i=\mu} \frac{\vartheta\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}\left(\int_{\gamma_h}^{\xi_i} du_h - v_h + k_h\right)\right)\vartheta\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}\left(\int_{\gamma_h}^{\xi_i^{(0)}} du_h + k_h\right)\right)}{\vartheta\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}\left(\int_{\gamma_h}^{\xi_i^{(0)}} du_h - v_h + k_h\right)\right)\vartheta\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}\left(\int_{\gamma_h}^{\xi_i} du_h + k_h\right)\right)}.$$

Dieser Ausdruck könnte möglicher Weise noch einen von σ unabhängigen Factor enthalten; man sieht aber, dass dieser Factor $= 1$ sein muss, wenn man die Werthe von σ nicht weiter ausdehnt, als dass ohne Ueberschreitung der Querschnitte sämmtliche ξ_i in die entsprechenden $\xi_i^{(0)}$ übergeführt werden können; denn dann wird für $\sigma = \infty$ die Formel (14.) identisch. Die Coefficienten $M_1, M_2 \ldots M_p$ von ψ können bestimmt werden, wenn man die Gleichung (14.) für p verschiedene Werthe von σ aufstellt. Die Formel (14.) stimmt mit der der Herren *Clebsch* und *Gordan* *) im Wesentlichen überein.

---

*) l. c. §. 57.

§. 4.

Das Additionstheorem für die erste Gattung.

Bezeichnet man, wie oben durch $v_1, v_2, \ldots, v_p$, ein zweites beliebiges Grössensystem mit $w_1, w_2, \ldots, w_p$, so lassen sich, wie aus der Gleichung (9.) die Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_p$, so aus:

$$(15.) \qquad w_\varrho = \int_{c_1}^{y_1} du_\varrho + \int_{c_2}^{y_2} du_\varrho + \cdots + \int_{c_p}^{y_p} du_\varrho$$
$$\varrho = 1, 2 \ldots p$$

die Punkte $y_1, y_2, \ldots, y_p$ in unzweideutiger Weise bestimmen.

Die Aufgabe des Additionstheorems ist nun folgende:

Setzt man die Grössen $v_1, v_2, \ldots, v_p$; $w_1, w_2, \ldots, w_p$ als gegeben und die Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_p$; $y_1, y_2, \ldots, y_p$ als daraus bestimmt voraus, so sollen aus diesen Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_p$; $y_1, y_2, \ldots, y_p$ die neuen Punkte $z_1, z_2, \ldots, z_p$ so bestimmt werden, dass den Gleichungen Genüge geschieht:

$$(16.) \qquad v_\varrho + w_\varrho = \int_{c_1}^{z_1} du_\varrho + \int_{c_2}^{z_2} du_\varrho + \cdots + \int_{c_p}^{z_p} du_\varrho .$$
$$\varrho = 1, 2 \ldots p$$

Die Punkte $z_1, z_2, \ldots, z_p$ sind dadurch im Allgemeinen ebenfalls völlig bestimmt und können aus den x_i, y_i auf algebraischem Wege gefunden werden.

Aus den Gleichungen (9.), (15.), (16.) ergeben sich durch Elimination der v_ϱ und w_ϱ für die z_i die Bedingungen:

$$(17.) \quad 0 = \int_{x_1}^{z_1} du_\varrho + \int_{x_2}^{z_2} du_\varrho + \cdots + \int_{x_p}^{z_p} du_\varrho + \int_{y_1}^{c_1} du_\varrho + \int_{y_2}^{c_2} du_\varrho + \cdots + \int_{y_p}^{c_p} du_\varrho ,$$
$$\varrho = 1, 2 \ldots p$$

und zur Lösung dieses Systems von Gleichungen liefert das *Abel*sche Theorem die Mittel.

Nach einem von *Riemann* bewiesenen Satze *) lässt sich eine rationale Function ζ von s und z bestimmen, welche in den p Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_p$; $y_1, y_2, \ldots, y_p$ unendlich von der ersten Ordnung wird, und welche noch $p+1$ willkürliche Constanten enthält, welche linear und homogen in ihr enthalten sind. Von diesen $p+1$ Constanten lassen sich p so bestimmen, dass ζ einen beliebigen Werth, z. B. den Werth 0 in den p Punkten $c_1, c_2, \ldots, c_p$ annimmt. Ist dieser Werth von ζ gerade 0, so ist ζ dadurch bis auf einen von s und z

*) l. c. §. 5, §. 8.

unabhängigen Factor bestimmt und verschwindet ausser in den Punkten c noch in p anderen Punkten, welche in Folge des *Abel*schen Theorems (Formel (1.) §. 1) mit den Punkten $z_1, z_2, \ldots, z_p$ zusammenfallen. Ist also die Function ζ gefunden, so erhält man die $z_1, z_2, \ldots, z_p$ auf algebraischem Wege.

Es ist nun nachzuweisen, dass diese Function ζ auch rational ausgedrückt werden kann durch die in den Punkten $x_i\ y_i$ stattfindenden Werthe von s und z: $s_{x_i}\ z_{x_i}, s_{y_i}\ z_{y_i}$.

Man kann nach *Riemann* (l. c. §. 5.) die Function ζ dadurch bilden, dass man in dem Ausdruck

$$\zeta = \alpha_1 t_{x_1} + \alpha_2 t_{x_2} + \cdots + \alpha_p t_{x_p} + \beta_1 t_{y_1} + \beta_2 t_{y_2} + \cdots + \beta_p t_{y_p} + \text{Const.},$$

worin die t wie oben Normalintegrale zweiter Gattung bedeuten, die Constanten $\alpha\ \beta$ so bestimmt, dass die Periodicitätsmoduln an den Querschnitten b_ν sämmtlich 0 werden.

Daraus erhält man ein System von p linearen homogenen Gleichungen für die $\alpha\ \beta$ als Unbekannte, deren Coefficienten nach §. 2 (5.) rationale Functionen der $s_{x_i}\ z_{x_i}, s_{y_i}\ z_{y_i}$ sind, so dass p von den Constanten $\alpha\ \beta$ als lineare homogene Functionen der übrigen bestimmt werden, mit Coefficienten, welche in Bezug auf $s_{x_i}\ z_{x_i}, s_{y_i}\ z_{y_i}$ rational sind. Ausserdem aber kommen nach §. 2 (7.) die $s_{x_i}\ z_{x_i}, s_{y_i}\ z_{y_i}$, da die additive Constante bis jetzt noch unbestimmt ist, in ζ auch nur rational vor. Ausser den $p+1$ bis jetzt noch übrig bleibenden willkürlichen Constanten enthält also ζ die $s_{x_i}\ z_{x_i}, s_{y_i}\ z_{y_i}$ nur rational. Die Verhältnisse der $p+1$ noch übrig bleibenden Constanten werden aber durch lineare Gleichungen bestimmt, die man daraus erhält, dass ζ in den p Punkten $c_1, c_2, \ldots, c_p$ verschwinden soll, wodurch also keine Irrationalität eingeschleppt werden kann. Demnach kann ζ rational durch $s, z; s_{x_i}, z_{x_i}; s_{y_i}, z_{y_i}$ ausgedrückt werden. Die Punkte c_i betrachten wir als numerisch gegeben; es ist übrigens auch ζ durch $s_{c_i}\ z_{c_i}$ rational ausdrückbar, wenn auch die c_i als veränderlich angesehen werden.

Nach Analogie der *Jacobi*schen Fassung des Umkehrproblems lässt sich dem Additionsproblem eine elegantere Form geben: Bedeutet σ irgend eine rationale Function von s und z (z. B. auch s oder z selbst), so wird diese in den Punkten $z_1, z_2, \ldots, z_p$ die Werthe $\sigma_{z_1}, \sigma_{z_2}, \ldots, \sigma_{z_p}$ annehmen. Es sollen die Coefficienten der algebraischen Gleichung:

$$(18.)\quad \psi(\sigma) = (\sigma - \sigma_{z_1})(\sigma - \sigma_{z_2}) \ldots (\sigma - \sigma_{z_p}) = \sigma^p + M_1\sigma^{p-1} + \cdots + M_{p-1}\sigma + M_p = 0,$$

durch die Punkte $x_i\ y_i$ ausgedrückt, gefunden werden.

Aus der Function ζ ergiebt sich die Function $\psi(\sigma)$ und zwar rational durch $z_{x_i} s_{x_i}$, $z_{y_i} s_{y_i}$ ausgedrückt:

Wird σ in μ Punkten unendlich von der ersten Ordnung, so nimmt es auch jeden beliebigen Werth in μ Punkten an, und es entsprechen jedem Werth von σ demnach μ Werthe von ζ, so dass ζ als eine μ-werthige Function von σ angesehen werden kann.

Bezeichnet man die einem und demselben Werthe von σ zukommenden Werthe von ζ mit $\zeta^{(1)}$, $\zeta^{(2)}$, ..., $\zeta^{(\mu)}$, so ist das Product:

$$\zeta^{(1)}\zeta^{(2)}\ldots\zeta^{(\mu)} = \chi(\sigma)$$

eine einwerthige und folglich rationale Function von σ, welche unendlich von der ersten Ordnung wird für $\sigma=\sigma_{x_1}$ $\sigma=\sigma_{x_2}\ldots\sigma=\sigma_{x_p}$, $\sigma=\sigma_{y_1}$ $\sigma=\sigma_{y_2}\ldots\sigma=\sigma_{y_p}$, und welche unendlich klein von der ersten Ordnung wird für $\sigma=\sigma_{c_1}$ $\sigma=\sigma_{c_2}\ldots$ $\sigma=\sigma_{c_p}$. Es ist daher

$$\frac{\chi(\sigma)(\sigma-\sigma_{x_1})(\sigma-\sigma_{x_2})\ldots(\sigma-\sigma_{x_p})(\sigma-\sigma_{y_1})(\sigma-\sigma_{y_2})\ldots(\sigma-\sigma_{y_p})}{(\sigma-\sigma_{c_1})(\sigma-\sigma_{c_2})\ldots(\sigma-\sigma_{c_p})}$$

eine ganze rationale Function von σ, welche nur für $\sigma=\sigma_{z_1}$ $\sigma=\sigma_{z_2}\ldots\sigma=\sigma_{z_p}$ verschwindet, und mithin bis auf einen von σ unabhängigen Factor mit der Function $\psi(\sigma)$ übereinstimmt. Die Operationen, die zur Bildung dieser Function vorgenommen sind, beruhen nur auf Division rationaler Functionen und können daher keine Irrationalität einführen.

Der Addition gegenüber steht die Subtraction, welche eine ganz ähnliche Behandlung gestattet, so dass eine kurze Andeutung genügen wird.

Die Aufgabe ist die, aus den als bekannt vorausgesetzten Punkten x_i, y_i die Punkte z_i' zu bestimmen, die der Bedingung genügen:

$$(19.)\qquad v_\varrho - w_\varrho = \int_{c_1}^{z_1'} du_\varrho + \int_{c_2}^{z_2'} du_\varrho + \cdots + \int_{c_p}^{z_p'} du_\varrho .$$

$$\varrho = 1, 2, \ldots p$$

Diese Punkte müssen in Folge der Formeln (9.), (15.) die Gleichungen erfüllen:

$$(20.)\quad 0 = \int_{c_1}^{z_1'} du_\varrho + \int_{c_2}^{z_2'} du_\varrho + \cdots + \int_{c_p}^{z_p'} du_\varrho + \int_{x_1}^{y_1} du_\varrho + \int_{x_2}^{y_2} du_\varrho + \cdots + \int_{x_p}^{y_p} du_\varrho .$$

$$\varrho = 1, 2, \ldots p$$

Man kann nun wie oben eine Function ζ' von s und z bestimmen, welche in den Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_p, c_1, c_2, \ldots, c_p$ unendlich von der ersten Ordnung. in $y_1, y_2, \ldots, y_p$ unendlich klein von der ersten Ordnung wird, welche dadurch

bis auf einen von s und z unabhängigen Factor bestimmt ist. Auch ζ' kann rational durch $s_{x_i}\, z_{x_i}$, $s_{y_i}\, z_{y_i}$ ausgedrückt werden, und diejenigen p Punkte, in welchen dieselbe ausser den Punkten y_i noch verschwindet, sind die gesuchten Punkte z_1', z_2', ..., z_p'.

Man kann ebenso wie oben eine algebraische Gleichung herstellen, deren Wurzeln die p Werthe einer rationalen Function von s und z in den p Punkten z_i' ergeben.

§. 5.

Lösung des Additionsproblems durch ϑ-Functionen.

Die oben mit $\psi(\sigma)$ bezeichnete Function, ebenso wie die Function ζ sind in Bezug auf die Punkte x_1, x_2, ..., x_p und y_1, y_2, ..., y_p, einzeln genommen, symmetrisch. Es muss daher möglich sein, diese beiden Functionen mit Hülfe von ϑ-Functionen durch die Grössen v_i w_i auszudrücken. Ein solcher Ausdruck, der die Grössen v_i und w_i gemischt enthält, lässt sich ohne Weiteres angeben. In Folge der Definition der Grössen k_h (§. 3 (12.)) verschwindet nämlich die Function:

$$\vartheta\left(\sum_1^p{}_h\left(\int_{\gamma_h}^{z,s} du_h + k_h\right)\right),$$

als Function von z, s betrachtet, in den Punkten c_1, c_2, ..., c_p; ebenso die beiden Functionen

$$\vartheta\left(\sum_1^p{}_h\left(\int_{\gamma_h}^{z,s} du_h - v_h + k_h\right)\right), \quad \vartheta\left(\sum_1^p{}_h\left(\int_{\gamma_h}^{z,s} du_h - w_h + k_h\right)\right)$$

respective in den Punkten x_1, x_2, ..., x_p und y_1, y_2, ..., y_p und endlich die Function:

$$\vartheta\left(\sum_1^p{}_h\left(\int_{\gamma_h}^{z,s} du_h - (v_h + w_h) + k_h\right)\right)$$

in den Punkten z_1, z_2, ..., z_p, und daraus ergiebt sich, wenn man von einem constanten, d. h. von s, z unabhängigen Factor absieht:

$$\zeta = \frac{\vartheta\left(\sum_1^p{}_h\left(\int_{\gamma_h}^{z,s} du_h - (v_h + w_h) + k_h\right)\right)\vartheta\left(\sum_1^p{}_h\left(\int_{\gamma_h}^{z,s} du_h + k_h\right)\right)}{\vartheta\left(\sum_1^p{}_h\left(\int_{\gamma_h}^{z,s} du_h - v_h + k_h\right)\right)\vartheta\left(\sum_1^p{}_h\left(\int_{\gamma_h}^{z,s} du_h - w_h + k_h\right)\right)}, \tag{21.}$$

da der Ausdruck auf der rechten Seite in Folge der Fundamentaleigenschaft der ϑ-Function an den Querschnitten keine Aenderung erleidet.

Es ist aber diese Formel nicht als eine Lösung des Additionsproblems zu betrachten, da eben darin noch die Argumente $v_h + w_h$ enthalten sind. Die sich zunächst bietende Aufgabe ist die, die Function ζ in der Weise auszudrücken, dass nur ϑ-Functionen vorkommen, die v_h allein und w_h allein enthalten. Einen ganz einfachen Ausdruck wird man dabei nicht erwarten dürfen, da schon die Function ζ die $x_1, x_2, \ldots, x_p, y_1, y_2, \ldots, y_p$ in einer Weise gemischt enthält, die eine einfache Separation nicht gestattet. Man kann aber, was aus der ursprünglichen Definition der Function ζ nicht unmittelbar ersichtlich ist, die Separation durch Auflösung eines Systems von p linearen Gleichungen bewerkstelligen, und so, wenn man will, ζ durch Determinanten darstellen. Zu dieser Darstellung der Function ζ führt die Bemerkung, dass dieselbe sich stets linear zusammensetzen lässt aus p ähnlichen Functionen, welche in denselben Punkten unendlich, aber in p beliebigen anderen Punkten Null werden. Bezeichnet man p solcher Functionen mit $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_p$, so erhält man die Function ζ dadurch, dass man die Verhältnisse der $p+1$ Constanten $a_0, a_1, \ldots, a_p$ so bestimmt, dass

$$(22.) \qquad \zeta = a_0 + a_1\zeta_1 + a_2\zeta_2 + \cdots + a_p\zeta_p$$

in den p Punkten $c_1, c_2, \ldots, c_p$ verschwindet. Solche Functionen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_p$ lassen sich aber leicht bilden durch ϑ-Functionen, die respective nur von den $v_1, v_2, \ldots, v_p$ oder $w_1, w_2, \ldots, w_p$ abhängen.

Setzt man nämlich:

$$(23.) \qquad \zeta_\varrho = \frac{\vartheta\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}\left(\int_{\gamma_h}^{z,s} du_h - v_h + g_h^{(\varrho)} + k_h\right)\right)\vartheta\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}\left(\int_{\gamma_h}^{z,s} du_h - w_h - g_h^{(\varrho)} + k_h\right)\right)}{\vartheta\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}\left(\int_{\gamma_h}^{z,s} du_h - v_h + k_h\right)\right)\vartheta\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}\left(\int_{\gamma_h}^{z,s} du_h - w_h + k_h\right)\right)},$$

so hat dieser Ausdruck, wenn die $g_1^{(\varrho)}, g_2^{(\varrho)}, \ldots, g_p^{(\varrho)}$ ganz beliebige Grössen bedeuten, alle von den Functionen ζ_ϱ verlangten Eigenschaften, da der Quotient auf der rechten Seite, wenn z, s irgend einen der Querschnitte überschreitet, keine Aenderung erleidet. Von den Werthen der Grössen $g_h^{(\varrho)}$ hängen die Punkte ab, in welchen die Function ζ_ϱ verschwindet, und man kann die Grössen $g_h^{(\varrho)}$ immer so bestimmen, dass ζ_ϱ in p beliebig gewählten Punkten verschwindet, so dass durch (23.) die allgemeinste Function ζ_ϱ dargestellt ist. Man hat

daher, um die p Functionen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_p$ zu erhalten, p verschiedene aber beliebige Grössensysteme $g_1^{(\varrho)}, g_2^{(\varrho)}, \ldots, g_p^{(\varrho)}$ zu nehmen, so dass nach dem oben Bemerkten die Function ζ rational durch solche ϑ-Functionen darstellbar ist.

Man kann z. B. die Grössen $g_h^{(\varrho)}$ nach dem Schema bestimmen:

$$\begin{matrix} \frac{\pi i}{2} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{\pi i}{2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{\pi i}{2} \end{matrix}.$$

Berücksichtigt man dann, dass die Function ζ um πi periodisch ist, und setzt zur Abkürzung:

$$(24.)\quad \begin{cases} \vartheta\left(\omega_1 + \frac{\pi i}{2}, \omega_2, \ldots, \omega_p\right) = \vartheta_1(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p), \\ \vartheta\left(\omega_1, \omega_2 + \frac{\pi i}{2}, \ldots, \omega_p\right) = \vartheta_2(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vartheta\left(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p + \frac{\pi i}{2}\right) = \vartheta_p(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p)\ ^*), \end{cases}$$

so erhält man für ζ_ϱ den Ausdruck:

$$(24.)\quad \zeta_\varrho = \frac{\vartheta_\varrho\left(\sum_1^p{}_h \left(\int_{\gamma_h}^{z,s} du_h - v_h + k_h\right)\right)\vartheta_\varrho\left(\sum_1^p{}_h \left(\int_{\gamma_h}^{z,s} du_h - w_h + k_h\right)\right)}{\vartheta\left(\sum_1^p{}_h \left(\int_{\gamma_h}^{z,s} du_h - v_h + k_h\right)\right)\vartheta\left(\sum_1^p{}_h \left(\int_{\gamma_h}^{z,s} du_h - w_h + k_h\right)\right)},$$

$$\varrho = 1, 2, \ldots p$$

und zur Bestimmung der Verhältnisse der $a_0, a_1, \ldots, a_p$ ergeben sich die Gleichungen:

$$(25.)\quad 0 = \sum_{i=0}^{i=p} a_i \vartheta_i\left(\sum_1^p{}_h \left(\int_{\gamma_h}^{c_\varrho} du_h - v_h + k_h\right)\right)\vartheta_i\left(\sum_1^p{}_h \left(\int_{\gamma_h}^{c_\varrho} du_h - w_h + k_h\right)\right),$$

$$\varrho = 1, 2, \ldots p$$

---

*) Diese Functionen $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_p$ sind specielle Fälle von den von ***Roch*** und ***Prym*** benutzten, mit Charakteristiken versehenen ϑ-Functionen. Man könnte ebenso gut auch p andere von diesen ϑ-Functionen benutzen. (***Roch,*** über die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung, Bd. 66 dieses Journals; ***Prym,*** Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche, Zürich 1866.)

wo ϑ an die Stelle von ϑ_0 zu setzen ist. Um wie im vorigen Paragraphen die ganze rationale Function p^{ten} Grades $\psi(\sigma)$ (§. 4. (18.)) zu bilden, deren Wurzeln die p Werthe $\sigma_{z_1}, \sigma_{z_2}, \ldots, \sigma_{z_p}$ der rationalen Function σ von s und z in den Punkten $z_1, z_2, \ldots, z_p$ ergeben, hat man sich des dort angegebenen Verfahrens zu bedienen, indem man die in §. 3 aufgestellte Formel für das Umkehrproblem zu Hülfe nimmt.

Nimmt die Function σ die Werthe

$$\begin{array}{llll}
\sigma_{x_1}, \sigma_{x_2}, \ldots, \sigma_{x_p} & \text{in den Punkten} & x_1, x_2, \ldots, x_p \\
\sigma_{y_1}, \sigma_{y_2}, \ldots, \sigma_{y_p} & - \; - \quad - & y_1, y_2, \ldots, y_p \\
\sigma_{z_1}, \sigma_{z_2}, \ldots, \sigma_{z_p} & - \; - \quad - & z_1, z_2, \ldots, z_p \\
\sigma_{c_1}, \sigma_{c_2}, \ldots, \sigma_{c_p} & - \; - \quad - & c_1, c_2, \ldots, c_p
\end{array}$$

an, einen beliebigen Werth σ in den Punkten $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu$ und den Werth ∞ in den Punkten $\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \ldots, \xi_p^{(0)}$, setzt man ferner zur Abkürzung:

$$\begin{aligned}
\psi^{(x)}(\sigma) &= (\sigma-\sigma_{x_1})(\sigma-\sigma_{x_2}) \ldots (\sigma-\sigma_{x_p}), \\
\psi^{(y)}(\sigma) &= (\sigma-\sigma_{y_1})(\sigma-\sigma_{y_2}) \ldots (\sigma-\sigma_{y_p}), \\
\psi^{(z)}(\sigma) &= (\sigma-\sigma_{z_1})(\sigma-\sigma_{z_2}) \ldots (\sigma-\sigma_{z_p}), \\
\psi^{(c)}(\sigma) &= (\sigma-\sigma_{c_1})(\sigma-\sigma_{c_2}) \ldots (\sigma-\sigma_{c_p}),
\end{aligned}$$

hat endlich die Function ζ in den Punkten $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu$ die Werthe $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots, \zeta^{(\mu)}$ und in den Punkten $\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \ldots, \xi_\mu^{(0)}$ die Werthe $\zeta_0^{(1)}, \zeta_0^{(2)}, \ldots, \zeta_0^{(\mu)}$, so ergiebt sich nach dem im vorigen Paragraphen auseinandergesetzten Verfahren die Formel

$$(26.) \qquad \frac{\psi^{(z)}(\sigma)}{\psi^{(c)}(\sigma)} = \frac{\zeta^{(1)}\zeta^{(2)}\ldots\zeta^{(\mu)}}{\zeta_0^{(1)}\zeta_0^{(2)}\ldots\zeta_0^{(\mu)}} \frac{\psi^{(x)}(\sigma)}{\psi^{(c)}(\sigma)} \cdot \frac{\psi^{(y)}(\sigma)}{\psi^{(c)}(\sigma)}.$$

Die beiden Quotienten $\frac{\psi^{(x)}(\sigma)}{\psi^{(c)}(\sigma)}$; $\frac{\psi^{(y)}(\sigma)}{\psi^{(c)}(\sigma)}$ sind aber durch die Formel (14.) §. 3 durch ϑ-Functionen ausgedrückt, und zwar genau mit denselben Argumenten, welche nach den Resultaten dieses Paragraphen in den ϑ-Functionen vorkommen, durch welche die Function ζ darstellbar ist.

Um aus der Formel (26.) die Coefficienten $M_1, M_2, \ldots, M_p$ der Function

$$\psi^{(z)}(\sigma) = \sigma^p + M_1\sigma^{p-1} + \cdots + M_{p-1}\sigma + M_p$$

zu finden, hat man nur nöthig, diese Gleichung aufzustellen für p verschiedene Werthe von σ, denen dann p Systeme von Punkten $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu$ entsprechen. Diese Coefficienten erhält man so rational ausgedrückt durch ϑ-Functionen, welche resp. nur von den Argumenten v_i oder w_i abhängig sind, diese Argumente vermehrt um gewisse Constanten.

Um in gleicher Weise mit Hülfe von ϑ-Functionen das Subtractionsproblem zu lösen, hat man nur durchweg $w_1, w_2, \ldots, w_p$ zu vertauschen mit $-w_1, -w_2, \ldots, -w_p$. Es ist dabei aber zu beachten, dass die auf diese Weise aus ζ hervorgehende Function ζ'' nicht identisch ist mit der im vorigen Paragraphen eingeführten Function ζ', wiewohl ihr Verschwinden dieselben Punkte $z_1', z_2', \ldots, z_p'$ ergiebt. Es wird nämlich die Function

$$\begin{aligned} \zeta' &= 0 \quad \text{für } y_1\ y_2 \ldots y_p \quad z_1'\ z_2' \ldots z_p' \\ &= \infty \quad \text{für } c_1\ c_2 \ldots c_p \quad x_1\ x_2 \ldots x_p, \\ \zeta'' &= 0 \quad \text{für } c_1\ c_2 \ldots c_p \quad z_1'\ z_2' \ldots z_p' \\ &= \infty \quad \text{für } y_1'\ y_2' \ldots y_p' \quad x_1\ x_2 \ldots x_p, \end{aligned}$$

wo die $y_1', y_2', \ldots, y_p'$ neue Punkte sind, welche mit den Punkten $y_1, y_2, \ldots, y_p$ verbunden sind durch die Bedingungen:

$$(27.)\quad \int_{c_1}^{y_1} du_\varrho + \int_{c_2}^{y_2} du_\varrho + \cdots + \int_{c_p}^{y_p} du_\varrho + \int_{c_1}^{y_1'} du_\varrho + \int_{c_2}^{y_2'} du_\varrho + \cdots + \int_{c_p}^{y_p'} du_\varrho = 0.$$
$$\varrho = 1, 2 \ldots p$$

Man ersieht hieraus, dass die Punkte $y_1', y_2', \ldots, y_p'$ mittelst der Function ζ' erhalten werden können, wenn man in ζ' die Punkte $x_1, x_2, \ldots x_p$ mit den $c_1, c_2, \ldots, c_p$ zusammenfallen lässt. Die daraus hervorgehende Function

$$\begin{aligned} \zeta_0 \quad \text{wird} &= 0 \quad \text{für} \quad y_1\ y_2 \ldots y_p\ y_1'\ y_2' \ldots y_p' \\ - &= \infty \quad - \quad c_1\ c_2 \ldots c_p\ c_1\ c_2 \ldots c_p \end{aligned}$$

und daraus folgt, dass die hier durch ϑ-Functionen gebildete Function ζ'' den algebraischen Ansdruck haben muss:

$$(28.)\quad \zeta'' = \frac{\zeta'}{\zeta_0'},$$

abgesehen von einem constanten Factor. Die Function ζ_0', welche dazu dient. aus dem als gelöst vorausgesetzten Umkehrproblem für gewisse Werthe der Argumente dasselbe zu lösen für die entgegengesetzten Werthe, gestatten einen sehr einfachen Ausdruck durch ϑ-Functionen:

$$\zeta_0' = \frac{\vartheta\left(\begin{matrix} p \\ h \\ 1 \end{matrix}\left(\int_{\gamma_h}^{z,s} du_h - w_h + k_h\right)\right)\vartheta\left(\begin{matrix} p \\ h \\ 1 \end{matrix}\left(\int_{\gamma_h}^{z,s} du_h + w_h + k_h\right)\right)}{\left(\vartheta\left(\begin{matrix} p \\ h \\ 1 \end{matrix}\left(\int_{\gamma_h}^{z,s} du_h + k_h\right)\right)\right)^2},$$

so dass durch die Formel (28.) auch ζ' ausgedrückt ist durch ϑ-Functionen, die nur von den Argumenten v_i oder nur von den Argumenten w_i abhängen.

§. 6.

Das Additionstheorem für die zweite und dritte Gattung.

Mit Hülfe derselben Function ζ, die in den beiden letzten Paragraphen auf algebraischem und auf transcendentem Wege bestimmt wurde, lässt sich eine Reihe von Additionsformeln für gewisse Summen von Integralen zweiter und dritter Gattung aufstellen, die vollständig analog sind den Formeln, welche *Jacobi* für die Addition der elliptischen Transcendenten zweiter und dritter Gattung angegeben hat.

Es werde wie oben (§. 3) gesetzt:

$$(29.)\qquad P_{(\varepsilon_1\varepsilon_2)}(v_1, v_2, \ldots, v_p) = \int_{c_1}^{x_1} d\Pi_{(\varepsilon_1\varepsilon_2)} + \int_{c_2}^{x_2} d\Pi_{(\varepsilon_1\varepsilon_2)} + \cdots + \int_{c_p}^{x_p} d\Pi_{(\varepsilon_1\varepsilon_2)}$$

und ebenso als Transcendente zweiter Gattung:

$$(30.)\qquad Z_{(\varepsilon)}(v_1, v_2, \ldots, v_p) = \int_{c_1}^{x_1} dt_{(\varepsilon)} + \int_{c_2}^{x_2} dt_{(\varepsilon)} + \cdots + \int_{c_p}^{x_p} dt_{(\varepsilon)}.$$

Es sind hierin P und Z anzusehen als Functionen von

$$(31.)\qquad v_\varrho = \int_{c_1}^{x_1} du_\varrho + \int_{c_2}^{x_2} du_\varrho + \cdots + \int_{c_p}^{x_p} du_\varrho.$$

$$\varrho = 1, 2 \ldots p$$

Werden die Integrationswege in (29.), (30.), (31.) gleich angenommen, so ist Z eine völlig eindeutige Function der $v_1, v_2, \ldots, v_p$, welche von der Unstetigkeitsstelle ε algebraisch abhängt, während P für ein bestimmtes Werthsystem von $v_1, v_2, \ldots, v_p$ nur bis auf ganze Vielfache von $2\pi i$ bestimmt ist.

Der Ausdruck für P durch ϑ-Functionen wurde oben schon aufgestellt:

$$(32.)\quad P_{(\varepsilon_1\varepsilon_2)}(v_1, v_2, \ldots, v_p) = \log \frac{\vartheta\left(\sum_1^p h \left(\int_{\gamma_h}^{\varepsilon_2} du_h - v_h + k_h\right)\right)\vartheta\left(\sum_1^p h \left(\int_{\gamma_h}^{\varepsilon_1} du_h + k_h\right)\right)}{\vartheta\left(\sum_1^p h \left(\int_{\gamma_h}^{\varepsilon_1} du_h - v_h + k_h\right)\right)\vartheta\left(\sum_1^p h \left(\int_{\gamma_h}^{\varepsilon_2} du_h + k_h\right)\right)},$$

und ebenso ergiebt sich aus den Formeln von *Riemann* (l. c. §. 25)

$$(33.)\quad Z_{(\varepsilon)}(v_1, v_2, \ldots, v_p) = -\frac{\partial\left[\log\vartheta\left(\sum_1^p h \left(\int_{\gamma_h}^{\varepsilon} du_h - v_h + k_h\right)\right) - \log\vartheta\left(\sum_1^p h \left(\int_{\gamma_h}^{\varepsilon} du_h + k_h\right)\right)\right]}{\partial z_\varepsilon}.$$

Man erhält $P_{(\varepsilon_1\varepsilon_2)}$ aus $Z_{(\varepsilon)}$ durch Integration in Bezug auf den Unstetigkeitswerth zwischen den Grenzen ε_1 ε_2 und umgekehrt $Z_{(\varepsilon)}$ aus $P_{(\varepsilon_1\varepsilon_2)}$ durch Differentiation nach dem Unstetigkeitspunkt ε_1.

Setzt man nun der Definition gemäss

$$Z_{(\varepsilon)}(v_1, v_2, \ldots, v_p) = \sum_{i=1}^{i=p} \int_{c_i}^{x_i} dt_{(\varepsilon)},$$

$$Z_{(\varepsilon)}(w_1, w_2, \ldots, w_p) = \sum_{i=1}^{i=p} \int_{c_i}^{y_i} dt_{(\varepsilon)},$$

$$Z_{(\varepsilon)}(v_1+w_1, v_2+w_2, \ldots, v_p+w_p) = \sum_{i=1}^{i=p} \int_{c_i}^{z_i} dt_c,$$

so ergiebt sich daraus:

$$(34.)\quad Z_{(\varepsilon)}\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}(v_h+w_h)\right) - Z_{(\varepsilon)}\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}(v_h)\right) - Z_{(\varepsilon)}\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}(w_h)\right) = -\sum_{i=1}^{i=p}\int_{z_i}^{x_i} dt_{(\varepsilon)} - \sum_{i=1}^{i=p}\int_{c_i}^{y_i} dt_{(\varepsilon)}.$$

Berücksichtigt man den Zusammenhang, welcher zwischen den Punkten x_i y_i z_i c_i besteht, dass nämlich die Function ζ in x_i y_i unendlich, in z_i c_i Null wird, so lässt sich auf die rechte Seite der Gleichung (34.) das *Abel*sche Theorem anwenden (§. 1 (2.)), und man gelangt so zu der Additionsformel für die Function Z:

$$(35.)\quad Z_{(\varepsilon)}\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}(v_h+w_h)\right) - Z_{(\varepsilon)}\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}(v_h)\right) - Z_{(\varepsilon)}\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}(w_h)\right) = -\frac{\partial \log \zeta_{(\varepsilon)}}{\partial z_{(\varepsilon)}}.$$

Man erhält ferner, entweder auf demselben Wege, oder auch aus der Formel (35.) durch Integration die Additionsformel für die Function $P_{(\varepsilon_1\varepsilon_2)}$:

$$(36.)\quad P_{(\varepsilon_1\varepsilon_2)}\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}(v_h+w_h)\right) - P_{(\varepsilon_1\varepsilon_2)}\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}(v_h)\right) - P_{(\varepsilon_1\varepsilon_2)}\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}(w_h)\right) = \log \zeta_{\varepsilon_2} - \log \zeta_{\varepsilon_1}.$$

Durch eine ganz entsprechende Betrachtung erhält man für die Subtraction die beiden folgenden Formeln, in denen ζ' dieselbe Function wie oben bedeutet:

$$(37.)\quad Z_{(\varepsilon)}\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}(v_h-w_h)\right) - Z_{(\varepsilon)}\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}(v_h)\right) + Z_{(\varepsilon)}\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}(w_h)\right) = -\frac{\partial \log \zeta'_{(\varepsilon)}}{\partial z_{(\varepsilon)}},$$

$$(38.)\quad P_{(\varepsilon_1\varepsilon_2)}\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}(v_h-w_h)\right) - P_{(\varepsilon_1\varepsilon_2)}\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}(v_h)\right) + P_{(\varepsilon_1\varepsilon_2)}\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}(w_h)\right) = \log \zeta'_{(\varepsilon_2)} - \log \zeta'_{(\varepsilon_1)}.$$

Setzt man in den beiden letzteren Formeln $v_1 = v_2 = \cdots = v_p = 0$, lässt man mit andern Worten die Punkte x_i in die c_i hineinfallen, so ergiebt sich:

$$(39.)\quad Z_{(\varepsilon)}(-w_1, -w_2, \ldots, -w_p) + Z_{(\varepsilon)}(w_1, w_2, \ldots, w_p) = -\frac{\partial \log \zeta'_{0(\varepsilon)}}{\partial z_\varepsilon},$$

$$(40.)\quad P_{(\varepsilon_1\varepsilon_2)}(-w_1, -w_2, \ldots, -w_p) + P_{(\varepsilon_1\varepsilon_2)}(w_1, w_2, \ldots, w_p) = \log \zeta'_{0(\varepsilon_2)} - \log \zeta'_{0(\varepsilon_1)},$$

wo ζ_0 dieselbe Function ist, die im vorigen Paragraphen eingeführt und dort durch ϑ-Functionen ausgedrückt wurde.

Die Verbindung der Formeln (35.), (36.), (37.), (38.) führt endlich noch zu folgenden Relationen:

$$(41.)\quad Z_{(\varepsilon)}\begin{pmatrix}p\\h\\1\end{pmatrix}(v_h+w_h)\Big)+Z_{(\varepsilon)}\begin{pmatrix}p\\h\\1\end{pmatrix}(v_h-w_h)\Big)-2Z_{(\varepsilon)}\begin{pmatrix}p\\h\\1\end{pmatrix}(v_h)\Big)=-\frac{\partial\log\zeta_{(\varepsilon)}\zeta'_{(\varepsilon)}}{\partial z_{(\varepsilon)}},$$

$$(42.)\quad Z_{(\varepsilon)}\begin{pmatrix}p\\h\\1\end{pmatrix}(v_h+w_h)\Big)-Z_{(\varepsilon)}\begin{pmatrix}p\\h\\1\end{pmatrix}(v_h-w_h)\Big)-2Z_{(\varepsilon)}\begin{pmatrix}p\\h\\1\end{pmatrix}(w_h)\Big)=-\frac{\partial\log\frac{\zeta_{(\varepsilon)}}{\zeta'_{(\varepsilon)}}}{\partial z_{(\varepsilon)}},$$

$$(43.)\quad \left\{\begin{aligned}&P_{(\varepsilon_1\varepsilon_2)}\begin{pmatrix}p\\h\\1\end{pmatrix}(v_h+w_h)\Big)+P_{(\varepsilon_1\varepsilon_2)}\begin{pmatrix}p\\h\\1\end{pmatrix}(v_h-w_h)\Big)-2P_{(\varepsilon_1\varepsilon_2)}\begin{pmatrix}p\\h\\1\end{pmatrix}(v_h)\Big)\\&\qquad=\log\zeta_{(\varepsilon_2)}\zeta'_{(\varepsilon_2)}-\log\zeta_{(\varepsilon_1)}\zeta'_{(\varepsilon_1)},\end{aligned}\right.$$

$$(44.)\quad \left\{\begin{aligned}&P_{(\varepsilon_1\varepsilon_2)}\begin{pmatrix}p\\h\\1\end{pmatrix}(v_h+w_h)\Big)-P_{(\varepsilon_1\varepsilon_2)}\begin{pmatrix}p\\h\\1\end{pmatrix}(v_h-w_h)\Big)-2P_{(\varepsilon_1\varepsilon_2)}\begin{pmatrix}p\\h\\1\end{pmatrix}(w_h)\Big)\\&\qquad=\log\frac{\zeta_{(\varepsilon_2)}}{\zeta'_{(\varepsilon_2)}}-\log\frac{\zeta_{(\varepsilon_1)}}{\zeta'_{(\varepsilon_1)}}.\end{aligned}\right.$$

Alle diese Additionsformeln, die sich auf die zweite und dritte Gattung beziehen, sind unabhängig von der Voraussetzung, dass die zu Grunde gelegten Integrale zweiter und dritter Gattung gerade die oben als Normalintegrale bezeichneten seien; nur die obigen Ausdrücke durch die ϑ-Functionen sind auf diese Voraussetzung beschränkt. Man erkennt in diesen Formeln leicht die Analogien zu den von *Jacobi* in den „Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum“ aufgestellten Additionsformeln für die elliptischen Integrale zweiter und dritter Gattung.

Heidelberg, im März 1869.

Untersuchungen über das Flächennetz zweiter Ordnung.

(Von Herrn *Rudolf Sturm* in Bromberg.)

Der Gleichartigkeit der Terminologie halber will ich von der in meinem Buche*): „Synthetische Untersuchungen über die Flächen dritter Ordnung“ (Leipzig, 1867) gebrauchten Bezeichnungsweise, bei der ich Flächennetz und Flächenbündel unterschied (Nr. 14 und Nr. 36), abgehen und unter Flächennetz dasselbe verstehen, wie unter Flächenbündel, um mich in Uebereinstimmung mit den Herren *Cremona* (Preliminari di una teoria geometrica delle superficie) und *Salmon* (Analytical Geometry of three dimensions) zu befinden, für das Gebilde hingegen von dreifach unendlicher Mächtigkeit, das ich in meinem Buche Flächennetz genannt, die *Cremona*sche Bezeichnung: Linearsystem dritter Gattung oder Linearsystem im engeren Sinne oder auch die von Herrn *Reye* in seiner Geometrie der Lage, Abtheilung II., eingeführte und, wie mir scheint, anschaulichere Bezeichnung: Flächengebüsche annehmen.

1. Es sei *das Flächennetz oder Flächenbündel zweiter Ordnung*, mit dem wir uns im Folgenden beschäftigen wollen, $N(F)$; die 8 *Grundpunkte, durch welche alle Flächen des Netzes gehen, und welche, so wie auch in Folge dessen das ganze Netz, durch drei nicht zu demselben Büschel gehörige Flächen desselben bestimmt sind*, seien mit $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, . . . $\mathfrak{P}_8$, allgemein mit $\mathfrak{P}_i$ bezeichnet. Es ist bekannt, dass sie paarweise imaginär sein können, aber darauf soll hier keine Rücksicht genommen werden; ferner sind sie nicht alle von einander unabhängige Punkte, sondern jeder ist durch die 7 übrigen schon bestimmt; *jede Fläche zweiter Ordnung, die durch 7 Grundpunkte geht, geht durch den achten und gehört zum Netze.* Also *geht durch je zwei beliebige Punkte x und y im Raume im Allgemeinen eine und nur eine Fläche des Netzes, $F(x, y)$.* Speciell: Eine beliebige Gerade wird in jedem ihrer Punkte stets von einer Fläche des Netzes berührt.

2. *Im Netze sind unzählig viele Büschel zweiter Ordnung enthalten; jeder beliebige Punkt x im Raume bestimmt ein solches Büschel durch alle Flächen*

*) Hinweisungen auf dasselbe sollen mit: „Fl. 3. O.“ geschehen. Im Allgemeinen verweise ich auf Nr. 14 bis 18.

$F(x)$ des Netzes, die durch x gehen; dieses Büschel heisse $B(x)$. Die Grundcurve (vierter Ordnung) desselben, welche natürlich durch die $8\mathfrak{P}_i$ und durch x geht, sei $R(x)$. Durch jeden Punkt im Raume geht nur eine derartige Grundcurve. Das Flächennetz giebt Veranlassung zu doppelt unendlich vielen solchen Grundcurven, deren Inbegriff wir das mit dem Flächennetze verbundene *Netz oder Bündel von Grundcurven vierter Ordnung* $N(R)$ nennen. Alle Grundcurven haben also die 8 Grundpunkte $\mathfrak{P}$ gemein, keine zwei noch einen Punkt.

3. *Je zwei Büschel $B(x)$ und $B(y)$ haben eine Fläche, $F(x, y)$, gemein, oder je zwei Grundcurven $R(x)$ und $R(y)$ des Netzes liegen auf derselben Fläche $F(x, y)$ des Netzes,* so dass diese auch als die Fläche angesehen werden kann, welche zum Büschel $B(x)$ oder $B(y)$ gehört und durch irgend einen, gleichviel welchen, Punkt von $R(y)$ oder $R(x)$ gelegt ist.

Ist x ein Punkt auf einer Fläche des Netzes, so liegt $R(x)$ ganz auf dieser Fläche, denn dieselbe gehört ja zum Büschel $B(x)$.

4. Wie alle Büschel des Netzes, so können auch alle Grundcurven durch je zwei Flächen erzeugt werden; es genügt, um sie alle zu erschöpfen, die sämmtlichen Flächen eines Büschels des Netzes mit sämmtlichen eines andern zusammenzustellen, da jedes weitere Büschel mit jedem dieser beiden Büschel eine Fläche gemein hat. *Alle Grundcurven, die auf einer Fläche F des Netzes liegen,* dieselbe erfüllen und auf ihr ein „Grundcurvenbüschel“ bilden, *werden in sie durch die Flächen jedes beliebigen Büschels des Netzes, zu dem F nicht gehört, eingeschnitten*; die durch eine Fläche F' eines Büschels $B(x)$ auf F erzeugte Grundcurve wird durch diejenige Fläche eines zweiten Büschels $B(y)$ eingeschnitten, welche dieses mit dem Büschel (F, F') gemein hat.

5. *Im Allgemeinen liegt nicht jede beliebige Gerade auf einer Fläche des Netzes;* denn diese wäre dann durch die 7 bestimmenden Grundpunkte des Netzes und 3 beliebige Punkte der Geraden determinirt; in Folge dessen *trifft auch nicht jede beliebige Gerade eine Grundcurve des Netzes doppelt,* weil sie sonst auf einer durch dieselbe gehenden Fläche liegen müsste. *Alle* aber *durch einen Grundpunkt $\mathfrak{P}_i$ gehenden Geraden liegen stets auf einer Fläche des Netzes. Ferner gehen durch jeden Punkt x des Raumes unendlich viele Geraden, welche auf einer Fläche des Netzes liegen. Dieselben erzeugen einen Kegel dritter Ordnung,* den Ort der Schnittcurven der Flächen des Büschels $B(x)$ mit ihren Berührungsebenen in x, die sich um die Tangente von $R(x)$ in x drehen. *Eine solche Gerade wird von unendlich vielen Grundcurven doppelt getroffen,* von denen nämlich, welche auf der die Gerade enthaltenden Fläche

liegen, *und diese Begegnungspunkte bilden eine Involution.* Bei den durch einen Grundpunkt gehenden Geraden fällt der eine Begegnungspunkt stets mit dem Grundpunkt zusammen. Für unendlich viele Punkte löst sich der obige Kegel dritter Ordnung in eine Ebene und einen Kegel zweiter Ordnung auf, wie wir später sehen werden.

6. *Welches ist der Ort der Grundcurven des Netzes, die eine beliebige Gerade G treffen? Liegt die Gerade auf einer Fläche des Netzes, so ist natürlich diese der Ort.* Wir haben also den andern Fall zu betrachten. Es seien p' und p'' zwei Punkte auf G, so ist die Grundcurve, welche G in p_x trifft, der Schnitt der Flächen der Büschel $B(p')$ und $B(p'')$, die durch p_x gehen. Dadurch werden diese beiden Büschel perspectivisch zur Punktreihe p_x, also unter einander projectivisch, erzeugen folglich eine *Fläche vierter Ordnung* T^4; diese ist der gesuchte Ort. Die gemeinschaftliche Fläche $F(p', p'')$ entspricht sich in den beiden Büscheln nicht, sondern ihr entspricht z. B. als Fläche des Büschels $B(p')$ die Fläche von $B(p'')$, welche die Gerade G in p'' berührt. Liegt freilich G, ohne durch einen Punkt $\mathfrak{P}_i$ zu gehen, auf einer Fläche des Netzes, so ist diese nothwendigerweise die den beiden Büscheln gemeinsame, zugleich aber auch die durch jeden Punkt p_x von G gelegte Fläche jedes der beiden Büschel, so dass durch die obige Beziehung immerfort dieselbe Fläche auf sich selber bezogen wird und daher auch das Erzeugniss ist. Geht G durch einen Grundpunkt $\mathfrak{P}_i$, so können wir zu erzeugenden Büscheln zwei beliebige aus dem Netze nehmen, zu denen die Fläche, auf der G sich befindet, nicht gehört, und die Beziehung in der obigen Weise herstellen. Die den beiden Büscheln angehörige Fläche entspricht sich selbst und participirt am Erzeugniss, ohne jedoch die Grundcurven, welche G treffen, zu enthalten, diese liegen auf dem andern Theil des Erzeugnisses, der Fläche des Netzes, welche die Gerade G enthält.

7. Gehen wir zum allgemeinen Falle zurück. Die Fläche $F(p', p'')$ ist die Fläche des Büschels $B(p')$, die durch jeden Punkt von $R(p'')$ gelegt gedacht werden kann, folglich berührt (Preliminari 91) die entsprechende Fläche des Büschels $B(p'')$, welche die Gerade G in p'' berührt, die Fläche vierter Ordnung T^4 längs der ganzen Curve $R(p'')$, ebenso wird diese von der die Gerade G in p' berührenden Fläche des Netzes längs $R(p')$ berührt. Da p' und p'' durch jeden andern Punkt von G ersetzt werden können, haben wir das Resultat:

Die Fläche T^4, erzeugt durch die Grundcurven des Netzes, welche einer

Geraden G begegnen, ist die Enveloppe der Flächen des Netzes, welche die Gerade G berühren; jede dieser Flächen berührt T^4 längs derjenigen Grundcurve, welche der Geraden G in deren Berührungspunkte mit jener Fläche begegnet; so dass diese Grundcurven die Charakteristiken auf der Enveloppe T^4 sind. In der That, wenn p, p', p'' drei unendlich nahe Punkte auf G sind, so sind $F(p, p')$ und $F(p', p'')$ zwei benachbarte der eingehüllten Flächen, welche sich ersichtlich in einer durch p' gehenden Grundcurve schneiden.

Durch jeden Punkt x im Raume gehen zwei eingehüllte Flächen, die beiden des Büschels $B(x)$, welche G berühren.

Die 8 Grundpunkte $\mathfrak{P}_i$ sind auf T^4 Doppelpunkte, da T^4 in jedem von den Berührungsebenen sämmtlicher eingehüllten Flächen berührt wird. (Preliminari 47.)

8. Sämmtliche Grundcurven des Netzes, die einer zweiten Geraden G_1 begegnen, erzeugen eine zweite Fläche vierter Ordnung T_1^4. Die Schnittcurve sechzehnter Ordnung von T^4 und T_1^4 muss, da jede der beiden Flächen durch Grundcurven erfüllt wird und durch jeden Punkt des Raums nur eine Grundcurve geht, in vier Grundcurven zerfallen; es sind die vier auf T^4, die von G_1, und die vier auf T_1^4, welche von G getroffen werden. *Vier Grundcurven* also *eines Netzes treffen zugleich zwei Gerade;* schneiden sich diese, so gehört die durch den Schnittpunkt gehende Grundcurve zu ihnen.

9. *Unendlich viele Flächen des Netzes berühren eine beliebige Ebene E; ihre Berührungspunkte bilden eine allgemeine Curve dritter Ordnung T^3, die Tripelcurve oder Hessesche Curve des Kegelschnittnetzes $N(K)$, welches durch das Flächennetz $N(F)$ in E eingeschnitten wird, oder auch die Durchdringungscurve der Ebene E mit ihrer cubischen Polfläche in Bezug auf das Netz* (Fl. 3. O. Nr. 18). *Ebenso berühren unendlich viele Grundcurven des Netzes die Ebene; deren Berührungspunkte bilden ebenfalls die Curve T^3,* da diese sowohl der Ort der Doppelpunkte (Mittelpunkte der Geradenpaare) des Netzes $N(K)$, als auch der Ort der Berührungspunkte von Kegelschnitten des Netzes ist. Denn alle durch einen Doppelpunkt gehenden Kegelschnitte des Netzes berühren sich in ihm, ausser dem zu ihrem Büschel gehörigen Geradenpaare, das den Doppelpunkt besitzt, und umgekehrt, alle sich in einem Punkte berührenden Kegelschnitte des Netzes bilden ein Büschel, in dem ein Kegelschnitt nicht mit den übrigen eine Berührung, sondern im gemeinschaftlichen Berührungspunkte einen Doppelpunkt hat. Eine Grundcurve des Netzes, welche die Ebene berührt, erzeugt auf ihr ein Kegelschnittbüschel mit zwei unendlich

nahen Grundpunkten, also zwei unendlich wenig verschiedenen Geradenpaaren. folglich ist sie der Durchschnitt zweier unendlich wenig verschiedenen, die Ebene tangirenden Flächen des Netzes (so wie auch eine die Ebene tangirende Fläche des Netzes durch zwei unendlich wenig verschiedene, die Ebene ebenfalls berührende Grundcurven desselben gelegt ist). Daraus geht hervor, dass *die eine Ebene E berührenden Grundcurven des Netzes die Enveloppe der die Ebene E berührenden Flächen desselben erzeugen und deren Charakteristiken sind.* Die einer beliebigen Geraden G zugehörige Fläche T^4 (Nr. 6) trifft T^3 zwölfmal, und da die einzige durch einen Punkt von T^3 gehende Grundcurve E dort tangirt, sobald sie aber G trifft, auf T^4 liegen muss, so erhellt, dass *die genannte Enveloppe eine Fläche zwölfter Ordnung* T^{12} *ist.* Für eine durch einen Punkt $\mathfrak{P}_i$ gehende Gerade G artet T^4 in die Fläche des Netzes aus, welche diese Gerade enthält; also wird G von sechs Grundcurven des Netzes, welche E berühren, aber von jeder zweimal getroffen, das eine Mal jedoch stets in $\mathfrak{P}_i$. Demnach *sind die 8 Grundpunkte* $\mathfrak{P}_i$ *auf der Fläche* T^{12} *sechsfache Punkte.*

Je drei der eingehüllten Flächen gehen durch jeden Punkt x des Raumes, da drei Flächen des Büschels $B(x)$ die Ebene E berühren.

Die Flächen T^{12} für zwei verschiedene Ebenen haben 36 Grundcurven gemein. *Es giebt* demnach *in einem Netze zweiter Ordnung 36 Grundcurven, welche zugleich zwei Ebenen berühren.*

10. Die Curve T^3 als Durchschnitt der Ebene E mit ihrer cubischen Polfläche in Bezug auf das Netz $N(F)$ ist der Ort derjenigen Punkte von E, deren conjugirte Pole in Bezug auf dieses Netz in die Ebene E fallen, und enthält auch zugleich diese Pole (Fl. 3. O. Nr. 18). Je zwei Punkte dieser Curve sind einander in Bezug auf $N(F)$ und demnach auch auf $N(K)$ zugeordnet *). Die Verbindungslinien dieser conjugirten Punkte umhüllen bekanntlich eine Curve dritter Klasse (und sechster Ordnung) K_3, die *Cayley*sche Curve des Netzes $N(K)$. Jede solche Verbindungsgerade ist in jedem der beiden conjugirten Punkte, die sie verbindet, die gemeinsame Tangente der dort sich berührenden Kegelschnitte des Netzes $N(K)$, denn sie ist die conjugirte Polare des Punktes in Bezug auf deren Büschel, also ist sie die Tangente der in dem Punkte berührenden Grundcurve. Folglich *hüllen die Tangenten der eine Ebene berührenden Grundcurven eines Netzes zweiter*

*) Man sehe für das Folgende Herrn *Schröter*s Bearbeitung von *Steiner*s Vorlesungen §. 62 oder Herrn *Cremona*s Introduzione Cap. III.

Ordnung in den Berührungspunkten eine allgemeine Curve dritter Klasse ein, die *Cayley*sche Curve des durch die Ebene aus dem Netze $N(F)$ ausgeschnittenen Kegelschnittnetzes; ***je zwei Grundcurven haben dieselbe Tangente,*** nämlich die beiden, welche in conjugirten Punkten von T^3 die Ebene berühren. Diese *Cayley*sche Curve wird aber auch von den Geraden aller Geradenpaare des Netzes $N(K)$ eingehüllt; das sind aber die in der Ebene liegenden Geraden, welche auf Flächen des Netzes $N(F)$ sich befinden. In der That liegt ersichtlich jede von einer Grundcurve berührte Gerade auf einer Fläche des Netzes aus dem Büschel, das zur Grundcurve gehört, und jede Gerade, die auf einer Fläche des Netzes liegt, wird, weil sie von unendlich vielen Grundcurven desselben zweimal — in den Punktenpaaren einer Involution — getroffen wird, von zweien unter ihnen berührt. *Es sind* also ***die auf den Flächen eines Netzes zweiter Ordnung befindlichen Geraden derartig im Raume vertheilt, dass die durch einen Punkt gehenden einen allgemeinen Kegel dritter Ordnung erzeugen, die in einer Ebene liegenden eine allgemeine Curve dritter Klasse einhüllen. Sie bilden folglich, was Plücker einen Complex dritter Ordnung und dritter Klasse genannt hat.***

11. Je drei Punkte auf T^3, in denen drei demselben Büschel angehörige Flächen berühren, also drei Punkte eines Tripels, liegen stets so, dass ihre drei conjugirten Pole auf einer Geraden sich befinden und mit jenen die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits sind, und umgekehrt: die conjugirten Pole von drei auf einer Geraden befindlichen Punkten der Curve T^3 bilden ein Tripel, sind also die Berührungspunkte von drei Flächen des Netzes $N(F)$ aus demselben Büschel.

Die Curve T^3 hat, da sie eine allgemeine cubische Curve ist, neun Wendepunkte (drei reelle auf gerader Linie, sechs imaginäre). In dem conjugirten Pole jedes derselben fallen drei unendlich nahe Punkte eines Tripels zusammen, so dass auch von dem Kegelschnittbüschel, dem die drei (unendlich wenig verschiedenen) Geradenpaare angehören, drei Grundpunkte in dem conjugirten Pole sich vereinigt haben, folglich osculirt dort eine Grundcurve des Netzes $N(R)$ die Ebene E. Da auch umgekehrt, wenn eine Grundcurve die Ebene E osculirt, der conjugirte Pol des Osculationspunktes ein Wendepunkt von T^3 sein muss, so ergiebt sich:

Neun Grundcurven eines Netzes zweiter Ordnung osculiren eine beliebige Ebene E. Die Osculationspunkte sind die Berührungspunkte der Hesseschen und der Cayleyschen Curve des durch E aus dem Netze ausgeschnittenen Kegelschnittnetzes, und die conjugirten Pole der Wendepunkte der Hesseschen Curve.

Die Tangente der Grundcurve im Osculationspunkte ist die gemeinschaftliche Tangente der beiden genannten Curven. Da die beiden Curven nur diese Tangenten gemein haben, weil sie sich neunmal berühren — die *Cayley*sche Curve ist 6. Ordnung — und die Tangente einer die Ebene berührenden Grundcurve die *Cayley*sche Curve tangirt, so folgt, dass *jede Grundcurve des Netzes, welche die Hessesche Curve einer Ebene berührt, diese Ebene osculirt.*

Von den neun eine Ebene osculirenden Grundcurven sind nur drei reell; die Flächen des Netzes, die in ihren Osculationspunkten die Ebene berühren, gehören einem Büschel an, weil die diesen Punkten conjugirten Pole die drei reellen Wendepunkte von T^3 sind, die bekanntlich auf einer Geraden liegen. *Ueberhaupt befinden sich die in den neun Osculationspunkten tangirenden Flächen des Netzes zwölfmal zu je dreien in einem Büschel.*

12. *Die Polarhyperboloide einer Geraden L in Bezug auf unendlich viele Büschel des Netzes arten in Kegel aus* (Fl. 3. Ord. Nr. 15); *deren Spitzen liegen auf einer cubischen Raumcurve N^3, der cubischen Polcurve der Geraden L in Bezug auf das Netz, welche zugleich die conjugirten Pole der Punkte von L in Bezug auf dasselbe enthält.* Wir suchen *den Ort der Curven R_x, in Bezug auf deren Büschel dies geschieht.* Jede Fläche des Netzes gehört zu zwei derartigen Büscheln oder auf jeder Fläche liegen zwei derartige Curven. Wenn R' und R'' zwei von ihnen sind, so enthält jede Fläche durch R' noch eine Curve R_x, und durch R'' und R_x geht auch eine Fläche. Also werden die beiden Büschel mit den Grundcurven R' und R'' projectivisch auf einander bezogen und erzeugen, da die Fläche (R', R'') sich nicht entspricht, eine *Fläche vierter Ordnung E^4*, welche der gesuchte Ort ist und zugleich die Enveloppe derjenigen Flächen aus $N(F)$, in Bezug auf welche die reciproke Polare von L die Curve N^3 tangirt. In jedem Büschel des Netzes befinden sich zwei solche Flächen, da das Polarhyperboloid von L in Bezug auf dasselbe durch N^3 geht und diese Curve daher zwei Geraden der Schaar der reciproken Polaren berührt. Also *sind die Punkte $\mathfrak{P}_i$*, als gemeinsame Punkte aller eingehüllten Flächen, deren je zwei durch jeden Punkt gehen, *Doppelpunkte auf E^4.*

T^4 und T^{12} haben mit E^4 vier resp. zwölf Grundcurven gemein, also *befinden sich unter den Grundcurven des Netzes, welche die beliebige Gerade G treffen, vier und unter denen, welche die beliebige Ebene E berühren, zwölf, in Bezug auf deren Büschel das Polarhyperboloid einer Geraden L ein Kegel wird oder die conjugirten Polaren aller Punkte auf L in denselben Punkt zusammenlaufen.*

13. ***Die Reihe der Flächen des Netzes, welche die Geraden G berühren, werde mit $S(F)$, die derjenigen, welche von der Ebene E tangirt werden, mit $\Sigma(F)$ bezeichnet.*** Die Polarebenen eines Punktes P in Bezug auf die Flächen von $S(F)$, wie von $\Sigma(F)$ hüllen Kegel ein, deren Spitzen in den conjugirten Pol Π von P in Bezug auf das Netz fallen. Alle diejenigen Flächen des Netzes, in Bezug auf welche die Polarebenen von P durch eine Gerade Πp gehen, bilden ein Büschel, in Bezug auf welches Πp die conjugirte Polare von P ist; es kann durch die beiden Flächen constituirt gedacht werden, welche die Gerade Pp (wo p ein beliebiger Punkt auf Πp ist) in P und in p berühren. Dieses Büschel liefert zwei Flächen zur Reihe $S(F)$ und drei zur Reihe $\Sigma(F)$. Folglich *umhüllen die Polarebenen eines Punktes P in Bezug auf die Flächen von $S(F)$ einen Kegel zweiter Ordnung (Grades), den Polarkegel von P in Bezug auf $S(F)$, und die in Bezug auf die Flächen von $\Sigma(F)$ einen Kegel dritter Ordnung, den Polarkegel von P in Bezug auf $\Sigma(F)$. Die Kanten jenes sind die conjugirten Polaren von P in Bezug auf diejenigen Büschel des Netzes, deren Grundcurven G treffen, und die Kanten dieses die in Bezug auf diejenigen Büschel, deren Grundcurven E tangiren.*

14. Die Tangentenebenen der Polarkegel aller Punkte des Raumes in Bezug auf $S(F)$ oder auf $\Sigma(F)$ bilden ersichtlich projectivische krumme Büschel, die auch der Reihe $S(F)$ resp. $\Sigma(F)$ projectivisch sind, und in denen sich die Polarebenen von P in Bezug auf dieselbe Fläche von $S(F)$ oder $\Sigma(F)$ entsprechen. Beschränken wir uns auf die Punkte einer Geraden L, so schneiden sich die entsprechenden Tangentenebenen aller Kegel in einer Geraden, der reciproken Polaren der Geraden L in Bezug auf diejenige Fläche von $S(F)$ resp. $\Sigma(F)$, der die entsprechenden Ebenen als Polarebenen zugehören. Diese Gerade ist schon durch zwei Ebenen bestimmt, daher können wir das Erzeugniss aller dieser Geraden als den Ort der Durchschnittsgeraden der entsprechenden Ebenen zweier projectivischen Tangentenebenenbüschel auffassen, die sich um die Polarkegel K' und K'' zweier beliebigen Punkte P' und P'' auf L legen. Also wenn wir augenblicklich bloss die Reihe $S(F)$ in Betracht nehmen, ergiebt sich das Resultat: *Die reciproken Polaren einer Geraden in Bezug auf die Flächen eines Netzes zweiter Ordnung, die eine andere Gerade berühren, erzeugen eine Geradenfläche vierten Grades*) P^4, die Polarfläche*

*) „Grad“ statt „Ordnung,“ um die nach dem *Cayley*schen Satze bestehende Uebereinstimmung zwischen Ordnung und Klasse damit auszudrücken.

der Geraden L in Bezug auf die Reihe S(F). Sie enthält ersichtlich die Pole aller durch L gehenden Ebenen und wird von den Polarebenen aller auf L befindlichen Punkte in Bezug auf die Flächen von $S(F)$ tangirt. Jede Erzeugende berührt die Polarkegel aller Punkte von P, da sie in einer Berührungsebene jedes liegt; also *ist P^4 zugleich die Enveloppe der Polarkegel aller Punkte auf L* und wird von jedem *in seiner Durchschnittscurve (vierter Ordnung) mit dem Nachbarpolarkegel berührt.*

15. Der Schnitt von P^4 mit einer Ebene muss die reciproke Curve der von Herrn *Schröter* untersuchten Curve (Bd. 54 pag. 38 dieses Journals) sein, folglich drei Doppelpunkte haben, also *P^4 muss eine Doppelcurve dritter Ordnung besitzen. Das ist die cubische Polcurve N^3 der Geraden L in Bezug auf das Netz;* wie diese von den reciproken Polaren der Geraden L in Bezug auf alle Flächen des Netzes überhaupt, so *wird sie auch insbesondere von den Generatricen der Fläche P^4 doppelt getroffen,* also liegt sie auf P^4. Durch jeden ihrer Punkte gehen zwei dieser Generatricen. Denn die von ihm ausgehenden reciproken Polaren — Secanten von N^3 — sind Polaren in Bezug auf die Flächen eines gewissen Büschels des Netzes, und der von ihnen erzeugte Kegel zweiter Ordnung vertritt das Polarhyperboloid der Geraden L in Bezug auf dieses Büschel; dasselbe hat aber zwei Flächen mit der Reihe $S(F)$ gemein. Oder auch, indem wir die Curve N^3 in ihrer andern Bedeutung als den Ort der conjugirten Pole der Punkte auf L in Bezug auf das Netz, also als den Ort der Spitzen der Polarkegel dieser Punkte in Bezug auf $S(F)$ auffassen, erkennen wir, weil die Tangentenebenen aller dieser Polarkegel, die durch die Spitze eines von ihnen gehen, einander entsprechen müssen und sich unter einander und mit den beiden entsprechenden Tangentenebenen dieses Kegels selbst in zwei durch dessen Spitze gehenden Geraden schneiden, dass durch jeden Punkt auf N^3 zwei Generatricen der Fläche P^4 gehen.

Unter den Grundcurven, welche der Geraden G begegnen, befinden sich (Nr. 12) vier, in Bezug auf deren Büschel sich die conjugirten Polaren — Kanten der Polarkegel — aller Punkte von L in einem Punkte, der auf N^3 liegt, treffen; also *haben die Polarkegel aller Punkte von L in Bezug auf $S(F)$ vier auf N^3 liegende Punkte gemein.*

16. Wo L die Fläche P^4 trifft, trifft sie ihre reciproke Polare in Bezug auf eine Fläche von $S(F)$, folglich berührt sie diese Fläche dort. Demnach *berühren vier Flächen eines Netzes zweiter Ordnung* (oder vier Flächen zweiter Ordnung, die durch sieben beliebige Punkte gehen) *zugleich zwei Geraden.*

Oder: ***Die Flächen zweiter Ordnung, die durch sechs Punkte gehen und zwei Geraden berühren, bilden ein System vom Index vier, d. h. durch jeden weiteren Punkt gehen vier solche Flächen. Jede der beiden Geraden wird in jedem ihrer Punkte von zwei Flächen des Systems berührt,*** da die Flächen zweiter Ordnung, die durch sechs Punkte gehen und eine Gerade in einem bestimmten Punkte berühren, ein Büschel bilden, von dem zwei Flächen die andere Gerade tangiren.

17. Es sei E eine beliebige Ebene, und die Gerade L liege in ihr, so müssen wir die Pole von E in Bezug auf die Flächen von $S(F)$ sowohl auf der cubischen Polfläche von E in Bezug auf das Netz, als auch auf der der Geraden L zugehörigen Polarfläche P^4 in Bezug auf die Reihe $S(F)$ suchen. Beide enthalten die cubische Polcurve N^3 der Geraden L in Bezug auf das Netz, und zwar die Polfläche als einfache, die Polarfläche als doppelte Curve; mithin haben sie noch eine Raumcurve sechster Ordnung Π^6 gemein, welche zugleich das Erzeugniss der projectivischen Berührungsebenenbüschel der drei Polarkegel von drei beliebigen nicht in gerader Linie liegenden Punkten der Ebene E ist. Diese Curve sechster Ordnung Π^6 ist der Ort der Pole der Ebene E in Bezug auf die Reihe $S(F)$. Also: ***Die Pole einer Ebene in Bezug auf die Flächen eines Netzes zweiter Ordnung, welche eine Gerade berühren, erzeugen eine Raumcurve sechster Ordnung, welche den zweiten Schnitt einer cubischen Fläche und einer Fläche vierter Ordnung neben einer auf der letztern Fläche doppelten cubischen Raumcurve bildet.*** Die reciproke Polare von L in Bezug auf jede einzelne Fläche F_x der Reihe $S(F)$ trifft die Polfläche dreimal und zwar, da sie auf P^4 liegt, auf N^3 und auf Π^6. Jene trifft sie zweimal (Nr. 15), also diese einmal, und der Punkt, in dem sie trifft, ist der Pol von E in Bezug auf die Fläche F_x.

18. Die Curve Π^6 begegnet der Ebene E sechsmal; also berühren sechs Flächen der Reihe $S(F)$ diese Ebene. Folglich ***giebt es unter den Flächen eines Netzes zweiter Ordnung oder unter den Flächen zweiter Ordnung, die durch sieben beliebige Punkte gehen, jederzeit sechs, welche eine Gerade und eine Ebene berühren.*** Demnach ***ist das System von Flächen zweiter Ordnung, welche durch sechs Punkte gehen und eine Gerade und eine Ebene tangiren, vom Index 6,*** d. h. durch jeden siebenten Punkt gehen sechs derartige Flächen. Leicht zu erkennen ist, dass ***die Gerade in jedem ihrer Punkte von drei Flächen dieses Systems berührt wird.*** Hingegen wird nicht die Ebene in jedem ihrer Punkte von einer Fläche desselben tangirt, sondern nur in

einfach unendlich vielen Punkten, welche also eine Curve erzeugen, deren genauere Untersuchung uns jedoch hier zu weit ab führen würde.

19. Die entsprechenden Resultate über die Reihe $\Sigma(F)$ der Flächen des Netzes, welche eine Ebene E berühren, sind folgende:

Die reciproken Polaren einer Geraden L in Bezug auf die Flächen von $\Sigma(F)$ erzeugen eine Geradenfläche sechsten Grades P^6, die Polarfläche von L in Bezug auf $\Sigma(F)$, welche wiederum von den (cubischen) Polarkegeln der Punkte auf L in Bezug auf $\Sigma(F)$ eingehüllt wird und ebenfalls sowohl der Ort der Pole aller durch L gelegten Ebenen, als auch die Enveloppe der Polarebenen aller auf L befindlichen Punkte in Bezug auf die Flächen von $\Sigma(F)$ ist. *Die cubische Polcurve N^3 der Geraden L ist auf dieser Fläche dreifache Curve*, d. h. sie sendet von jedem ihrer Punkte drei reciproke Polaren aus. Wie von den reciproken Polaren von L in Bezug auf sämmtliche Flächen des Netzes, so wird sie auch von den auf P^6 liegenden in Bezug auf die Flächen von $\Sigma(F)$ zweimal getroffen. *Die cubischen Polarkegel der Punkte von L, welche die Fläche P^6 einhüllen, haben zwölf Punkte gemein, welche auf N^3 sich befinden* und die Spitzen von Kegeln sind, in welche die Polarhyperboloide der Geraden L in Bezug auf zwölf gewisse Büschel des Netzes ausgeartet sind, deren Grundcurven die Ebene E berühren (Nr. 12).

Da L die Fläche P^6 sechsmal trifft, so berühren sechs Flächen von $\Sigma(F)$ die Gerade L, womit wir abermals das in Nr. 17 gewonnene Resultat erhalten.

20. Liegt die Gerade L in der Ebene E selbst, so geht die Polarfläche P^6 durch die Curve T^3, auf der sich die Berührungspunkte der Flächen von $\Sigma(F)$ mit E befinden, weil dann E für jede dieser Flächen eine der von L ausgehenden Tangentenebenen ist und im Berührungspunkte von der reciproken Polaren von L in Bezug auf die Fläche getroffen werden muss. Der fernere Schnitt von P^6 mit E besteht aus drei Generatricen selbst, den reciproken Polaren von L in Bezug auf diejenigen drei Flächen, die in den Punkten (L, T^3) tangiren.

21. Wenn E_1 eine zweite Ebene ist, in die wir die Gerade L_1 hineinlegen wollen, so werden ihre Pole in Bezug auf die Flächen von $\Sigma(F)$ wiederum sowohl auf der Polfläche von E_1, als auch auf der Polarfläche der Geraden L_1 in Bezug auf $\Sigma(F)$ zu finden sein; beide haben ausser der cubischen Polcurve N_1^3, die auf der ersteren eine einfache, auf der andern eine dreifache Curve ist, noch eine Curve neunter Ordnung Π_1^9 gemein, und das ist die Polcurve der

Ebene E_1 in Bezug auf die Flächen von $\Sigma(F)$. Also: *Die Pole einer Ebene in Bezug auf die Flächen eines Netzes zweiter Ordnung, welche eine andere Ebene berühren, bilden eine Raumcurve neunter Ordnung, welche als der zweite Durchschnitt einer cubischen Fläche und einer Fläche sechster Ordnung sich ergiebt, die mit einander schon eine auf der letzteren dreifache cubische Raumcurve gemein haben.*

Diese Raumcurve neunter Ordnung ist ersichtlich auch das Erzeugniss der drei projectivischen Tangentenebenenbüschel, welche die cubischen Polarkegel dreier nicht auf einer Geraden befindlichen Punkte von E_1 in Bezug auf $\Sigma(F)$ einhüllen.

22. E_1 schneidet Π_1^9 in neun Punkten; folglich giebt es neun Flächen aus $\Sigma(F)$, welche E_1 berühren. *Neun Flächen* also *eines Netzes zweiter Ordnung oder neun Flächen zweiter Ordnung, welche durch sieben beliebige Punkte gehen, berühren zugleich zwei Ebenen, und das System der Flächen zweiter Ordnung, welche durch sechs Punkte gehen und zwei Ebenen berühren, hat den Index 9.* Auch hier wird die Berührung nur in einfach unendlich vielen Punkten jeder der beiden Ebenen stattfinden, welche ersichtlich Curven gleicher Ordnung erzeugen.

Drei von den Punkten, in denen Π_1^9 die Ebene E trifft, sind die Pole von E_1 in Bezug auf diejenigen drei Flächen aus $\Sigma(F)$, welche auf der Geraden (E, E_1) die Ebene E berühren; die sechs andern werden wir in der nächsten Nummer nachweisen.

23. *Im Netze $N(F)$ giebt es einfach unendlich viele Kegel; ihre Spitzen erzeugen eine Raumcurve sechster Ordnung (und sechzehnten Ranges) S^6, welche auf den cubischen Polflächen aller Ebenen in Bezug auf das Netz liegt und mit der cubischen Polcurve jeder Geraden die Grundcurve des Büschels der Polflächen aller durch die Gerade gehenden Ebenen bildet* (Fl. 3. Ord. Nr. 16), *demnach von allen diesen Polcurven in je acht Punkten getroffen wird* (Fl. 3. Ord. Nr. 64). *Die sechs Kegel, deren Spitzen die Schnittpunkte einer Ebene E mit S^6 sind, gehören mit zur Reihe $\Sigma(F)$*; wirklich von der Ebene E berührte Kegel wird es im Allgemeinen nicht geben. Die sechs Punkte liegen auf T^3 und sind Schnittpunkte von E mit der Polcurve jeder Ebene in Bezug auf $\Sigma(F)$, also die sechs oben erwähnten.

Es bezeichne nun *s stets einen Punkt auf S^6, S den Kegel des Netzes, der seine Spitze in s hat und zum Büschel $B(s)$ gehört, dessen Grundcurve $R(s)$ genannt werde.* Da die Spitze des Kegels S, der durch $R(s)$ geht, auch auf

dieser Curve liegt, so *hat $R(s)$ in s einen Doppelpunkt und alle Flächen des Büschels $B(s)$ werden in s von derselben Ebene $\mathfrak{S}$ berührt,* welche durch die beiden Tangenten in s an $R(s)$ — Kanten von S — gelegt ist; freilich S selbst wird im Allgemeinen nicht von $\mathfrak{S}$ berührt, sondern nur in einem Geradenpaare, den beiden Tangenten von $R(s)$, durchschnitten, was aber auch bei den übrigen Flächen des Büschels geschieht; so dass alle Geraden der Ebene $\mathfrak{S}$, die durch s gehen, auf Flächen des Netzes liegen; ebenso liegen auch alle Kanten von S auf einer Fläche des Netzes, immer derselben, S. Also *löst sich der in Nr. 5. besprochene Kegel dritter Ordnung für die Punkte s in eine Ebene $\mathfrak{S}$ und einen Kegel zweiter Ordnung S auf.*

24. Hat eine Grundcurve unseres Netzes einen Doppelpunkt, so fällt in diesen die Spitze eines Kegels ihres Büschels, weil jede durch ihn gelegte Ebene die Curve ausser im Doppelpunkte nur noch zweimal trifft, also die Curve vom Doppelpunkte durch einen Kegel zweiter Ordnung projicirt wird; demnach muss der Doppelpunkt ein Punkt auf S^6 sein. *Es enthalten* folglich *nur diejenigen Grundcurven Doppelpunkte, welche die Curve S^6 treffen, und umgekehrt, jede Grundcurve, die dies thut, enthält im Begegnungspunkte einen Doppelpunkt;* wie durch jeden Punkt überhaupt, so geht auch durch jeden Punkt auf S^6 nur eine Grundcurve. Da jede Fläche des Netzes von der Curve S^6 zwölfmal, ein Kegel ausser in der Spitze nur zehnmal getroffen wird, so *wird eine allgemeine Fläche zweiter Ordnung von zwölf Flächen eines Büschels berührt, ein Kegel von zehn,* denn sobald zwei Flächen sich in einer Curve mit einem Doppelpunkte schneiden, in den nicht ein etwaiger Doppelpunkt einer von ihnen fällt, so berühren sie sich in demselben. Hat eine Grundcurve zwei Doppelpunkte, so löst sie sich bekanntlich in eine Gerade und eine dieselbe zweimal — in den beiden Doppelpunkten — treffende cubische Raumcurve auf. Da nun die Grundpunkte des Netzes sich stets als Schnittpunkte einer Grundcurve mit einer nicht zu ihrem Büschel gehörigen Fläche des Netzes ergeben, welche nothwendig bei einer in obiger Weise zerfallenden Grundcurve die Gerade zweimal, die cubische Raumcurve sechsmal trifft, so giebt es ausser den $\frac{8.7}{1.2} = \frac{8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6} = 28$ Zusammensetzungen von einer zwei Grundpunkte verbindenden Geraden und einer durch die sechs übrigen Grundpunkte gelegten cubischen Raumcurve keine weitere derartig zerfallende Grundcurve im Netze. Wir wollen diese 28 aus zwei Theilen bestehenden Grundcurven mit (L_{ik}, C_{ik}) bezeichnen, wo L_{ik} *die die beiden Grundpunkte* $\mathfrak{P}_i$,

$\mathfrak{P}_k$ *verbindende Gerade,* C_{ik} *die durch die sechs übrigen gelegte cubische Raumcurve ist.* Die beiden Bestandtheile treffen sich in den Doppelpunkten der Grundcurve, auf S^6, und *diese beiden Doppelpunkte mögen* s_{ik}, s'_{ik} *heissen*, so dass $R(s_{ik}) = R(s'_{ik}) = (L_{ik}, C_{ik})$.

Aus dem Vorhergehenden stellen wir über die Lage der acht Grundpunkte zu einander und zur Kegelspitzencurve folgenden Satz zusammen:

Jede Gerade, welche zwei der acht Grundpunkte eines Netzes zweiter Ordnung, und die cubische Raumcurve, welche die sechs übrigen verbindet, treffen einander in zwei Punkten und in denselben Punkten auch die Kegelspitzencurve des Netzes.

25. Die Ebene $\mathfrak{S}$ schneidet, wie gesagt (Nr. 23), aus den Flächen des Büschels $B(s)$ lauter Geradenpaare, mit dem Mittelpunkte s, auch aus dem Kegel S; diese bilden als Kegelschnittbüschel eine Involution, also giebt es zwei Geradenpaare, deren Gerade sich vereinigen. *Das Büschel* $B(s)$ *enthält ausser dem Kegel* S, *dessen Spitze auf der Grundcurve liegt, nur noch zwei Kegel; in jenen haben sich zwei von den vier Kegeln, die im Allgemeinen in einem Büschel vorkommen, vereinigt. Die Curven* $R(s)$ *sind also Durchschnittscurven zweier unendlich wenig verschiedenen Kegel des Netzes.* Folglich *ist der Ort der Curven des Netzes, welche einen Doppelpunkt (oder zwei) besitzen, identisch mit der Enveloppe der sämmtlichen Kegel des Netzes, und jene Curven sind deren Charakteristiken.* Da der Ort aller Grundcurven, welche einer Geraden begegnen, vierter Ordnung ist und die Curve S^6 in 24 Punkten trifft, so begegnen 24 Grundcurven mit einem Doppelpunkte der Geraden und zwar, da diese im Allgemeinen auf keiner Fläche des Netzes liegt, je einmal; ist dies aber der Fall, so ist diese Fläche (zweiter Ordnung) des Netzes der Ort der die Gerade treffenden Grundcurven selbst, welche aber alle zweimal treffen, demnach hat die Gerade, weil jene Fläche S^6 in 12 Punkten trifft, auch mit dem Orte der Grundcurven des Netzes, die mit einem Doppelpunkte behaftet sind, 24 Punkte gemein, also *ist dieser Ort vierundzwanzigster Ordnung;* er heisse D^{24}. Ausserdem erhalten wir noch als Ergebniss der vorhergehenden Betrachtung folgenden Satz:

24 Grundcurven des Netzes mit einem Doppelpunkte treffen eine beliebige Gerade, die nicht auf einer Fläche des Netzes liegt, und zwar je einmal; eine Gerade, die auf einer Fläche des Netzes liegt, wird von 12 solchen Grundcurven, deren jede jedoch in zwei Punkten trifft, geschnitten. Diese Schnittpunktenpaare sind alle verschieden und bilden 12 Paare einer Involution, sobald die Gerade durch keinen Grundpunkt geht; sie haben aber alle einen

Punkt gemein, sobald sie durch einen Grundpunkt geht, nämlich diesen selbst (Nr. 6). Daraus schliessen wir, dass jede durch den Grundpunkt gehende Gerade die Fläche D^{24} ausser in demselben noch in 12 Punkten trifft, also *jeder Grundpunkt ein zwölffacher Punkt auf* D^{24} *ist.*

26. Wir können uns diese Fläche durch die Grundcurven erzeugt denken, die den auf einander folgenden Punkten von S^6 angehören; daraus folgt, dass *die 28 Grundcurven* (L_{ik}, C_{ik}) *Doppelcurven auf* D^{24} *sind*, weil sie sich stets bei s_{ik} und bei s'_{ik} ergeben.

27. Ferner da D^{24} mit T^{12} (Nr. 9) $\frac{24.12}{4} = 72$ Grundcurven gemein hat, so *berühren 72 Grundcurven mit einem Doppelpunkte eine Ebene E;* und weil ebenso den Flächen D^{24} und E^4 (Nr. 12) 24 Grundcurven gemein sind, so *degeneriren die Polarhyperboloide einer Geraden L in Bezug auf 24 Büschel, deren Grundcurven mit einem Doppelpunkte behaftet sind, zu einem Kegel.*

28. Trifft eine Gerade G die Kegelspitzencurve in einem Punkte s, so ist dieser ein Doppelpunkt der Fläche T^4. Wir nehmen zuerst an, die Gerade liege nicht just in der Ebene $\mathfrak{S}$ oder auf dem Kegel S; so müssen wir diesen Kegel für diejenige Fläche des Netzes gelten lassen, welche G in s berührt, genauer zwei zusammengefallene Punkte dort mit G gemein hat. Er berührt also T^4 längs der Grundcurve $R(s)$, denn diese Curve trifft G in s. Dasselbe ist bei jeder zweiten Geraden G_1, die durch s geht, der Fall; also berühren sich die beiden Flächen T^4 und T_1^4 längs der Curve $R(s)$, haben demnach ausserdem nur noch zwei Grundcurven gemein. Indem wir nebenbei das Resultat notiren, dass *zwei Gerade, die sich auf der Kegelspitzencurve schneiden, ausser von der durch ihren Schnittpunkt gehenden Grundcurve, die also für zwei zählt, nur noch von zwei Grundcurven des Netzes zugleich getroffen werden*, schliessen wir, dass die Fläche T^4, welche einer durch s gehenden Geraden zugehört, jede andere durch s gehende Gerade ausser in s nur noch zweimal schneidet, s also ein Doppelpunkt dieser Fläche ist.

Da nun S^6 durch diesen Doppelpunkt geht, so trifft sie D^{24} ausserdem nur noch in 22 Punkten, d. h. ausser der Curve $R(s)$ treffen nur 22 Grundcurven mit einem Doppelpunkte die Gerade G, welche durch s geht; woraus folgt, dass s ein Doppelpunkt, also *die ganze Kegelspitzencurve eine Doppelcurve auf* D^{24} *ist.*

29. Doch sehen wir auch noch zu, wie sich die Sache für eine Gerade G, die in der Ebene $\mathfrak{S}$ durch s geht oder auf dem Kegel S liegt, gestaltet.

Die Fläche des Netzes, auf welcher die in der Ebene $\mathfrak{S}$ befindliche Gerade liegt, ersetzt die Fläche T^4; sie trifft S^6 zwölfmal, einmal davon in s. Durch jeden dieser 12 Punkte geht eine mit einem Doppelpunkte behaftete Grundcurve, welche die Gerade G zweimal trifft. die durch s gehende trifft G in s, ihrem Doppelpunkte, in zwei zusammengefallenen Punkten, so dass auch diese Gerade G mit D^{24} ausser s nur noch 22 Punkte gemein hat. Liegt G auf S, so vertritt dieser Kegel selbst die Fläche T^4; er begegnet der Curve S^6 ausser in seinem Doppelpunkte s noch in 10 Punkten, durch jeden geht eine Grundcurve mit einem Doppelpunkte, welche G zweimal trifft, was 20 Schnittpunkte von G und D^{24} ergiebt; die durch den Doppelpunkt s gehende Grundcurve $R(s)$ ist natürlich doppelt zu rechnen, also auch jeder ihrer beiden Begegnungspunkte mit G. Der eine ist s selbst, der ja schon als Doppelpunkt auf D^{24} nachgewiesen. Der zweite Schnittpunkt von G mit $R(s)$ ist ein Berührungspunkt dieser Geraden mit D^{24}; in der That, wir wissen ja, dass S der Fläche D^{24} umschrieben und die Berührungscurve die Durchschnittscurve mit dem nächsten Kegel, also $R(s)$ ist. Doch ist dies ein besonders hervorzuhebendes Resultat.

Jede Kante eines der Kegel, welche die Fläche D^{24} umhüllen, berührt diese Fläche dort, wo sie die durch die Spitze des Kegels gehende Grundcurve zum zweiten Male trifft, und in demselben Punkte wird D^{24} auch von der längs jener Kante den Kegel berührenden Ebene tangirt.

30. *Zwei Kanten auf jedem Kegel* verdienen eine besondere Auszeichnung, *die Schnittlinien $\mathfrak{f}'$ und $\mathfrak{f}''$ desselben mit der Ebene $\mathfrak{S}$ oder die Tangenten an die Grundcurve $R(s)$ in s;* bei ihnen liegt der zweite Schnittpunkt mit $R(s)$ neben s selbst; sie *haben* also *mit D^{24} den Doppelpunkt und zwei unendlich nahe Punkte gemein.*

Betrachten wir *die beiden Ebenen $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}''$, welche den Kegel S längs der Geraden $\mathfrak{f}'$ und $\mathfrak{f}''$ berühren.* Sei G eine z. B. in $\mathfrak{T}'$ durch s gehende Gerade. Da die Spitze s des Kegels S auf $R(s)$, der Schnittcurve mit dem Nachbarkegel S_1, liegt, so befindet sie sich auf diesem, offenbar unendlich nahe an dessen Spitze; die Geraden $\mathfrak{f}'$ und $\mathfrak{f}''$ berühren $R(s)$ in s, also auch den Kegel S_1, und dessen Tangentenebenen $\mathfrak{T}_1'$ und $\mathfrak{T}_1''$, welche durch $\mathfrak{f}'$ und $\mathfrak{f}''$ gehen, werden wenig von den Ebenen $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}''$ verschieden sein, so dass, wenn wir G in $\mathfrak{T}_1'$ annehmen statt in $\mathfrak{T}'$, diese Gerade den Kegel S_1 in s berührt, also auch noch die nächste Curve $R(s)$, welche auf diesem Kegel durch dessen andern Nachbar verzeichnet wird, trifft. Die Gerade G, die wir

nun wieder zur Grenze zurückkehrend in $\mathfrak{T}'$ selbst annehmen, trifft also die Fläche D^{24}, auf der alle Curven $R(s)$ liegen, ausser in dem Doppelpunkte s noch in einem unendlich nahen Punkt (einem Punkte der Grundcurve, die durch den Nachbarpunkt von s auf S^6 geht); dies thun alle durch s auf $\mathfrak{T}'$ oder $\mathfrak{T}''$ gelegten Geraden. Also *ersetzen diese beiden Ebenen $\mathfrak{T}'$ und $\mathfrak{T}''$ den Kegel, der sich an D^{24} im Doppelpunkte s dreipunktig anschmiegt*, wie dies ja bei allen Doppelpunkten der Fall ist, die nicht vereinzelt auf einer Fläche liegen, sondern einer Doppelcurve angehören (*Cremona*s Preliminari 18, Anm.); *die Punkte der Curve S^6 sind biplanare Doppelpunkte auf D^{24}.* Sie werden an 24 Stellen, wie wir später zeigen werden, uniplanar.

31. Wir haben noch 28 Doppelcurven auf der Fläche D^{24} gefunden, nämlich *die Curven (L_{ik}, C_{ik}) mit zwei Doppelpunkten s_{ik} und s'_{ik}, bei welchen auch die beiden andern Kegel in einen sich vereinigen, der die Spitze auf der Curve im zweiten Doppelpunkte hat. Die beiden Kegel* also, *die nur durch eine solche Curve gehen, seien S_{ik} und S'_{ik} mit den Spitzen s_{ik} und s'_{ik}. Die Fläche T^{24} wird ersichtlich längs der Geraden L_{ik} von den beiden Ebenen $\mathfrak{T}_{ik}$ und $\mathfrak{T}'_{ik}$ berührt, welche längs dieser den beiden Kegeln gemeinsamen Kante die Kegel tangiren; hingegen in jedem Punkte c auf C_{ik} von den beiden Ebenen T_{ik} und T'_{ik}, welche dort die beiden Kegel berühren und sich von Punkt zu Punkt ändern, während dies bei L_{ik} nicht geschieht.* Von diesen Ebenen ist es klar, dass sie die dreipunktig berührenden Geraden enthalten, denn jede beliebige Gerade G z. B. in $\mathfrak{T}_{ik}$ und jede durch c gehende in T_{ik} berührt den Kegel S_{ik} in (L_{ik}, G) oder in c und trifft demnach die Fläche D^{24} ausser in diesem Doppelpunkte noch in einem Punkte der Nachbarcurve $R(s)$ der Curve (L_{ik}, C_{ik}).

32. *Die Punkte s_{ik}, s'_{ik} sind dreifache Punkte auf D^{24}.* Es sei G eine durch s_{ik} gehende Gerade; die ihr zugehörige Fläche T^4 hat, wie schon bewiesen, s_{ik} zum Doppelpunkte, sie enthält die ganze Curve (L_{ik}, C_{ik}), folglich wird sie von S^6 ausser in ihrem Doppelpunkte s_{ik} und in dem Punkte s'_{ik}, welcher doch wie jener nur die Curve (C_{ik}, L_{ik}) liefert, in 21 Punkten getroffen, welche 21 mit einem Doppelpunkte behaftete Grundcurven, die der G begegnen, und demnach 21 Schnittpunkte von G mit D^{24} ausser s_{ik} liefern, also concentriren sich in s_{ik} drei Schnittpunkte. *Der Punkt s_{ik} ist ein triplanarer Punkt; die drei Ebenen, welche die vierpunktig berührenden Geraden enthalten, sind die beiden Ebenen $\mathfrak{T}_{ik}$, T_{ik}, welche den Kegel S_{ik} längs der Kante L_{ik} und längs der Tangente an C_{ik} in s_{ik}* (den beiden Geraden $\mathfrak{f}'$ und $\mathfrak{f}''$ für den Punkt s_{ik})

berühren und die Ebene T'_{ik}, welche den Kegel S'_{ik} in s_{ik} berührt und welche zugleich die Ebene $\mathfrak{T}'_{ik}$ ist, die ihn längs L_{ik} tangirt. Als Punkt von S^6 kommen ihm die Ebenen $\mathfrak{T}_{ik}$, T_{ik} zu, als Punkt von C_{ik} die Ebenen T_{ik}, T'_{ik} und als Punkt von L_{ik} die Ebenen $\mathfrak{T}_{ik}$, $\mathfrak{T}'_{ik} = T'_{ik}$.

33. *Der Kegel der 13punktig berührenden Geraden, die durch jeden der zwölffachen Punkte $\mathfrak{P}_i$ gehen, wird durch die Tangenten sämmtlicher mit einem Doppelpunkte versehenen Grundcurven in dem ihnen allen gemeinsamen Punkte $\mathfrak{P}_i$ erzeugt.* Eine beliebige Ebene $\mathfrak{E}$, welche durch $\mathfrak{P}_i$ geht, wird in diesem Punkte von einer Fläche F' des Netzes berührt, welche nothwendig alle die Ebene berührenden Grundcurven enthält und von ihnen erfüllt wird; da diese mit S^6 12 Punkte oder mit D^{24} 12 Grundcurven gemein hat, so tangiren 12 Curven $R(s)$ die Ebene $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{P}_i$, folglich *liegen 12 Kanten des obigen Kegels auf jeder Ebene, die durch $\mathfrak{P}_i$ geht.* Dieser Kegel wird eingehüllt von denjenigen Tangentenebenen der Kegel des Netzes, die längs der durch $\mathfrak{P}_i$ gehenden Kanten dieselben berühren. Denn bei einer solchen Ebene T ist ihr Kegel die obige Fläche F'. Er trifft S^6 ausser in seiner Spitze s in 10 Punkten, die ausser der Geraden, welche in $\mathfrak{P}_i$ die durch s gehende Grundcurve tangirt, noch 10 Gerade in T liefern, welche in $\mathfrak{P}_i$ eine Grundcurve mit einem Doppelpunkte berühren; so dass die die Curve $R(s)$ berührende zwei derartige Geraden vertritt und demnach die Berührungskante des Kegels zwölfter Ordnung mit der Ebene T ist. *Dieser Kegel ist vierter Klasse;* denn durch jede Gerade, welche vom Punkte $\mathfrak{P}_i$ ausgeht, gehen vier Ebenen, die je einen Kegel des Netzes in $\mathfrak{P}_i$ berühren, weil dies nur die Tangentenebenen in $\mathfrak{P}_i$ an die vier Kegel des Büschels sein können, dessen Grundcurve jene Gerade in $\mathfrak{P}_i$ berührt.

34. *Auf diesem Kegel C_4^{12} liegen die 7 Geraden L_{ik}, welche durch $\mathfrak{P}_i$ gehen, und die Tangenten in $\mathfrak{P}_i$ an die 21 den Punkt $\mathfrak{P}_i$ enthaltenden cubischen Curven C_{ik} als Doppelkanten, in denen die je zwei der 56 Ebenen T_{ik}, T'_{ik}, $\mathfrak{T}_{ik}$, $\mathfrak{T}'_{ik}$, welche diesen Geraden L_{ik} und Curven C_{ik} im Punkte $\mathfrak{P}_i$ zugehören, die beiden Berührungsebenen sind. Der Kegel C_4^{12} hat ausser den 28 Doppelkanten noch 24 Rückkehrkanten.* Jede gewöhnliche Kante berührt eine Curve $R(s)$, welche der Kegelspitzencurve S^6 nur einmal begegnet, jede Doppelkante eine Curve (L_{ik}, C_{ik}), welche der S^6 in zwei getrennten Punkten s_{ik}, s'_{ik} begegnet; jede Rückkehrkante muss also eine Curve $R(s)$ berühren, welche mit der Curve S^6 zwei unendlich nahe Punkte gemein hat, folglich sie tangirt. Dann geben nämlich zwei auf einander folgende Punkte von S^6 dieselbe Curve

$R(s)$, also dieselbe Kante des Kegels C_4^{12}. *Es giebt* folglich *24 Grundcurven des Netzes, welche die Kegelspitzencurve berühren;* was auf ihnen dieser Berührungspunkt für ein Punkt ist, soll bald erörtert werden.

Wenn aber eine Grundcurve die Curve S^6 berührt, so thut dies auch jede der Flächen ihres Büschels. Da je zwei Büschel eines Netzes eine Fläche gemein haben, so berühren 24 Flächen jedes Büschels des Netzes die Kegelspitzencurve; die vier Kegel desselben haben auch mit S^6 zwei zusammengefallene Punkte gemein. So ergeben sich die 28 Flächen jedes Büschels unseres Netzes, die mit der Kegelspitzencurve desselben, einer Curve sechster Ordnung, welche mit einer cubischen Raumcurve den vollen Schnitt zweier cubischen Flächen bildet, zwei unendlich nahe oder zusammengefallene Punkte gemein haben*).

35. Wir wollen *die Fläche* untersuchen, welche *von den Ebenen* $\mathfrak{S}$ *eingehüllt wird.* Jede Fläche des Netzes wird in den Punkten, wo sie S^6 trifft, von Ebenen $\mathfrak{S}$ berührt, wofern nicht die Fläche ein Kegel und der Punkt die Spitze ist. Alle Flächen des Büschels, das durch einen Punkt s geht, ergeben dieselbe Ebene $\mathfrak{S}$. Wir können uns also auf die Flächen eines beliebigen Büschels beschränken. Die Berührungspunkte der von einem beliebigen Punkte P an diese gelegten Tangentenebenen bilden eine Fläche dritter Ordnung (Fl. 3. O. Nr. 9), die Pampolare des Punktes P in Bezug auf das Büschel, welche auch die Scheitel der vier Kegel des Büschels enthält und ausser diesen vier Punkten mit S^6 noch 14 Punkte gemein hat. Die diesen Punkten zugehörigen Ebenen $\mathfrak{S}$ gehen durch P, also *umhüllen die Ebenen* $\mathfrak{S}$ *eine abwickelbare Fläche vierzehnter Klasse* $\mathfrak{S}_{14}$.

Jede Ebene $\mathfrak{S}$ berührt im Allgemeinen zwei Kegel, so wie alle Flächen des Büschels $B(s)$ mit Ausnahme des Kegels S selbst. Folglich da D^{24} von sämmtlichen Kegeln des Netzes eingehüllt wird, also deren Tangentenebenen die ihrigen sind, so *ist* $\mathfrak{S}_{14}$ *der Fläche* D^{24} *doppelt umschrieben;* die den Punkten s_{ik}, s_{lk} zugehörigen Ebenen $\mathfrak{S}$, gebildet durch die Gerade L_{ik} und die Tangente

---

*) Dieses Resultat ergiebt sich aus den Preliminari Nr. 115, wenn man noch berücksichtigt, dass jeder Begegnungspunkt der Partialcurven, in die sich die Totaldurchschnittscurve zweier Flächen n_1^{ter} und n_2^{ter} Ordnung zerspaltet, die Anzahl der Flächen eines Büschels n_3^{ter} Ordnung, die diese Durchschnittscurve berühren (oder allgemeiner mit ihr zwei unendlich nahe oder auch wirklich zusammengefallene Punkte gemein haben), um 2 vermindert. Nach dem citirten Satze des Herrn *Cremona* wird die Grundcurve eines Büschels zweiter Ordnung von 16, die Grundcurve eines cubischen von 54 Flächen eines Büschels zweiter Ordnung berührt. Eine Gerade wird von 2, also eine cubische Raumcurve von $16-2-2.2=10$, folglich eine Curve wie S^6 von $54-10-2.8=28$ Flächen eines Büschels zweiter Ordnung berührt.

an C_{ik} in s_{ik} resp. s'_{ik}, berühren nur einen Kegel S'_{ik} resp. S_{ik}, in deren jeden sich ja zwei Kegel des Büschels durch (L_{ik}, C_{ik}) vereinigt haben, also *56mal, in den Punkten* s_{ik}, s'_{ik}, *durchkreuzen sich die beiden Aeste der Berührungscurve von* $\mathfrak{S}_{14}$ *und* D^{24}.

36. *Im Allgemeinen haben die Polarebenen eines Punktes P in Bezug auf alle Flächen des Netzes nur einen Punkt Π gemein, den conjugirten Pol von P; die Polarebenen aber der Punkte s der Kegelspitzencurve haben eine Gerade gemein,* Σ, *die conjugirte Polare von s in Bezug auf das Netz. Der Punkt s hat in Bezug auf alle Flächen eines Büschels* $B_x(S)$, *an dem der Kegel S participirt, dieselbe Polarebene* $\mathfrak{S}_x$, *welche durch die drei andern Kegelspitzen des Büschels geht und also eine Seitenfläche des dem Büschel conjugirten Poltetraeders ist. Diese Ebene dreht sich für alle derartigen Büschel um* Σ; *für alle übrigen Büschel ist* Σ *die conjugirte Polare von s* (Fl. 3. O. Nr. 16). $\mathfrak{S}$ *ist die gemeinsame Polarebene von s in Bezug auf die Flächen von* $B(s)$, *also geht* $\mathfrak{S}$ *durch* Σ.

Welches ist die von den Σ *erzeugte Fläche?* Alle Punkte einer Geraden Σ haben ersichtlich ihren conjugirten Pol in s; also da die cubische Polcurve einer beliebigen Geraden L mit S^6 8 Punkte gemein hat (Nr. 23), trifft L 8 Geraden Σ. Demnach *erzeugen die Geraden* Σ *eine Fläche achten Grades* Σ^8. Die Ebenen $\mathfrak{S}_x$ sind Tangentenebenen dieser Fläche. Mithin *wird die Fläche* Σ^8 *eingehüllt durch die Seitenflächen der den sämmtlichen Büscheln des Netzes conjugirten Poltetraeder. Durch jede Gerade im Raume gehen* folglich 8 *Ebenen, von deren 6 Schnittpunkten mit* S^6 *drei Spitzen von Kegeln desselben Büschels sind,* die 3 andern aber auf einer Geraden Σ liegen, wie sich bald zeigen wird.

37. Es war oben die Pampolare eines Punktes in Bezug auf ein Büschel erwähnt worden; man wird leicht erkennen, dass *diejenige eines Punktes s in Bezug auf ein Büschel* $B_x(S)$ *sich in den Kegel S und die Ebene* $\mathfrak{S}_x$ *auflöst,* von welchen beiden Bestandtheilen nur $\mathfrak{S}_x$ als Ort der Berührungspunkte der von s an die Flächen des Büschels B_x — nach Ausschluss von S selbst — gelegten Tangentenebenen in Betracht kommt. Andrerseits erinnern wir, dass der in Nr. 5 betrachtete Kegel dritter Ordnung derjenige specielle Fall der Pampolare ist, wo der Punkt s auf der Grundcurve des Büschels liegt. Da $\mathfrak{S}$ eine specielle Lage von $\mathfrak{S}_x$ ist, ersehen wir, dass der frühere specielle Fall des Ausartens dieses Kegels dritter Ordnung sich dem obigen unterordnet.

38. *Während die Polarhyperboloide einer beliebigen Geraden nur für einfach unendlich viele Büschel eines Netzes in Kegel ausarten* (Fl. 3. O. Nr. 15), *ge-*

schieht dies bei einer Geraden Σ für alle Büschel, und sämmtliche Kegel haben die Spitze im zugehörigen Punkte s. Greifen wir zwei beliebige Büschel heraus, so haben die beiden Kegel die reciproke Polare von Σ in Bezug auf die zu beiden Büscheln gehörige Fläche gemein, also ausserdem noch drei Gerade, die natürlich durch s gehen. Diese drei Geraden sind die conjugirten Polaren von 3 Punkten auf Σ in Bezug auf beide Büschel, also in Bezug auf das Netz und demnach auch auf alle übrigen Büschel desselben. Mithin giebt es auf der Geraden Σ 3 Punkte s_1 s_2 s_3, welche eine conjugirte Polare haben, also auf S^6 liegen, und durch s gehen 3 Gerade Σ: Σ_1 Σ_2 Σ_3, welche jenen 3 Punkten zugehören. *Die Kegelspitzencurve S^6 liegt* folglich *auf der Fläche Σ^8 als dreifache Curve und wird von jeder Generatrix dreimal getroffen. Die 3 auf Σ liegenden Punkte s_1 s_2 s_3 und die 3 durch s, welches Σ zugehört, gehenden Geraden Σ_1 Σ_2 Σ_3 gehören sich resp. zu. Die 3 Geraden Σ_1 Σ_2 Σ_3 sind den zu Kegeln degenerirten Polarhyperboloiden der Geraden Σ in Bezug auf alle Büschel des Netzes gemein und ersetzen die gewöhnliche cubische Polcurve dieser Geraden. Der dreifache Punkt s dieser Abart ist der conjugirte Pol für alle Punkte von Σ, den 3 besondern Punkten s_1 s_2 s_3 sind resp. die sämmtlichen Punkte von Σ_1 Σ_2 Σ_3 conjugirt.*

Es leuchtet bald ein, dass wenn 2 Gerade Σ sich schneiden, die Polarebenen ihres Schnittpunktes durch die beiden zugehörigen Punkte s, also durch eine Gerade gehen, der Schnittpunkt mithin auf S^6 liegen muss; folglich hat Σ^8 keine andere vielfache Curve als S^6.

39. Die Ebene $(\Sigma_1 \Sigma_2)$ ist eine Ebene $\mathfrak{S}_x$ für s_1 wie für s_2, also gemeinschaftliche Polarebene von s_1 für ein gewisses Büschel $B_x(S_1)$, ebenso von s_2 für ein gewisses Büschel $B_x(S_2)$; diese Büschel sind nicht unter einander, d. h. mit dem Büschel $(S_1 S_2)$ identisch; denn s_1 hat zwar für alle Flächen dieses Büschels dieselbe Polarebene, ebenso s_2, aber jene ist von dieser verschieden. Folglich hat die Ebene $(\Sigma_1 \Sigma_2)$ für die den beiden Büscheln gemeinsame Fläche zwei Pole s_1 und s_2, woraus hervorgeht, dass diese Fläche ein Kegel ist, dessen Spitze auf $\Sigma = s_1 s_2$ liegt, folglich in den Punkt s_3 fällt. Sie muss aber auch in der Polarebene $(\Sigma_1 \Sigma_2)$ von Σ in Bezug auf den Kegel liegen.

Also *hat jede der 3 Geraden Σ, die sich in einem Punkte s der Curve S^6 treffen, ihren conjugirten Pol in der Ebene der beiden andern*, und ist derselbe der sechste Schnittpunkt dieser Ebene mit S^6 neben den 5 auf den beiden Geraden Σ.

40. Da jede Ebene $\mathfrak{S}_x$, speciell $\mathfrak{S}$ durch eine Gerade Σ geht, so liegen 3 von ihren Schnittpunkten mit S^6 auf derselben. (Man sehe Nr. 36). *Die 6 Schnittpunkte einer Ebene $\mathfrak{S}$ mit S^6 sind* also *der Punkt s, dem sie entspringt, die 3 Punkte s auf dessen conjugirter Polare Σ und die Spitzen der beiden Kegel, welche $\mathfrak{S}$ berührt oder die in $B(s)$ ausser S vorkommen.*

Ferner ist ersichtlich, dass *die Fläche $\mathfrak{S}_{14}$ der Fläche Σ^8 umschrieben ist.*

Mit der cubischen Polfläche einer Ebene $\mathfrak{E}$ hat die Fläche Σ^8 ihre dreifache Curve S^6 und die conjugirten Polaren der 6 Punkte s in $\mathfrak{E}$ gemein; nothwendigerweise muss auch jede Erzeugende von Σ^8, die durch einen den beiden Flächen ausserhalb S^6 gemeinsamen Punkt geht, ganz auf der cubischen Polfläche liegen, da sie ihr in 4 Punkten begegnet.

41. Sind s und s_1 zwei Punkte auf S^6, Σ und Σ_1 ihre conjugirten Polaren, so geht die Polarebene von s in Bezug auf das Büschel (S, S_1) durch s_1 und Σ, die von s_1 durch s und Σ_1. Beide Ebenen haben die Gerade gemein, auf der die Spitzen der beiden andern Kegel des Büschels liegen.

Also *wenn s und s_1 zwei Punkte der Kegelspitzencurve S^6 und Σ und Σ_1 ihre conjugirten Polaren sind, so treffen sich die Ebenen $(s\Sigma_1)$ und $(s_1\Sigma)$ in einer Secante von S^6, welche die beiden andern Kegelspitzen im Büschel (S, S_1) verbindet.*

Legt man durch die conjugirte Polare eines Punktes s auf S^6 eine Ebene, so trifft diese die Curve S^6 in 3 Punkten, die mit s die 4 Kegelspitzen eines Büschels sind. Verbindet man 2 derselben mit s durch eine Ebene, so trifft diese S^6 in den 3 Punkten s auf der conjugirten Polare des dritten.

Es seien s' und s'' die beiden andern Kegelspitzen im Büschel $B(s)$, also die weitern Schnittpunkte von $\mathfrak{S}=(s, \Sigma)$ ausser s und den 3 Punkten auf Σ, *und Σ' und Σ'' ihre conjugirten Polaren.* Da die beiden andern Kegel, die in $B(s)$ ausser S' und S'' sich befinden, sich in den Kegel S vereinigt haben, so *berührt die Schnittlinie der Ebenen (s', Σ'') und (s'', Σ') die Curve S^6 in s.*

42. Wir fanden oben (Nr. 34), dass es *24 Grundcurven $R(s_0)$* giebt, *welche S^6 — in den Punkten s_0 — berühren.* Ersichtlich wird auch, da alle Flächen des Büschels $B(s_0)$ dann S^6 tangiren, die Ebene $\mathfrak{S}_0=(s_0\Sigma_0)$, welche alle Flächen berührt, von S^6 in s_0 tangirt. Σ_0 kann nicht durch s_0 gehen, dann gingen die Polarebenen des Punktes s_0 in Bezug auf alle Flächen des Netzes, also alle Flächen selbst durch s_0. Also muss einer der beiden Punkte s' und s'' sich noch mit s_0 vereinigen, d. h. *in den Kegel S_0 vereinigen sich 3 Kegel des Büschels $B(s_0)$, und es bleibt nur noch einer ausserdem, S'.* Die in Nr. 25

betrachtete Involution auf $\mathfrak{S}_0$ bleibt bestehen, auch können nicht etwa alle Strahlenpaare einen Strahl gemein haben, denn diese Gerade müsste dann der Grundcurve des Büschels angehören; also müssen 2 Doppelstrahlen sein, welche ihre Existenz nur den beiden Kegeln S_0 und S' verdanken können. Folglich *hat der mit S_0, der schon überhaupt 2 Kegel repräsentirt, noch zusammengefallene Kegel S'' auf S_0 seine Eigenschaft, von der Ebene $\mathfrak{S}$ wirklich berührt zu werden, übertragen.* Da also $\mathfrak{S}_0$ auch S_0 in zwei zusammengefallenen Geraden schneidet, so haben sich die beiden Tangenten von $R(s_0)$ in s_0 vereinigt, d. h. $R(s_0)$ *hat in s_0 einen Rückkehrpunkt, und die Kante $\mathfrak{f}_0$, in der $\mathfrak{S}_0$ den Kegel S_0 berührt, ist die Rückkehrtangente.* Es lässt sich auch leicht umgekehrt einsehen, dass, wenn eine durch s_0 gelegte Grundcurve dort einen Rückkehrpunkt hat, also der Kegel S_0 von $\mathfrak{S}_0 = (s_0, \Sigma_0)$ längs der Rückkehrtangente berührt wird, dann in $B(s_0)$ nur noch ein Kegel existiren kann, da schon durch S_0 ein Asymptotenstrahl der Involution in $\mathfrak{S}_0$ geliefert wird, also nur noch einer übrig bleibt; daher muss sich einer der beiden Punkte s' s'' mit s_0 vereinigen, so dass S^6 von $\mathfrak{S}_0$, mithin von allen Flächen des Büschels $B(s_0)$ und also auch von der Curve $R(s_0)$ in s_0 berührt wird.

Wir erhalten mithin folgendes Resultat:

Berührt eine Grundcurve eines Netzes dessen Kegelspitzencurve, so hat sie im Berührungspunkte einen Rückkehrpunkt. Und umgekehrt: *Hat eine Grundcurve des Netzes einen Rückkehrpunkt, so berührt sie in demselben die Kegelspitzencurve. Es giebt* also *in einem Netze 24 Grundcurven mit einem Rückkehrpunkte.*

Die beiden Geraden $\mathfrak{f}_0$ und $s_0 s'$ sind die Asymptotenstrahlen der Involution in $\mathfrak{S}_0$, also ist $\mathfrak{f}_0$ die Polare des Punktes s' in Bezug auf die sämmtlichen durch die Flächen des Büschels $B(s_0)$ in $\mathfrak{S}_0$ eingeschnittenen Geradenpaare; d. h. $\mathfrak{f}_0$ liegt auf der Polarebene (s_0, Σ') von s' in Bezug auf dieses Büschel. Ueberlegen wir, dass in s_0 und Σ_0 sich s'' und Σ'' befinden, so ergiebt sich, dass $\mathfrak{f}_0$, die Schnittlinie von $\mathfrak{S}_0 = (s', \Sigma_0) = (s', \Sigma'')$ mit $(s_0, \Sigma') = (s'', \Sigma')$, die Curve S^6 in s_0 berührt. Also *jede der mit einem Rückkehrpunkte behafteten 24 Grundcurven giebt der Kegelspitzencurve ihre Rückkehrtangente zur gemeinschaftlichen Tangente.*

43. Bei dem Kegel S_0 sind die beiden Geraden $\mathfrak{f}'$ und $\mathfrak{f}''$ in $\mathfrak{f}_0$ zusammengefallen und demnach $\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{T}''$ mit $\mathfrak{S}_0$, so dass *die Curve S^6 an den 24 Punkten s_0 uniplanar wird, dort übrigens auch von der Berührungscurve der Flächen $\mathfrak{S}_{14}$ und D^{24} getroffen wird;* die einzige Ebene dreipunktig be-

rührender Geraden ist eine der Einhüllungsebenen von $\mathfrak{S}_{14}$, welche aber D^{24} ausser in s_0 nochmals berührt. Durch jede Grundcurve $R(s_0)$ gehen zwei Kegel, in deren einen drei sich vereinigt haben; also durch jeden Punkt jeder dieser 24 Curven gehen drei auf einander folgende von den die Fläche D^{24} einhüllenden Kegeln, folglich *sind* (Preliminari 46) *diese 24 Grundcurven mit einem Rückkehrpunkte Cuspidalcurven auf der Fläche* D^{24}. Die Punkte einer Cuspidalcurve sind jederzeit uniplanare Punkte; in der That, in jedem Punkte s^x einer solchen Curve wird die Fläche D^{24} nur von der Ebene T_0^x, die den Kegel S_0 längs der Kante $s_0 s_0^x$ tangirt, berührt, während z. B. in jedem Punkte c_{ik}^x der Curve C_{ik} die Tangentenebenen der Kegel S_{ik} und S'_{ik} längs der Kanten $s_{ik} c_{ik}^x$ und $s'_{ik} c_{ik}^x$ die Fläche D^{24} tangiren. In dem letzteren Falle ist die Curve (L_{ik}, C_{ik}) gemeinschaftliche Charakteristik für zwei endlich entfernte einhüllende Kegel S_{ik}, S'_{ik}, in unserem jetzigen Falle für S_0 und seinen unmittelbaren Nachbar; daher dort die beiden verschiedenen Berührungsebenen in jedem Punkte der Charakteristik, hier die zusammengefallenen.

44. Die einem Punkte s_{ik} zugehörige Ebene $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_{ik}$, gelegt durch L_{ik} und die Tangente an C_{ik}, berührt, weil im Büschel $B(s_{ik})$ die Kegel S' und S'' sich in den Kegel S'_{ik} vereinigt haben, die Curve S^6 im Punkte s'_{ik} und enthält deren Tangente t'_{ik}. Diese beiden Tangenten t_{ik} und t'_{ik} sind übrigens reciproke Polaren in Bezug auf alle Flächen des Büschels $B(s_{ik}) = B(s'_{ik})$ und zwar die einzigen gemeinschaftlichen. Ein beliebiges Büschel hat drei Paare gemeinschaftlicher reciproken Polaren, die Gegenkanten seines Poltetraeders; ein Büschel $B(s)$ hat noch 2 Paare: 1) ss', ss'', und 2) $s's''$ und die Tangente an S^6 in s, endlich ein Büschel $B(s_0)$ nur ein Paar: $s_0 s'$ und die Tangente an S^6 in s_0.

Die einem Punkte s_{ik} zugehörige conjugirte Polare Σ_{ik} trifft die Gerade L_{ik} im vierten harmonischen Punkte von s_{ik} zu $\mathfrak{P}_i$, $\mathfrak{P}_k$.

45. Es bleibt uns noch immer *die Klasse der Fläche* D^{24} zu bestimmen übrig. Da diese Fläche von den Tangentenebenen sämmtlicher Kegel des Netzes eingehüllt wird, so wird ersichtlich ihre Klasse durch die Anzahl der Kegel des Netzes bestimmt, welche eine beliebige Gerade G berühren, denn jede Gerade, die in einer Berührungsebene eines Kegels liegt und nicht just dessen Scheitel enthält, berührt den Kegel. Wir haben also zu untersuchen, wie viele Kegel sich in der Reihe $S(F)$ (Nr. 13 ff.) befinden. Da die Polare einer Geraden L in Bezug auf einen Kegel stets durch dessen Spitze geht, so haben wir, wenn L die Kegelspitzencurve nicht trifft, — denn für eine Gerade, die

dies thut, könnte die reciproke Polare sich in eine Ebene erweitern oder auch die Gerade könnte dieselbe reciproke Polare in Bezug auf unendlich viele Flächen haben — die Spitzen der Kegel der Reihe $S(F)$ auf der der Geraden L zugehörigen Polarenfläche P^4 zu suchen, also in deren Schnittpunkten mit S^6; deren sind 24. Von ihnen werden 16 durch die 8 Begegnungspunkte der Curve S^6 mit der auf P^4 doppelten cubischen Polcurve N^3 der Geraden L in Bezug auf $N(F)$ absorbirt. Durch jeden derselben gehen unendlich viele reciproke Polaren von L, ersichtlich auch die in Bezug auf den Kegel, der seine Spitze in dem Punkte hat; sie braucht aber nicht mit einer der beiden durch den Punkt gehenden Erzeugenden von P^4 identisch zu sein, d. h. der Kegel nicht zu der Reihe $S(F)$ zu gehören. Hingegen durch jeden der acht übrigen Punkte geht nur eine reciproke Polare von L, weil er nur eine Secante an N^3 aussendet. Da er auf P^4 liegt, muss sie die reciproke Polare in Bezug auf eine Fläche von $S(F)$, hingegen, weil er auch auf S^6 liegt, die reciproke Polare in Bezug auf den Kegel S sein. Also liefert jeder der acht Punkte einen Kegel der Reihe $S(F)$. Folglich *giebt es in einem Netze zweiter Ordnung stets acht Kegel, die eine beliebige Gerade berühren*, oder *das System von Flächen zweiter Ordnung, die durch sieben beliebige Punkte gehen und eine Gerade berühren, enthält acht Kegel*, oder *das System von Kegeln zweiter Ordnung, welche durch sechs Punkte gehen und eine Gerade berühren, ist vom Index* 8. Und:

Die Enveloppe der Kegel eines Netzes zweiter Ordnung oder das Erzeugniss der mit einem Doppelpunkte (zu dem in 28 *Fällen ein zweiter tritt oder der in 24 Fällen in einen Rückkehrpunkt übergeht) behafteten Grundcurven eines solchen Netzes ist achter Klasse.* Ohne die mannichfachen singulären Elemente wäre sie von der Klasse $24.23^2 = 12696$. Es wäre eine interessante Untersuchung, wie viel jedes von den vielfachen Elementen (die Punkte $\mathfrak{P}_i$, die Curve S^6, die Curven (L_{ik}, C_{ik}) und die Curven $R(s_0)$) zu dieser bedeutenden Reduction der Klasse beigetragen hat.

46. Betrachten wir nun genauer *die Tripelcurve* T^3 (Nr. 9, 10, 11) *für gewisse ausgezeichnete Ebenen.* Zuerst *sei E eine Tangentenebene eines Kegels S des Netzes*, also auch eine Tangentenebene von D^{24}. Da sie den Kegel längs *einer ganzen Geraden t* berührt, so *wird diese an der Tripelcurve vollständig theilnehmen, der andere Theil derselben ein Kegelschnitt* T^2 *sein*, dessen Punkte die Berührungspunkte der übrigen die Ebene E berührenden Flächen des Netzes sind. *Alle Grundcurven, welche die Ebene E in Punkten der Gerade t berühren*, liegen auf dem Kegel S und *werden*, da sie t zweimal

treffen, *zweimal berührt* (eine, $R(s)$, einmal berührt und einmal im Doppelpunkte getroffen), *und die Paare von Berührungspunkten bilden eine Involution. Der Kegelschnitt* T^2 *ist* also *der Ort der Berührungspunkte der die Ebene E nur einmal berührenden Grundcurven des Netzes.* Er enthält die Pole der Geraden t in Bezug auf alle Kegelschnitte des in die Ebene E eingeschnittenen Netzes $N(K)$. Da es nämlich in demselben unendlich viele Büschel giebt, deren Kegelschnitte eine doppelte Berührung — auf t — eingehen, also alle denselben Pol von t haben, so genügt in der That, um alle diese Pole aufzufinden, ein einziges Büschel aus dem Netze. Die conjugirten Pole der Punkte von t liegen auf T^2 und umgekehrt, so dass diese Gebilde projectivisch auf einander bezogen sind, und *die Cayleysche Curve,* also die Enveloppe der Geraden der Ebene E, welche auf Flächen des Netzes liegen und von zwei Grundcurven desselben (das eine Mal auf T^2, das andere Mal auf t) berührt werden, *eine Curve dritter Klasse mit der Doppeltangente t wird* (die beiden Schnittpunkte von t und T^2 sind einander conjugirt). Zu je zwei Punkten auf T^2 gehört als dritter Tripelpunkt ein Punkt auf T^2; und ebenso ein Punkt auf T^2 zu je zwei Punkten auf t.

47. Noch mehr degenerirt die Tripelcurve für *eine Ebene* $\mathfrak{S}$. Da diese die beiden Kegel S', S'' berührt, so *nehmen die beiden Geraden ss', ss'' an der Tripelcurve theil.* Die übrigen Geradenpaare des in $\mathfrak{S}$ befindlichen Kegelschnittnetzes finden wir durch Zusammenstellung des Kegelschnittbüschels, das durch die Strahlenpaare der Involution um s, deren Asymptotenstrahlen ss', ss'' sind, gebildet wird, mit einem beliebigen Kegelschnitte des Netzes; daraus ergiebt sich, dass die Mittelpunkte derselben auf der Polare von s in Bezug auf diesen Kegelschnitt liegen d. h. auf Σ, die ebenso Polare in Bezug auf jeden andern Kegelschnitt des Netzes ist. Also *ist* Σ *die dritte Gerade der Tripelcurve in* $\mathfrak{S}$ *neben ss', ss''.* Alle ihre Punkte sind conjugirt zu s, also sind alle Strahlen durch s Einhüllende der *Cayley*schen Curve, was wir schon wissen; folglich *besteht die Cayleysche Curve aus dem Punkte s und einem Kegelschnitte* K^2. Jeder Punkt auf ss' hat seinen conjugirten Pol auf ss'', was daraus hervorgeht, dass in Folge der bekannten Involutionseigenschaft ss'' die conjugirte Polare jedes Punktes auf ss' in Bezug auf das Kegelschnittbüschel der Involutionspaare ist und umgekehrt. Die Pole der Punkte von ss' werden auf ss'' durch die Polaren jener Punkte in Bezug auf einen beliebigen wirklichen Kegelschnitt des Netzes in $\mathfrak{S}$ markirt, folglich beschreiben die conjugirten Pole auf ss' und ss'' zwei projectivische Punktreihen, und ihre Ver-

bindungslinien umhüllen den zweiten Bestandtheil K_2 der *Cayley*schen Curve, welcher ss' und ss'' tangirt, so dass beide Geraden Doppeltangenten der vollständigen Curve sind.

Also wie sich der Kegel derjenigen Geraden auf Flächen des Netzes, die durch einen Punkt gehen, für die Punkte s in eine Ebene und einen Kegel zweiter Ordnung auflöst, so *löst sich die Enveloppe derjenigen Geraden auf Flächen des Netzes, welche in einer Ebene liegen, für die Ebenen* $\mathfrak{S}$ *in einen Punkt und einen Kegelschnitt auf.*

Die Geraden ss', ss'' *enthalten die Berührungspunkte der die Ebene* $\mathfrak{S}$ *doppelt berührenden Grundcurven* und je eine, die auf ss' berührt, hat mit einer, die auf ss'' berührt, die Tangente gemein. *Alle die Ebene* $\mathfrak{S}$ *einfach berührenden Grundcurven haben ihre Berührungspunkte auf* Σ, und ihre Tangenten kreuzen sich sämmtlich in s.

Man kann also auch sagen: *Sämmtliche durch die Punkte einer Geraden* Σ *gehenden Grundcurven berühren in ihnen dieselbe Ebene, welche durch den zugehörigen Punkt* s *geht, in dem sich auch alle in den Punkten berührenden Tangenten der Grundcurven treffen;* doch ist dies ja auch eine einfache Folge der Eigenschaft, dass die Ebene $\mathfrak{S}$ in Σ die Polarebenen von s in Bezug auf alle Flächen des Netzes trifft, also jede Fläche dort berührt, wo diese Σ trifft, mithin auch die durch denselben Punkt gehende und daher auf der Fläche liegende Grundcurve tangirt.

48. Ein eigenthümlicher Fall des Flächennetzes zweiter Odnung ist der, wenn *die sieben bestimmenden Grundpunkte auf einer cubischen Raumcurve* R^3 *sich befinden,* die bekanntlich durch sechs Punkte bestimmt wird, dann liegt auch der achte auf derselben, oder vielmehr jeder beliebige Punkt dieser Curve kann als achter angesehen werden, *alle Flächen des Netzes gehen durch* R^3, welche dann *die Grundcurve* desselben genannt werden kann. Sämmtliche Büschelgrundcurven des Netzes bestehen aus der unveränderlichen Curve R^3 und einer veränderlichen Geraden, welche das Secantensystem von R^3 erzeugt. Also alle Grundcurven haben zwei Doppelpunkte. Die Curve R^3 ist auch die Kegelspitzencurve; die Enveloppe aller Kegel des Netzes ist die abwickelbare Fläche vierter Ordnung und dritter Klasse D^4, welche die Curve R^3 zur Cuspidalcurve hat, da je zwei auf einander folgende Kegel sich ausser in R^3 in einer Tangente derselben schneiden. Die conjugirte Polare eines Punktes r auf R^3 ist nothwendig die Tangente an diese Curve, also ersetzt die eben genannte abwickelbare Fläche auch die Fläche Σ^8. Jeder Punkt r auf R^3 ist Doppelpunkt für unzählig viele

Grundcurven, deren Geraden die Kanten des Kegels sind, welcher R^3 von r projicirt. Also giebt es doppelt unendlich viele Ebenen $\mathfrak{S}$, es sind die sämmtlichen Ebenen, die durch alle Erzeugenden der Fläche D^4 gehen; von einer Fläche, die an Stelle von $\mathfrak{S}_{14}$ tritt, kann mithin keine Rede sein.

Das Erzeugniss der eine Gerade G treffenden Grundcurven, zugleich die Enveloppe der diese Gerade berührenden Flächen ist eine Geradenfläche vierten Grades, deren Generatricen die Gerade G einmal und die Curve R^3 zweimal treffen und welche die Gerade G als einfache, die Curve R^3 aber als zweifache Linie enthält.

Die Berührungscurve T^3 jeder Ebene $\mathfrak{E}$ mit dem Netze ist in die drei Secanten von R^3 in $\mathfrak{E}$ zerfallen, und sämmtliche berührenden Flächen bilden drei Büschel, also wird die Fläche T^{12} als Enveloppe der die Ebene $\mathfrak{E}$ berührenden Flächen des Netzes durch die drei Grundcurven dieser Büschel ersetzt, d. h. durch die dreifache Curve R^3 und die drei Secanten. Fassen wir aber T^{12} als Erzeugniss der Grundcurven, welche mit $\mathfrak{E}$ zwei zusammenfallende Punkte gemein haben, so wird diese Fläche hier ersetzt durch die drei Kegel des Netzes, welche die Curve R^3 von ihren Schnittpunkten mit $\mathfrak{E}$ projiciren und deren jeder durch je zwei der eben genannten Grundcurven gehen; denn auf diesen Kegeln liegen alle Grundcurven des Netzes, welche in $\mathfrak{E}$ einen Doppelpunkt haben.

49. Der conjugirte Pol Π jedes Punktes P in Bezug auf das Netz liegt auf der von P ausgehenden Secante von R^3, und Π ist P in Bezug auf R^3 conjugirt. Wie im allgemeinen Falle, erzeugen auch hier die conjugirten Pole der Punkte einer Geraden eine cubische Raumcurve N^3. Der conjugirte Pol jedes beliebigen Punktes einer Tangente von R^3 ist deren Berührungspunkt, also allen Punkten von D^4 ist die Curve R^3 conjugirt. Mithin trifft jede N^3 die Curve R^3 viermal.

Die cubische Polcurve L^3 einer Ebene $\mathfrak{E}$ in Bezug auf ein Büschel des Netzes trifft die Curve R^3 zweimal, in den Spitzen der beiden Kegel des Büschels, also den Begegnungspunkten von R^3 mit der Geraden, welche die Grundcurve vervollständigt.

Die cubische Polfläche einer Ebene $\mathfrak{E}$ in Bezug auf das Netz, welche durch die conjugirten Pole aller Punkte der Ebene oder durch die Pole der Ebene in Bezug auf die einzelnen Flächen des Netzes erzeugt wird, enthält die Curve R^3, da deren Punkte die Pole der Ebene $\mathfrak{E}$ in Bezug auf die Kegel des Netzes oder die conjugirten Pole der Punkte der Curve vierter Ordnung sind, in der $\mathfrak{E}$ die Tangentenfläche D^4 von R^3 durchschneidet. Auf dieser Polfläche

sind die drei Schnittpunkte A, B, C von $\mathfrak{E}$ mit R^3 Knotenpunkte; es müssen also auf ihr (Fl. 3. Ord. Nr. 120) 12 Gerade liegen, 3 quaternäre, 6 binäre, 3 unäre. Die 3 quaternären sind die 3 Secanten AB, AC, BC, entweder Ort der Pole der Flächen, welche $\mathfrak{E}$ berühren, oder Ort der conjugirten Pole zu den Punkten dieser Geraden selbst. Die binären Geraden sind erstens die 3 Tangenten a, b, c an R^3 in A, B, C, die Oerter der conjugirten Pole, also die conjugirten Polaren zu A, B, C, und zweitens die Polaren der Ebene $\mathfrak{E}$ in Bezug auf die 3 Kegel, welche ihre Spitzen in A, B, C haben. Endlich die unären Geraden sind 3 Gerade, welche die conjugirten Pole der Punkte der Schnittgeraden α β γ der Ebene $\mathfrak{E}$ mit den Schmiegungsebenen von R^3 in A, B, C enthalten. (Man sehe hierüber Herrn *Reyes* Geometrie der Lage, Abth. II, S. 88ff.) Da im allgemeinen Falle 6 Kegelspitzen in $\mathfrak{E}$ liegen, so sind in jeden der 3 Punkte A, B, C je zwei A, A'; B, B'; C, C' zusammengefallen; dies zeigt schon die Binarität der obigen 6 Geraden; AB ersetzt die 4 Geraden AB, $A'B$, AB', $A'B'$ des allgemeinen Falles, daher die Quaternarität der drei Secanten. Die Geraden α, β, γ sind die Geraden AA', BB', CC', also unär. (Man sehe hinsichtlich dieser Betrachtung Fl. 3. Ord. Nr. 17 und 120.) Mit der abwickelbaren Fläche D^4 hat jede Polfläche die als Durchschnittscurve doppelt zu rechnende Rückkehrcurve jener gemein, aber beide Flächen berühren sich noch längs dieser Curve, so dass dies schon einen Schnitt $2.3+3=9^{\text{ter}}$ Ordnung giebt. Der fernere Schnitt besteht in den 3 Tangenten a, b, c. Je zwei Polflächen berühren sich zwar auch längs R^3; doch ist dieselbe auf jeder eine einfache Curve; es giebt diese Berührung also erst einen Schnitt sechster Ordnung. Der übrige Schnitt dritter Ordnung besteht in der cubischen Polcurve der Schnittgeraden der beiden zugehörigen Ebenen.

---

*) Diese cubische Polfläche findet sich auch in der nach Beendigung meiner Arbeit erschienen Abhandlung des Herrn *Geiser*, dieses Journal Bd. 69 S. 197 (Abschnitt XII), behandelt.

Bromberg, den 25. October 1868.

Ueber ein die Transformation homogener Differentialausdrücke zweiten Grades betreffendes Theorem.

(Von Herrn *E. B. Christoffel.*)

Die Lehrsätze, welche ich im art. 10 meiner Abhandlung über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades (pag. 46 dieses Bandes) bewiesen habe, setzen voraus, dass man die dort eingeführte Formenreihe F, G_4, G_5, ... soweit fortgesetzt habe, bis sie 1) n absolute Invarianten und 2) ebensoviel zugehörige Formen liefert, von denen die erstern in Bezug auf die ursprünglichen Variabeln, die letztern überhaupt voneinander unabhängig sind. Von diesen beiden Bedingungen ist, wie ich seitdem bemerkt habe, die erste für das Stattfinden der erwähnten Sätze nicht bloss nothwendig, sondern auch hinreichend, so dass die zugehörigen Formen stets in der geforderten Zahl vorhanden sind, wenn n voneinander unabhängige absolute Invarianten existiren.

Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf einen Umstand, welcher bei der Auflösung linearer Gleichungen eintreten kann und der folgenden Anwendung wegen einer Erörterung bedarf. Derselbe besteht darin, dass ein System von linearen Gleichungen, welches nicht zur völligen Bestimmung aller Unbekannten hinreicht, gleichwohl unter Umständen für gewisse Unbekannten Werthe liefern kann, welche von jeder Unbestimmtheit frei sind.

Um die Bedingungen für diesen Fall darzustellen, sei A. ein System von $p+m$ oder mehr linearen Gleichungen mit den Unbekannten $y_1, y_2, \ldots y_{p+m}$ und den unabhängigen Gliedern $z_1, z_2, \ldots$. Ich setze voraus, dass alle Determinanten dieses Systems, deren Ordnung $> p$ ist, gleich Null, aber die Determinanten p^{ter} Ordnung nicht alle gleich Null sind. Insbesondere sei diejenige Determinante p^{ter} Ordnung von Null verschieden und $= \Delta$, welche den Unbekannten $y_1, y_2, \ldots y_p$ in den Gleichungen entspricht, deren unabhängige Glieder $z_1, z_2, \ldots z_p$ sind (vergl. *Baltzer*, Theorie und Anwendung der Determinanten, zweite Auflage, §. 8, 3 und §. 4, 7).

Werden nun diese p Gleichungen nach $y_1, y_2, \ldots y_p$ aufgelöst, und die gefundenen Werthe in die übrigen Gleichungen eingesetzt, so fallen aus diesen (nach §. 3, 16 des angef. Werkes) auch die übrigen Unbekannten

$y_{p+1}, y_{p+2}, \ldots y_{p+m}$ weg, und man erhält demnach einerseits die Werthe, welche den Grössen $z_{p+1}, z_{p+2}, \ldots$ beigelegt werden müssen, wenn das System A. keinen Widerspruch enthalten soll, während andererseits das Resultat folgt, dass die Unbekannten $y_1, y_2, \ldots y_p$ sich durch $y_{p+1}, y_{p+2}, \ldots y_{p+m}$ ausdrücken, diese letztern dagegen willkürlich bleiben.

Damit nun, was dem obigen Falle entspricht, z. B. y_1 einen Werth erhalte, der von jeder Unbestimmtheit frei ist, ist erforderlich und hinreichend, dass die m Determinanten p^{ter} Ordnung $= 0$ sind, welche aus Δ hervorgehen, wenn man jeden Coefficienten von y_1 durch den derselben Gleichung entnommenen Coefficienten einer der Unbekannten $y_{p+1}, y_{p+2}, \ldots y_{p+m}$ ersetzt, indem diese Ausdrücke bis aufs Zeichen die Coefficienten sind, mit denen diese Unbekannten im Ausdrucke von $\Delta . y_1$ multiplicirt sind.

1.

Ich will nun im Anschlusse an die artt. 9. 10. meiner oben erwähnten Abhandlung voraussetzen, es liege ein System von Gleichungen beliebiger Form

$$(1.) \qquad \mathfrak{A} = 0$$

vor, in welchem zwei Gruppen von Unbekannten vorkommen, nämlich $x_1, x_2, \ldots x_n$ und $u_1', u_2', \ldots u_n^{(n)}$, und eine Gruppe von unabhängigen Variabeln, nämlich $x_1', x_2', \ldots x_n'$. Von diesem System werden folgende Eigenschaften vorausgesetzt:

a) Das System (1.) liefere völlig bestimmte Werthe der Unbekannten x als Functionen der Variabeln x'.

b) Ob es auch zur Bestimmung der Unbekannten u ausreiche, bleibt dahingestellt.

c) Dagegen soll, wenn man nach den unabhängigen Variabeln differentiirt und hierauf

$$(2.) \qquad \frac{\partial x_i}{\partial x_\alpha'} = u_\alpha^{(i)}, \qquad \frac{\partial u_\beta^{(i)}}{\partial x_\alpha'} = \varphi_{\alpha\beta}^{(i)}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{x'})$$

einsetzt, ein Gleichungssystem

$$(3.) \qquad \mathfrak{B} = 0$$

folgen, von welchem ich voraussetze, dass es durch die dem System (1.) genügenden bestimmten Werthe der x und irgend ein gleichzeitig genügendes System der u befriedigt wird.

Dann ergeben sich folgende Schlüsse. Wegen *a*) liefern die Gleichungen

$$(1'.) \qquad \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x_\alpha'} = 0$$

völlig bestimmte Werthe für die Derivirten von $x_1, x_2, \ldots x_n$, während die Frage, ob die aus ihnen folgenden Werthe der Derivirten von $u_1', u_2', \ldots$ ebenfalls von jeder Unbestimmtheit frei sind, nach *b*) dahingestellt bleiben muss.

Aus (1'.) eliminire man nun alle Derivirten mittelst der Gleichungen

$$(2'.) \qquad \frac{\partial x_i}{\partial x_\alpha'} = u_\alpha^{(i)} + \binom{i}{\alpha}, \qquad \frac{\partial u_\beta^{(i)}}{\partial x_\alpha'} = \varphi_{\alpha\beta}^{(i)}(\overline{x}, \overline{u}, \overline{x'}) + \binom{i}{\alpha\beta};$$

dann muss man, weil die Gleichungen (1'.) in den Derivirten linear sind, aus jeder von ihnen eine Gleichung von der Form $U + \mathfrak{B} = 0$ erhalten, wo $\mathfrak{B}$ dieselbe Bedeutung wie in (3.) hat, und U aus $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x_\alpha}$ erhalten wird, wenn man allgemein $\frac{\partial x_i}{\partial x_\alpha'}$ durch $\binom{i}{\alpha}$, $\frac{\partial u_\beta^{(i)}}{\partial x_\alpha'}$ durch $\binom{i}{\alpha\beta}$ ersetzt und diejenigen Glieder weglässt, welche keine Derivirte enthalten. Da aber nach Voraussetzung *c*) stets $\mathfrak{B} = 0$ ist, so liefert jede Gleichung (1'.) eine neue Gleichung

$$(3'.) \qquad U = 0,$$

welche sich von jener nur dadurch unterscheidet, dass alle unabhängigen Glieder unterdrückt sind, während die ursprünglichen Unbekannten $\frac{\partial x_i}{\partial x_\alpha'}$, $\frac{\partial u_\beta^{(i)}}{\partial x_\alpha'}$ durch andere, nämlich $\binom{i}{\alpha}$, $\binom{i}{\alpha\beta}$ ersetzt sind.

Diesem Gleichungssystem kann man daher genügen, indem man alle Unbekannten $= 0$ setzt. Da es aber für die Unbekannten $\binom{i}{\alpha}$ Werthe liefern muss, die keine Unbestimmtheit enthalten, so kann ihm auch nur dadurch genügt werden, dass man alle $\binom{i}{\alpha} = 0$ setzt. Wir haben daher den Satz:

d) Wenn die obigen Voraussetzungen erfüllt sind, so sind auch die Unbekannten $u_\alpha^{(i)}$ des Gleichungssystems (1.), (3.) keiner Unbestimmtheit fähig, sondern es folgt allgemein

$$u_\alpha^{(i)} = \frac{\partial x_i}{\partial x_\alpha'}.$$

2.

Dies festgestellt, betrachte ich noch einmal die Systeme von Transformationsrelationen, welche aus den Gleichungen $F = F'$, $G_4 = G_4'$, $G_5 = G_5'$, ... hervorgehen. Nimmt man an, dass die zu den Gleichungen

$$(4.) \qquad F = F', \quad G_4 = G_4', \quad G_5 = G_5', \quad \ldots \quad G_p = G_p'$$

gehörigen Transformationsrelationen völlig bestimmte Werthe der ursprünglichen Variabeln x als Functionen der neuen Variabeln x' liefern, und dass diese, sowie irgend ein gleichzeitig genügendes System der u auch den in

$$(5.) \qquad G_{p+1} = G'_{p+1}$$

enthaltenen Transformationsrelationen Genüge leisten, so folgt aus dem obigen Satze, dass allgemein

$$(6.) \qquad u_\alpha^{(\omega)} = \frac{\partial x_\omega}{\partial x'_\alpha},$$

also die Transformation von F in F' möglich ist.

Die Bedingungen hierfür ergeben sich wie folgt. Man betrachte die Gleichungen (4.) und (5.) als rein algebraische und bilde 1) ein vollständiges System voneinander unabhängiger absoluter Invarianten $I_1, I_2, \ldots I_\lambda$ des Formensystems

$$(a.) \qquad F, G_4, G_5, \ldots G_p,$$

2) die absoluten Invarianten $I_{\lambda+1}, I_{\lambda+2}, \ldots I_l$, welche zu jenen gefügt werden müssen, um ein vollständiges System voneinander unabhängiger absoluter Invarianten der um ein Glied weiter fortgesetzten Formenreihe

$$(b.) \qquad F, G_4, G_5, \ldots G_p, G_{p+1}$$

zu erhalten.

Dann ist für die Anwendbarkeit der obigen Schlüsse erforderlich und hinreichend, dass 1) unter den λ Invarianten der ersten Gruppe sich deren n, etwa $I_1, I_2, \ldots I_n$ befinden, welche in Bezug auf die Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ voneinander unabhängig sind, und dass 2) die Werthe der ursprünglichen Variabeln als Functionen der neuen, welche sich aus den Gleichungen $I_1 = I'_1$, $I_2 = I'_2, \ldots I_n = I'_n$ ergeben, auch den übrigen Gleichungen $I_\alpha = I'_\alpha$ der ersten Gruppe, soweit solche vorhanden sind, und allen Gleichungen $I_\beta = I'_\beta$ der zweiten Gruppe Genüge leisten. Sind nämlich diese Bedingungen erfüllt, so enthalten die aus (4.) und (5.) hervorgehenden Transformationsrelationen auch in Bezug auf die Werthe der Unbekannten u keinen Widerspruch, und es folgt nun mit Nothwendigkeit die Gleichung (6.). Mit Rücksicht darauf, dass bei diesen Untersuchungen vorausgesetzt ist, dass die Determinante von F nicht identisch $= 0$ ist, haben wir also den folgenden Satz:

Es seien F und F' zwei vollständige quadratische Differentialformen mit den Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ und $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$. Um zu untersuchen, ob die eine in die andere transformirt werden könne, bilde man

die Formenreihe F, G_4, G_5, ... *für* F *und die entsprechende für* F'. *Wenn alsdann unter den absoluten Invarianten von*

$$(a.) \quad F,\ G_4,\ G_5,\ \ldots\ G_p,$$

als System von simultan zu transformirenden algebraischen Formen betrachtet, sich deren n *befinden, welche in Bezug auf die Variabeln* x *voneinander unabhängig sind, ohne dass dies der Fall ist, wenn man* G_p *aus der Formenreihe weglässt, so bestehen die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen für die Möglichkeit der Transformation des Differentialausdruckes* F *in* F' *darin, dass die als algebraische betrachteten Formen*

$$(b.) \quad F,\ G_4,\ G_5,\ \ldots\ G_p,\ G_{p+1}$$

durch übereinstimmende lineare Substitutionen gleichzeitig in

$$(b'.) \quad F',\ G_4',\ G_5',\ \ldots\ G_p',\ G_{p+1}'$$

transformirt werden können, und diese Bedingungen werden daher durch die Gleichheit der entsprechenden absoluten Invarianten der Formenreihen $(b.)$ *und* $(b'.)$ *vollständig ausgedrückt.*

Wenn dagegen die algebraische Formenreihe $(a.)$, *wie weit sie auch fortgesetzt werden mag, niemals* n *absolute Invarianten liefert, welche in Bezug auf die Variabeln* x *voneinander unabhängig sind, so ist die Transformation von* F *in* F' *selbst in den Fällen, wo sie möglich ist, doch keine bestimmte,*

weil in diesem Falle, wo die Invarianten allein zur Ermittelung der gesuchten Substitution nicht ausreichen, noch die Differentialgleichungen des Problems zu Hülfe genommen werden müssen, so dass die Substitution nothwendig verfügbare Elemente enthält, welche stetiger Aenderungen fähig sind.

Berlin, den 7. April 1869.

Zur Potential-Theorie.

(Von Herrn *Kronecker*.)

Es seien t und θ irgendwie begrenzte Theile des Raumes, welche sich auch ganz oder theilweise decken können, und die rechtwinkligen Coordinaten im ersteren mögen mit x, y, z, die im letzteren mit ξ, η, ζ bezeichnet werden; ferner seien P und Π die beiden durch die Gleichungen:

$$P(x, y, z) = \int \frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\theta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}},$$

$$\Pi(\xi, \eta, \zeta) = \int \frac{f(x, y, z)\, dt}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}$$

definirten Potentiale und P_1, P_2, P_3, Π_1, Π_2, Π_3 die durch Differentiation daraus herzuleitenden Componenten der Attraction. Alsdann folgt unmittelbar aus den Integral-Ausdrücken für P_h, Π_h die identische Gleichung:

(I.) $$\int P_h(x-a, y-b, z-c)\, f(x, y, z)\, dt + \int \Pi_h(\xi+a, \eta+b, \zeta+c)\, \varphi(\xi, \eta, \zeta)\, d\theta = 0.$$

wo $h = 1, 2, 3$ zu setzen ist und a, b, c beliebige reelle Grössen bedeuten. Bezeichnet man nun der Kürze halber diese beiden Integrale, deren Summe verschwindet, mit:

$$F_h(-a, -b, -c), \qquad \Phi_h(a, b, c),$$

so erhält man für $h = 1$:

$$\frac{F_1(-a, 0, 0) - F_1(0, 0, 0)}{-a} = \frac{\Phi_1(a, 0, 0) - \Phi(0, 0, 0)}{a}.$$

Wenn sich also der eine dieser beiden Quotienten, z. B. der auf der linken Seite, für $a = 0$ einer bestimmten Grenze: $F_{11}(0, 0, 0)$ nähert, so ist der bezügliche Werth zugleich der Grenzwerth des andern, und man erhält demgemäss die Relation:

$$F_{hh}(0, 0, 0) = \Phi_{hh}(0, 0, 0)$$

für $h = 1, 2, 3$ und folglich:

(II.) $$F_{11} + F_{22} + F_{33} = \Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{33}.$$

Setzt man die partielle Differentialgleichung also auch implicite die Existenz der zweiten Ableitungen und deren nur in Flächen unterbrochene

Stetigkeit für eines der beiden Potentiale z. B. für P voraus, so kann man den Grenzwerth F_{11} bilden, indem man unter dem Integralzeichen für:

$$\lim_{a=0} \frac{P_1(x-a, y, z) - P_1(x, y, z)}{-a}$$

den Werth $\frac{\partial P_1}{\partial x}$ setzt. Hiernach wird:

$$F_{11} + F_{22} + F_{33} = \int \Delta P . f(x, y, z)\, dt,$$

oder also:

$$F_{11} + F_{22} + F_{33} = -4\pi \int f(x, y, z) . \varphi(x, y, z)\, dt,$$

und folglich auch wegen der Gleichung (II.):

$$\Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{33} = -4\pi \int f(x, y, z) . \varphi(x, y, z) . dt,$$

wo die Integration über dasjenige Volumen erstreckt werden muss, welches den Räumen t und θ gemeinsam ist. Da nun die obigen Eigenschaften der zweiten Ableitungen von P ohne Weiteres vorausgesetzt werden können, wenn die Dichtigkeit φ den constanten Werth „Eins" hat, so ist die Relation, welche sich für diesen Fall ergiebt, nämlich:

$$\text{(III.)} \quad \Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{33} = -4\pi \int f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

als eine unmittelbare Consequenz der Definition von Φ_1, Φ_2, Φ_3 anzusehen, und deren Gültigkeit ist also einzig und allein an diejenigen Voraussetzungen über die Dichtigkeits-Function f geknüpft, welche für die Existenz der betrachteten Ausdrücke erforderlich sind. Der Inhalt der Relation (III.) kann folgendermassen formulirt werden:

„Der Raum t sei mit Masse von beliebiger Dichtigkeit f und der Raum θ mit Masse von der Dichtigkeit „Eins" erfüllt; das Potential der beiden Massen sei Φ, und Φ_1, Φ_2, Φ_3 seien die nach den rechtwinkligen Axen genommenen Componenten der Attraction. Denkt man sich nun die Masse θ in der Richtung der x-Axe unendlich wenig verschoben und bezeichnet das Verhältniss der dadurch bewirkten Aenderung von Φ_1 zu der Grösse der Verschiebung selbst durch Φ_{11} und die analogen auf die andern beiden Axen bezüglichen Ausdrücke durch Φ_{22}, Φ_{33}, so ist die Summe $\Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{33}$ gleich der mit -4π multiplicirten Masse desjenigen Theiles von t, welcher mit dem Raume θ zusammenfällt."

Lässt man den Raum θ unendlich klein werden und zwar so, dass derselbe die unmittelbare Umgebung eines bestimmten Punktes (ξ, η, ζ) bildet, so nähert sich das Integral auf der rechten Seite der Gleichung (III.), dividirt

durch das betreffende Volumen, einem Werthe, welcher mit $f(\xi, \eta, \zeta)$ übereinstimmen muss, damit die Potential-Gleichung:

$$\Delta\Pi(\xi, \eta, \zeta) = -4\pi . f(\xi, \eta, \zeta)$$

Geltung habe. Ferner ist, wie aus obigen Betrachtungen erhellt, leicht nachzuweisen, dass die linke Seite der Gleichung (III.), dividirt durch das unendlich kleine Volumen, sich bei derselben Annahme der Grenze $\Delta\Pi(\xi, \eta, \zeta)$ nähert, wenn nur die Existenz von zweiten Ableitungen des Integrals Π vorausgesetzt wird. Aber ich muss es dahingestellt sein lassen, ob der Nachweis dieser Existenz zu führen ist, ohne wie es gewöhnlich geschieht die Differentiirbarkeit der Dichtigkeits-Function oder andere Eigenschaften derselben vorauszusetzen, die mit der Existenz des Potentials nicht nothwendig verbunden sind. Ich bemerke schliesslich, dass ich auf einem Wege, der von dem hier auseinandergesetzten nicht wesentlich verschieden ist, zu einer der Gleichung (III.) entsprechenden Relation für allgemeinere Potential-Ausdrücke gelangt bin. Dieselbe findet sich am Schlusse eines Aufsatzes, welcher im Monatsberichte der hiesigen Akademie vom März d. J. abgedruckt ist. Doch glaubte ich, dass eine kurze und einfache Herleitung jener Relation für die gewöhnlichen Massen-Potentiale bei dem allgemeineren Interesse, welches sich an diese knüpft, nicht ganz überflüssig erscheinen dürfte.

Berlin, den 27. April 1869.

Ueber die Flächen vierten Grades, welche eine Doppelcurve zweiten Grades haben.

(Von Herrn *C. F. Geiser* in Zürich.)

Die in dem Aufsatze: „Ueber die Doppeltangenten einer ebenen Curve vierten Grades“ *) nachgewiesene Beziehung zwischen den Geraden der Fläche dritten Grades und den Doppeltangenten der Curve vierten Grades haben Herrn *Camille Jordan* zu algebraischen Untersuchungen veranlasst **), die, wie er dem Verfasser brieflich mittheilte, einen Zusammenhang erkennen lassen zwischen den Geraden einer allgemeinen Fläche dritten Grades und den Geraden einer Fläche vierten Grades, welche eine ebene Doppelpunktscurve zweiten Grades hat. In der That bestätigen die nachfolgenden geometrischen Betrachtungen die von Herrn *Jordan* ausgesprochene Vermuthung, und zwar zeigen dieselben, dass man auf zwei verschiedenen Wegen die genannte Beziehung herstellen kann.

I.

Die Abhandlung des Herrn *Clebsch*: „Ueber die Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve vierten Grades besitzen,“ ***) geht von der Abbildung der allgemeinsten Fläche der genannten Art auf eine Ebene aus, welche Abbildung durch folgende wesentliche Merkmale bestimmt ist:

1. Es entspricht im Allgemeinen jedem Punkte der Fläche vierten Grades F_4 ein und nur ein Punkt der Ebene E und umgekehrt.

2. Jedem Punkte des Doppelkegelschnitts C_2 auf F_4 entspricht in E ein Punktenpaar.

3. In E liegen fünf ausgezeichnete, der Lage nach von einander unabhängige Punkte s_1, s_2, ... s_5, deren jedem auf F_4 eine Gerade entspricht.

*) Mathematische Annalen Bd. 1, pag. 128 etc.

**) Die erwähnten Untersuchungen sind unterdessen in den „Comptes rendus“ vom 15. März 1869 bekannt gemacht worden.

***) Dieses Journal Bd. 69, pag. 142 etc.

4. Eine Curve C_n in E, welche a_1 mal durch s_1, a_2 mal durch $s_2 \ldots$, a_5 mal durch s_5 geht, entspricht einer auf F_4 gelegenen Raumcurve C_N vom Grade $N = 3n - (a_1 + a_2 + \cdots + a_5)$, welche die s_1 entsprechende Gerade a_1 mal, die s_2 entsprechende Gerade a_2 mal ..., die s_5 entsprechende Gerade a_5 mal trifft. —

In einer andern Abhandlung: „Die Geometrie auf den Flächen dritter Ordnung“ *) hat aber Herr *Clebsch* eine analoge Abbildung der allgemeinen Fläche dritten Grades auf eine Ebene gegeben, welche in nachstehender Weise definirt wird:

1. Im Allgemeinen entspricht jedem Punkte der Fläche dritten Grades F_3 ein und nur ein Punkt auf der Ebene E und umgekehrt.

2. In E liegen sechs ausgezeichnete, ihrer Lage nach von einander unabhängige Punkte σ_1, σ_2, ... σ_6, deren jedem auf F_3 eine Gerade entspricht.

3. Einer in E gelegenen Curve C_n, welche α_1 mal durch σ_1, α_2 mal durch σ_2, ..., α_6 mal durch σ_6 geht, entspricht auf F_3 eine Raumcurve C_N vom Grade $N = 3n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_6)$, welche α_1 mal die σ_1 auf F_3 entsprechende Gerade, α_2 mal die σ_2 entsprechende ... und α_6 mal die σ_6 entsprechende Gerade schneidet.

Man erkennt sofort, wie jetzt mit Hülfe der Ebene E die Fläche vierten Grades F_4, welche eine ebene Doppelpunktscurve zweiten Grades hat, zu einer allgemeinen Fläche dritten Grades F_3 in Beziehung zu setzen ist. Man kann nämlich solche Punkte auf F_4 und F_3 als entsprechende betrachten, welche zu einem und demselben Punkte von E gehören; wenn man zudem F_3 derart wählt, dass σ_1 mit s_1, σ_2 mit s_2, ..., σ_5 mit s_5 zusammenfällt, was immer einzurichten ist, so ist die Beziehung zwischen F_4 und F_3 am einfachsten hergestellt. Wie man zu jeder beliebigen Figur auf der Fläche dritten Grades die entsprechende auf der Fläche vierten Grades finden kann, indem man die Ebene als Mittelglied benutzt, soll nicht weiter ausgeführt, sondern nur beispielsweise an den Geraden der beiden Oberflächen nachgewiesen werden.

II.

Die 16 Geraden der F_4 entstehen:

1. aus den Punkten $s_1 \ldots s_5$, welche fünf Gerade $g_1 \ldots g_5$ erzeugen mögen;

---

*) Dieses Journal Bd. 65, pag. 359 etc.

2. aus den 10 Verbindungsgeraden der Punkte s zu zweien; der Verbindungsgeraden s_m s_n entspreche auf F_4 die Gerade l_{mn};
3. aus dem Kegelschnitte durch die Punkte s, dessen entsprechende Gerade G_6 sei.

Die 27 Geraden der F_3 ergeben sich:

1. aus den Punkten $\sigma_1 \ldots \sigma_6$, welche auf F_3 die Geraden $\gamma_1 \ldots \gamma_6$ erzeugen mögen;
2. aus den 15 Verbindungsgeraden der Punkte σ zu zweien; der Verbindungsgeraden $\sigma_\mu \sigma_\nu$ entspreche auf F_3 die Gerade $\lambda_{\mu\nu}$;
3. aus den sechs Kegelschnitten durch je fünf der Punkte σ, deren entsprechende Geraden $\Gamma_1 \ldots \Gamma_6$ seien und zwar so, dass Γ_k demjenigen der sechs Kegelschnitte entspricht, der nicht durch σ_k geht.

Es entsprechen sich also in der Doppelreihe

$$g_1 g_2 g_3 g_4 g_5; \quad l_{12}\, l_{13}\, l_{14}\, l_{15}\, l_{23}\, l_{24}\, l_{25}\, l_{34}\, l_{35}\, l_{45}; \quad G_6$$

$$\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5; \quad \lambda_{12} \lambda_{13} \lambda_{14} \lambda_{15} \lambda_{23} \lambda_{24} \lambda_{25} \lambda_{34} \lambda_{35} \lambda_{45}; \quad \Gamma_6$$

je zwei übereinanderstehende Gerade, von denen die obere der F_4, die untere der F_3 angehört. Zu jeder Geraden auf F_4 gehört eine und nur eine Gerade der F_3, während es 10 Gerade auf F_3 giebt, denen auf F_4 nicht eine Gerade sondern ein Kegelschnitt zugehört. Es sind dies $\lambda_{16} \lambda_{26} \lambda_{36} \lambda_{46} \lambda_{56}$; Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4, Γ_5; was schliesslich die noch übrig bleibende Gerade γ_6 auf F_3 anbetrifft, so entspricht ihr auf F_4 ein einziger Punkt.

Die eindeutige punktweise Beziehung zwischen zwei Geraden l und λ von gleichen Indices, so wie zwischen G_6 und Γ_6 versteht sich von selbst, während man zu einer eben so beschaffenen Beziehung zwischen einer Geraden g und der Geraden γ von demselben Index gelangt, wenn man sich erinnert, dass die Punkte von g_μ den in E gelegenen unendlich benachbarten Punkten von s_μ und die Punkte auf γ_μ den unendlich benachbarten Punkten von σ_μ in E derart zugeordnet sind, dass jedem Punkte p oder π auf g_μ resp. γ_μ ein auf einem ganz eindeutig durch s_μ resp. σ_μ gezogenen Strahl gelegener, dem s_μ oder σ_μ unendlich benachbarter Punkt p' oder π' entspricht.

Das Resultat dieser Betrachtung ist, dass man die 16 Geraden einer Fläche vierten Grades F_4 mit einer ebenen Doppelpunktscurve zweiten Grades in eindeutige punktweise Beziehung zu 16 Geraden einer allgemeinen Oberfläche dritten Grades F_3 setzen kann, insofern man diese letztern 16 Geraden so auswählt, dass sie übrig bleiben, wenn man von den 27 Geraden eine, γ_6,

und diejenigen, welche γ_6 treffen, also λ_{16}, λ_{26}, λ_{36}, λ_{46}, λ_{56}, Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4, Γ_5 ausscheidet *).

Man weiss, dass diese 11 Geraden auf F_3 fünf ebene Dreiseite bilden, nämlich $\gamma_6\lambda_{16}\Gamma_1$, $\gamma_6\lambda_{26}\Gamma_2$, $\gamma_6\lambda_{36}\Gamma_3$, $\gamma_6\lambda_{46}\Gamma_4$, $\gamma_6\lambda_{56}\Gamma_5$. Die andern 16 Geraden zeigen die nämliche Anordnung wie die Geraden der F_4, insofern man nur das Schneiden oder Nichtschneiden der Geraden einer solchen Gruppe von 16 Geraden berücksichtigt. Damit ist nachgewiesen, wie man von den Eigenschaften der Geraden auf F_3 zu denjenigen der Geraden auf F_4 übergehen kann; in der That ergeben sich von hier aus fast unmittelbar die von Herrn *Clebsch* abgeleiteten Resultate über die Beziehungen der auf F_4 gelegenen Geraden.

Es mag noch bemerkt werden, dass der Doppelpunktscurve C_2 der F_4 auf F_3 eine Raumcurve vierten Grades C_4 entspricht. Es bildet sich nämlich, wie Herr *Clebsch* in der citirten Abhandlung über F_4 nachgewiesen hat, C_2 in E als eine Curve dritten Grades C_3 ab, welche durch die Punkte $s_1, s_2, \ldots s_5$ einfach geht, und dieser Curve C_3 entspricht hinwiederum in Folge der bekannten gegenseitigen Beziehungen zwischen E und F_3 auf der letztern Fläche eine Raumcurve vierten Grades C_4, welche der Durchschnitt zweier Flächen zweiten Grades ist. Da zu jedem Punkte auf C_2 zwei Punkte der C_3 in E gehören, so werden auch jedem Punkte der C_2 auf der in F_3 gelegenen C_4 zwei verschiedene Punkte zugeordnet sein.

III.

Die in I. und II. enthaltenen Resultate können abgeleitet werden, ohne dass man die Ebene als Mittelglied zwischen F_4 und F_3 einfügt. Es geschieht dies unter Anwendung einer geometrischen Verwandtschaft zweiten Grades **), welche eine Verallgemeinerung des Princips der reciproken Radien ist, und deren Grundgedanke wesentlich in Nachfolgendem besteht:

In Bezug auf eine feste Fläche zweiten Grades F_2 und einen festen Punkt P kann jedem beliebigen Punkt p im Raume ein anderer p' in der Weise zugeordnet werden, dass man die Durchschnittspunkte s_1 und s_2 der

---

*) Dass in der That die 11 ausgeschiedenen Geraden in der genannten geometrischen Beziehung zueinander stehen, folgt unmittelbar aus den Grundprincipien der Abbildung einer Fläche dritten Grades auf eine Ebene.

**) Man vergl.: „Ueber eine geometrische Verwandtschaft des zweiten Grades“ Mittheil. der Berner naturforsch. Gesellsch. 1865.

Geraden pP mit F_2 bestimmt und zu ps_1s_2 den vierten harmonischen p zugeordneten Punkt p' construirt. Die Beziehung zwischen den Punkten p und p' ist im Allgemeinen eindeutig und reciprok, d. h. zu jedem Punkte p gehört im Allgemeinen stets ein und nur ein Punkt p', und zu diesem gehört umgekehrt der Punkt p. Eine Ausnahme bilden die Punkte des Kegelschnittes C_2, in welchem F_2 von der Polarebene E des Punktes P in Bezug auf F_2 geschnitten wird: einem beliebigen dieser Punkte entsprechen die sämmtlichen Punkte der Geraden, welche ihn mit P verbindet. Ferner bildet der Punkt P eine Ausnahme; zu ihm gehören als zugeordnete Punkte die sämmtlichen Punkte der Ebene E.

Die gemachten Bemerkungen werden noch durch die beiden Sätze vervollständigt:

1. Bewegt sich p auf einer Geraden g, welche den Punkt p nicht enthält, so beschreibt p' einen Kegelschnitt c_2, welcher in der durch p und g gelegten Ebene enthalten ist, durch den Punkt P geht und mit C_2 zwei Punkte gemein hat.

2. Durchläuft p eine Ebene e, so erzeugt p' eine Fläche zweiten Grades f_2, welche den Kegelschnitt C_2 und den Punkt P enthält; auf dieser Fläche sind auch die beiden Geraden gelegen, welche P mit den Schnittpunkten von e mit C_2 verbinden. —

Nach dem entwickelten Transformationsprincip kann man nun zu jeder vom Punkte p beschriebenen Figur im Raume die entsprechende, durch den jedesmaligen zugeordneten Punkt p' erzeugte Figur bestimmen.

Einer allgemeinen Curve n^{ten} Grades C_n, welche weder C_2 schneidet, noch den Punkt P enthält, entspricht eine Raumcurve $2n^{\text{ten}}$ Grades C'_{2n}, welche $n$mal durch P geht und C_2 in $2n$ Punkten schneidet. Wenn aber die irreductible C_n den Kegelschnitt C_2 in a Punkten schneidet und ferner $b$mal durch P geht, so entspricht ihr 1) die Ebene E und zwar $b$mal gelegt, 2) ein System von a Kanten des Kegels zweiten Grades K_2, welcher durch P als Mittelpunkt und C_2 als Leitlinie bestimmt ist, 3) eine irreductible Raumcurve $C'_{2n-(a+b)}$ vom Grade $2n-(a+b)$, welche C_2 in $2n-(a+2b)$ Punkten schneidet und $(n-a)$mal durch P geht.

Zu einer Fläche n^{ten} Grades F_n, welche den Kegelschnitt C_2 nicht seiner ganzen Ausdehnung nach enthält und welche auch nicht durch P geht, gehört eine Fläche $2n^{\text{ten}}$ Grades F'_{2n}, welche P zum $n$fachen Punkt und C_2 zur $n$fachen Curve hat. Wenn aber die irreductible F_n den Punkt P zum

$a$fachen Punkt und C_2 zur $b$fachen Curve hat, so entspricht ihr 1) die Ebene E, die $a$fach gelegt ist, 2) der $b$mal zu zählende Kegel K_2 und 3) eine irreductible Fläche $F'_{2n-(a+2b)}$ vom Grade $2n-(a+2b)$, die P zum $(n-2b)$fachen Punkt und C_2 zur $\{n-(a+b)\}$fachen Curve hat.

IV.

Sei F_4 die allgemeinste Fläche vierten Grades mit einer in der Ebene E gelegenen Doppelpunktscurve C_2 (die also als nicht in ein Geradenpaar zerfallend angenommen wird), ferner sei P ein fester, nicht auf C_2 befindlicher, sonst aber ganz willkürlicher, der F_4 angehöriger Punkt, dann kann man einen Kegel zweiten Grades K_2 mit dem Mittelpunkte P und der Leitlinie C_2 construiren, welcher mit der doppelt gelegten Ebene E ein Flächenbüschel zweiten Grades bestimmt. Eine beliebige Fläche F_2 dieses Büschels (die beiden genannten speziellen Flächen seien ausgeschlossen) kann mit P zusammengenommen der beschriebenen Transformation zur Grundlage dienen. Der Fläche F_4 entsprechen dann: 1) die Ebene E einfach gelegt, 2) der doppelt gelegte Kegel K_2 und 3) eine Fläche dritten Grades F'_3, die P nicht enthält, welcher aber C_2 einfach gezählt angehört. Einer beliebigen Fläche dritten Grades F'_3, welche C_2 enthält und auf welcher P nicht liegt, entspricht nach demselben Transformationsprinzipe: 1) der Kegel K_2 einfach gelegt, 2) eine Fläche vierten Grades F_4, welche C_2 zur Doppelpunktscurve hat. Damit sind also die Flächen F_4 und F'_3 in Beziehung gesetzt; zu einem beliebigen Punkte p auf F_3 gehört ein, aber nur ein Punkt p' auf F'_3 und umgekehrt, zu jedem Punkte p' auf F'_3 gehört ein, aber auch nur ein Punkt p auf F_4. Dieser Satz erleidet folgende Ausnahmen:

1. Dem auf F_4 gelegenen Punkte P entsprechen nach Früherem sämmtliche Punkte der Ebene E, also neben andern auch diejenigen Punkte, welche F'_3 und E gemein haben; dieselben erfüllen C_2 und eine Gerade, die mit γ_6 bezeichnet werden mag. Diese beiden Gebilde zusammengenommen können in engerm Sinne als dem Punkte P zugehörig betrachtet werden.

2. Einem F_4 angehörigen Punkte $\mathfrak{p}$ auf C_2 (der ein Doppelpunkt der genannten Fläche ist) entsprechen die sämmtlichen Punkte der doppelt gelegten Kante des Kegels K_2, welche durch $\mathfrak{p}$ geht, also namentlich auch die drei (doppelt zu zählenden) Punkte, die der Kante und der Fläche F'_3 gemein sind, und von denen einer $\mathfrak{p}$ ist; diese können im engern Sinne als $\mathfrak{p}$ zugehörig aufgefasst werden.

3. Einem Punkte $\mathfrak{p}'$ der F_3', welcher auf C_2 gelegen ist, entsprechen die sämmtlichen Punkte der durch $\mathfrak{p}'$ gehenden Kante von K_2 und namentlich auch die vier Punkte, in welchen diese Kante und F_4 sich begegnen (zwei derselben sind mit $\mathfrak{p}'$ vereinigt).

Durch diese Bemerkungen ist nun eine bis auf die charakterisirten Ausnahmen eindeutige und reziproke Abbildung der F_4 auf F_3' gegeben, welche mit der in I. enthaltenen bis auf eine ganz unwesentliche Modification, die C_2 anbetrifft, übereinstimmt. Die 16 Geraden der F_4 ergeben sich z. B. wie dort, wenn man annimmt, es werde die auf F_3' gelegene Gerade γ_6 von den ebenfalls auf F_3' gelegenen Geraden

$$\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4\gamma_5;\ \lambda_{12}\lambda_{13}\lambda_{14}\lambda_{15}\lambda_{23}\lambda_{24}\lambda_{25}\lambda_{34}\lambda_{35}\lambda_{45};\ I_6'$$

nicht geschnitten. Jede derselben trifft dann nothwendiger Weise C_2 in einem Punkte, und demzufolge ist ihr Bild auf F_4 eine Gerade; die 16 so erzeugten Geraden mögen in derselben Reihenfolge wie ihre entsprechenden auf F_3' mit

$$g_1g_2g_3g_4g_5;\ l_{12}l_{13}l_{14}l_{15}l_{23}l_{24}l_{25}l_{34}l_{35}l_{45};\ G_6$$

bezeichnet werden. Das angewandte Transformationsprinzip zeigt unmittelbar, dass in Bezug auf Schneiden oder Nichtschneiden die Gruppe der 16 Geraden auf F_4 dieselbe Anordnung zeigt, wie die oben verzeichnete, aus den 27 Geraden der F_3' hergestellte Gruppe von 16 Geraden, wie übrigens schon in II. nachgewiesen ist.

Ueberhaupt stimmen die beiden gegebenen Abbildungen der Fläche vierten Grades mit einem Doppelkegelschnitt auf eine Fläche dritten Grades überein, immerhin mit dem Unterschiede, dass die zweite derselben eine directere ist, indem durch sie F_4 und F_3' in Bezug auf P geradezu perspectivisch aufeinander bezogen sind. Diese zweite wird darum vorzugsweise geeignet sein, die Eigenschaften der F_4 aus denen der F_3' abzuleiten. Von besonderm Nutzen ist dies, wenn man bei Behandlung der F_4 auf die Unterscheidung von reellen und imaginären Elementen und auf die Specialfälle eingehen will; die bekannten Preisschriften der Herren *Cremona* und *Sturm* bieten hinreichendes Material zu derartigen Uebertragungen. Weniger geeignet hingegen erscheint die Methode, wenn es sich um Erledigung der Fragen handelt, welche sich an die Existenz der von Herrn *Kummer* *) nachgewiesenen fünf doppelt berührenden Kegel zweiten Grades der untersuchten Flächen knüpfen, Fragen,

---

*) „Ueber die Flächen vierter Ordnung, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten gelegen sind". Dieses Journal Bd. 63, pag. 66 etc.

auf welche übrigens Herr *Clebsch* in der früher zitirten Abhandlung in vollem Umfange eingegangen ist.

V.

Unter den im Vorigen betrachteten Flächen vierten Grades sind besonders diejenigen von Interesse, deren Doppelcurve der unendlich entfernte imaginäre Kreis k_∞ des Raumes ist, weil dieselben unter Umständen ein sogenanntes tripelorthogonales Flächensystem bilden können *).

Sei F_4 eine solche Fläche, P ein auf ihr gelegener Punkt, so wird vermittelst des Princips der reciproken Radien F_4 in eine Fläche dritten Grades F_3 verwandelt, wenn P als Transformationscentrum gewählt wird, und zwar enthält diese F_3 den Kreis k_∞ seiner ganzen Ausdehnung nach. Will man also alle die genannten F_4 untersuchen, so ist bloss nöthig festzusetzen, welche Eigenschaften die Fläche dritten Grades dadurch erlangt, dass sie den unendlich entfernten imaginären Kreis des Raumes enthält.

Wenn k_∞ auf einer reellen Fläche F_3 liegen soll, so wird aus derselben durch die unendlich entfernte Ebene des Raumes ausser k_∞ noch eine reelle Gerade g_∞ ausgeschnitten. Jede durch g_∞ gelegte Ebene schneidet F_3 noch in einem Kegelschnitte; von den sämmtlichen derart zu erzeugenden Kegelschnitten wird ausser k_∞ keiner ein Kreis sein, wenn nicht die Schnittpunkte von g_∞ und k_∞ Doppelpunkte der Fläche sind, was ausgeschlossen sein mag. Von den Geraden der F_3 schneiden 10 die Gerade g_∞, während die 16 andern k_∞ schneiden. Von der letztern kann keine reell sein; man schliesst daraus leicht, dass die vorliegende F_3 entweder 3 oder 7 reelle Geraden hat, von denen eine g_∞ ist. Es liegen also auf der Fläche entweder 2 oder 6 Schaaren von Kreisen, die sich in reellen Ebenen befinden und, wie man zeigen kann, reell sind.

Daraus folgen für die allgemeinsten Flächen vierten Grades, welche den imaginären unendlich entfernten Kreis des Raumes zur Doppelpunktscurve haben, in Bezug auf die Realität der in ihnen gelegenen Kreise die nachstehenden Eigenschaften:

Es giebt zwei verschiedene Arten von diesen Flächen. Auf einer Fläche der ersten Art liegen zwei Grundkreise, die sich in zwei Punkten schneiden,

---

*) Man vergl. die Noten der Herren *Darboux* und *Moutard:* „Comptes rendus“: Vol. 59, pag. 241 etc.

und von denen jeder die Eigenschaft hat, dass eine durch ihn gelegte Kugel aus F_4 noch einen Kreis ausschneidet. Es entstehen so zwei Schaaren von Kreisen; durch jeden Punkt auf F_4 geht ein Kreis aus jeder Schaar, und die beiden auf diese Weise bestimmten Kreise haben noch einen der beiden Punkte gemein, in welchen die Grundkreise sich treffen. Jede Kugel, welche einen Kreis der ersten Schaar enthält, schneidet aus F_4 noch einen Kreis der zweiten Schaar aus, so dass die beiden Grundkreise selbst Glieder der genannten Kreisschaaren sind.

Auf einer Fläche der zweiten Art liegen sechs reelle Kreisschaaren, von denen je zwei conjugirt sind. Je zwei der conjugirten Kreisschaaren stehen zueinander in demselben Verhältniss, wie die beiden auf einer Fläche der ersten Art gelegenen Kreisschaaren.

Auf weitere Einzelheiten soll hier nicht eingegangen werden, nur sei zum Schlusse bemerkt, dass eine Fläche dritten Grades nicht nothwendig den Kreis k_∞ enthalten muss, damit auf ihr eine Schaar reeller Kreise liege. Die Discussion dieses Falles, so wie überhaupt die Beantwortung der Frage nach allen Gestalten der Flächen dritten Grades, auf welchen eine endliche oder unendliche Anzahl von Kreisen enthalten ist, liegt nicht innerhalb der Grenzen dieses Aufsatzes, dessen Grundgedanke in der Bestätigung der von Herrn *Jordan* ausgesprochenen Vermuthung liegt.

Zürich, den 5. März 1869.

Beiträge zur Theorie der durch die *Heine*sche Reihe:

$$1+\frac{1-q^a}{1-q}\cdot\frac{1-q^b}{1-q^c}\cdot x+\frac{1-q^a}{1-q}\cdot\frac{1-q^{a+1}}{1-q^2}\cdot\frac{1-q^b}{1-q^c}\cdot\frac{1-q^{b+1}}{1-q^{c+1}}\cdot x^2+\cdots$$

darstellbaren Functionen.

(Von Herrn *J. Thomae* in Halle.)

Es soll hier die von Herrn *Heine* in die Analysis eingeführte Reihe:

$$1+\sum_{1}^{\infty}{}_{(n)}\,x^n\cdot\frac{1-q^a}{1-q}\cdot\frac{1-q^{a+1}}{1-q^2}\cdots\frac{1-q^{a+n-1}}{1-q^n}\cdot\frac{1-q^b}{1-q^c}\cdot\frac{1-q^{b+1}}{1-q^{c+1}}\cdots\frac{1-q^{b+n-1}}{1-q^{c+n-1}},$$

welche derselbe Bd. 34, pag. 285 dieses Journals ausführlich abgehandelt hat, von einem ähnlichen Gesichtspunkte aus betrachtet werden, wie es *Riemann* mit der nahe verwandten *Gauss*ischen Reihe $F(a, b, c, x)$ gethan hat. Bei dieser Behandlung ergiebt sich die von Herrn *Heine* in der angeführten Abhandlung (pag. 325) gefundene Transformation als eine unmittelbare Folge der Definition, und gelingt es (Art. 4), den noch fehlenden Zusammenhang zwischen je drei beliebigen Integralen der Differenzengleichung, welcher die Reihe genügt, aufzufinden, und sowohl hierdurch, als auch durch directe Darstellung (Art. 5, Gl. 22), in jedem Falle die Fortsetzung einer *Heine*schen Reihe als Function ihres fünften Elementes über ihr Convergenzgebiet hinaus anzugeben, was in speciellen Fällen direct, oder, wenn man die Relationen (Art. 6) zwischen contiguen Functionen anwendet, auch allgemein durch die Gleichung (78.) der Abhandlung des Herrn *Heine* geleistet werden kann. Die Formen, unter welchen sich die *Heine*sche Reihe darstellen lässt, konnten hier vermehrt werden (Art. 5, Gl. 22, 23.). Die von Herrn *Heine* eingeführte Bezeichnung ist hier und da abgeändert worden, damit die Analogie mit der *Gauss*ischen Reihe, namentlich mit deren Behandlung durch *Riemann* (im 7ten Bande der Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen), welche hier stärker hervortreten soll, auch äusserlich werde.

Die angefügte Kettenbruchentwicklung stimmt zwar in ihren Resultaten mit den von Herrn *Heine* erhaltenen *) überein, durfte aber der Vollständigkeit halber nicht fehlen, und ist eine directe Uebertragung der schönen Methode

*) Bd. 57, pag. 231 dieses Journals.

Riemanns für die *Gauss*sche Reihe, welche die Convergenzbedingungen mit angiebt, auf den vorliegenden Fall. Als Einleitung schicke ich einige elementare Sätze der Differenzenrechnung voraus, und erinnere an einige zum Theil schon früher, namentlich von *Jacobi* im 32sten Bande des Journals behandelte Grundgebilde.

Bezeichnet man mit $\Delta\varphi(x)$ die Differenz $\varphi(qx)-\varphi(x)$, so wird die Differenzengleichung $\Delta\varphi(x)=0$ unendlich viele Integrale (Lösungen) haben, selbst wenn wir verlangen, was hier stets gethan wird, dass die Genüge leistende Function nur in einzelnen Punkten unstetig sei, und dass ihr Differentialquotient nach der complexen Variabeln x überall von den speciellen Werthen des Differentials dx unabhängig sei. Eine solche Function allein soll hier eine Function der complexen Variabeln x genannt werden, und wenn sie ausserdem der Differenzengleichung $\Delta\varphi(x)=0$ Genüge leistet, eine k-Function $(k, k(x))$ heissen. Eine k-Function verliert offenbar ihren Charakter in Bezug auf die Grösse q, der Differenzengleichung $\Delta\varphi(x)=0$ zu genügen, nicht, wenn in ihr $\frac{1}{q}$ statt q gesetzt wird. Beispiele derselben sind, $x^{\frac{2\pi i}{\lg q}}$, $\sin\left(\frac{2\pi \lg x}{\lg q}\right)$, etc., namentlich aber Quotienten von ϑ-Functionen mit dem Modul $\frac{1}{2}\lg q$ und dem Argument $\frac{1}{2}\lg x$. Es gilt für diese k-Functionen der wichtige Satz:

A. „*Eine einändrige k-Function, welche in einem Ringgebiete zwischen zwei im Punkte $x=0$ concentrischen Kreisen und auf einem derselben endlich ist, ist constant, wenn die positiv genommene Differenz der Logarithmen der beiden Radien mindestens eben so gross ist als der absolut genommene reelle Theil von* $\lg q$.

Sie spielen in der Differenzenrechnung eine Rolle, der der willkürlichen Constanten zu vergleichen in der Differentialrechnung, z. B. in dem Satze:

B. „*Die Differenzengleichung $\Delta\varphi(x)=f(x)$ besitzt, abgesehen von einer willkürlichen k-Function, die additiv hinzutreten kann, nur ein Integral (Lösung).*“

Dies Integral soll hier mit $Sf(x)\Delta\frac{\lg x}{\lg q}$ bezeichnet werden.

Ferner in dem Satze:

C. „*Zwischen je $n+1$ Integralen einer linearen homogenen Differenzengleichung n^{ter} Ordnung besteht stets eine lineare homogene Relation mit k-Functionen als Coefficienten.*“

Eine einfache Differenzengleichung führt auf diejenige Erweiterung der Potenz, welche von *Jacobi* in diesem Journal Bd. 32 behandelt ist, nämlich:

$$(1.)\qquad \Delta\varphi(x)=-\frac{x(q^\alpha-1)}{z-x}\cdot\varphi(x),\quad \text{oder}\quad \varphi(qx)=\frac{z-q^\alpha x}{z-x}\cdot\varphi(x),$$

woraus durch Wiederholung fliesst:

$$(1^{\alpha}.) \qquad \varphi(q^{\alpha}x) = \frac{z-q^{\alpha}x}{z-x}\cdot\frac{z-q^{\alpha+1}x}{z-qx}\cdots\frac{z-q^{\alpha+n-1}x}{z-q^{n-1}x}\cdot\varphi(x).$$

Setzen wir $\lim\limits_{n=\infty}\frac{\varphi(q^n x)}{(z-q^n x)^{\alpha}}=1$, so ist dadurch $\varphi(x)$ bestimmt, und genügt sowohl für Norm $(q)<1$, als auch für Norm $(q)>1$ der Differenzengleichung (1.). Für $z=0$ geht die Function in $(-x)^{\alpha}$, für $x=0$ in z^{α}, für $q=1$ in $(z-x)^{\alpha}$ über. Dividirt man die Function durch z^{α}, so erhält man eine Function von $\frac{x}{z}$, und es ist daher hinreichend allgemein, für z den Werth 1 zu setzen, was der Einfachheit wegen geschehen soll. Dann werde die Bezeichnung eingeführt:

$$p(\alpha, q, x) = \lim_{n=\infty}(1-q^n x)^{\alpha}\cdot\frac{1-x}{1-xq^{\alpha}}\cdot\frac{1-xq}{1-xq^{\alpha+1}}\cdots\frac{1-xq^{n-1}}{1-xq^{\alpha+n-1}},$$

und es mag gestattet sein, das zweite Element q, wo es ohne Zweideutigkeit möglich ist, fortzulassen.

Um diesen Grenzwerth für Norm $(q)>1$ zu berechnen, kann man denselben in die Formen:

$$p(\alpha, q, x) = \lim_{n=\infty}(-1)^{\alpha}\frac{x-1}{x-q^{-\alpha}}\cdot\frac{x-q^{-1}}{x-q^{-\alpha-1}}\cdots\frac{x-q^{-n+1}}{x-q^{-\alpha-n+1}}\cdot(x-q^{-n})^{\alpha}$$

$$= \lim_{n=\infty}(-x)^{\alpha}\cdot\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{xq^{\alpha}}}\cdot\frac{1-\frac{1}{xq}}{1-\frac{1}{xq^{\alpha+1}}}\cdots\frac{1-\frac{1}{xq^{n-1}}}{1-\frac{1}{xq^{\alpha+n-1}}}\cdot\left(1-\frac{1}{xq^{n}}\right)^{\alpha}$$

setzen, aus welchen sofort folgt:

$$(2.) \qquad \left(\frac{-1}{x}\right)^{\alpha}\cdot p(\alpha, q, x) = p\left(\alpha, \frac{1}{q}, \frac{1}{x}\right).$$

Für $p(\alpha, q, q)$ ist von Herrn *Heine* (Abh. pag. 309) die Bezeichnung $\Omega(\alpha)$ eingeführt. Wir wollen jedoch, um an die *Gauss*ische Π-Function zu erinnern,

$$p(\alpha, q, q) = (1-q)^{\alpha}.\Pi(\alpha, q)$$

setzen, weil $\Pi(\alpha, q)$ für $q=1$ in $\Pi(\alpha)$ übergeht. Dann folgt aus (2.)

$$\Pi(\alpha, q) = \Pi\left(\alpha, \frac{1}{q}\right),$$

so dass jede Π-Function, in der Norm $(q)>1$ ist, sofort durch eine ersetzt werden kann, in welcher die Norm des zweiten Elementes <1 ist. Bemerkenswerth ist die Gleichung:

$$\frac{1-q^{\alpha}}{1-q}\cdot\Pi(\alpha-1, q) = \Pi(\alpha, q),$$

die für den Fall Norm $(q)<1$ gilt. Unter derselben Voraussetzung findet man leicht die Gleichung:

$$(3.) \qquad p(\alpha, q, x).p(\beta, q, xq^{\alpha}) = p(\alpha+\beta, q, x),$$

und daraus

$$p(\alpha, q, x) = \frac{1}{p(-\alpha, q, xq^{\alpha})},$$

und wenn man in (3.), nach Hebung des Factors $1-x$, x der Eins gleichsetzt:

$$(3^a.) \qquad p(\beta, q, q^{\alpha}) = \frac{\Pi(\alpha+\beta-1, q)}{\Pi(\alpha-1, q)} \cdot (1-q)^{\beta}.$$

Die Differenzengleichung (1.) kann auch noch integrirt werden durch die Function:

$$\lim_{n=\infty} (-xz)^{\alpha} \cdot \frac{\frac{1}{z}-\frac{1}{x}q^{-\alpha+1}}{\frac{1}{z}-\frac{1}{x}q} \cdot \frac{\frac{1}{z}-\frac{1}{x}q^{-\alpha+2}}{\frac{1}{z}-\frac{1}{x}q^{2}} \cdots \frac{\frac{1}{z}-\frac{1}{x}q^{-\alpha+n}}{\frac{1}{z}-\frac{1}{x}q^{n}} \cdot \left(\frac{1}{z}-\frac{1}{x}q^{n}\right)^{\alpha}.$$

Wir beschränken uns auch hier auf den Fall $z=1$, und finden, dass diese Function, welche in diesem Falle mit $\pi(\alpha, q, x)$ oder $\pi(\alpha, x)$ bezeichnet werden mag, den Gleichungen

$$(4.) \quad \begin{cases} \pi(\alpha, q, x) = (-x)^{\alpha} p\left(\alpha, q, \frac{1}{xq^{\alpha-1}}\right) \text{ für Norm } (q)<1, \\ \left(\frac{-1}{xq^{\alpha-1}}\right)^{\alpha} \cdot \pi(\alpha, q, x) = p\left(\alpha, q, \frac{1}{xq^{\alpha-1}}\right) \text{ für Norm } (q)>1 \end{cases}$$

Genüge leistet. Durch Umkehrung folgen hieraus die Gleichungen:

$$(4^a.) \quad \begin{cases} \left(\frac{-1}{xq^{\alpha-1}}\right)^{\alpha} \cdot p(\alpha, q, x) = \pi\left(\alpha, q, \frac{1}{xq^{\alpha-1}}\right) \text{ für Norm } (q)<1, \\ p(\alpha, q, x) = (-x)^{\alpha} \pi\left(\alpha, q, \frac{1}{xq^{\alpha-1}}\right) \text{ für Norm } (q)>1. \end{cases}$$

Auch combinirt man noch leicht die Gleichungen:

$$(5.) \quad \begin{cases} p(\alpha, q, x) = \pi\left(\alpha, \frac{1}{q}, xq^{\alpha-1}\right) \text{ für Norm } (q)<1, \\ p(\alpha, q, x) = \pi\left(\alpha, \frac{1}{q}, xq^{\alpha-1}\right).q^{-\alpha(\alpha-1)} \text{ für Norm } (q)>1. \end{cases}$$

Da nun $p(\alpha, x)$, $\pi(\alpha, x)$ Lösungen einer und derselben Differenzengleichung sind, so können diese Functionen nach dem Satze (*C.*) sich nur durch eine k-Function als Factor unterscheiden. Es sei Norm $(q)<1$,

$$\frac{\lg(q)}{2} = a, \qquad \theta_{11}(v) = e^{v+\frac{a}{4}} \cdot \sum_{-\infty}^{\infty}{}_{(n)} e^{an^2+2n\left(v+\frac{a+i\pi}{2}\right)},$$

$$\sigma(\alpha, q, x) = \sigma(\alpha, x) = \frac{\theta_{11}\left(\frac{1}{2}\lg(xq^{\alpha})\right)}{\theta_{11}\left(\frac{1}{2}\lg(x)\right)} \cdot e^{\alpha[\lg(x\sqrt{q})+i\pi]},$$

so folgt durch Vergleichung der Punkte, für welche die Functionen $\sigma(\alpha, x)$ und $\frac{\pi(\alpha, x)}{p(\alpha, x)}$ verschwinden und unendlich gross werden, erst als Functionen von x, dann für $x = 1$ als Functionen von α, dass sie sich nur durch einen von x und α unabhängigen Factor unterscheiden können, und für $\alpha = 0$ folgt, dass dieser Eins sei. So hat man:

$$(6.) \qquad \sigma(\alpha, q, x) = \frac{\pi(\alpha, q, x)}{p(\alpha, q, x)} = (-1)^{\alpha} \cdot \frac{\theta_{11}(\frac{1}{2}\lg(xq^{\alpha}))}{\theta_{11}(\frac{1}{2}\lg(x))} \cdot e^{\alpha \lg(x) \lg q},$$

woraus für $x = 1$ die von Herrn *Heine* (Abh. pag. 310) gefundene Relation fliesst:

$$(6^{a}.) \qquad \frac{1-q}{\Pi(\alpha-1, q)\Pi(-\alpha, q)} = -2\frac{\theta_{11}\left(\frac{\alpha \lg(q)}{2}\right)}{\theta'_{11}(0)} q^{\frac{\alpha}{2}},$$

woraus umgekehrt auch die Gleichung (6.) leicht hergeleitet werden kann.

Bemerkenswerth ist, dass $\sigma(\alpha, 1, x) = 1$ ist, und dass der Satz gilt:

D. „Die Functionen $q^{\alpha\frac{\alpha-1}{2}} \cdot \sigma(\alpha, q, x)$ *und* $\frac{q^{\alpha\frac{\alpha-1}{2}} \cdot (-1)^{\alpha}}{\Pi(\alpha-1, q)\Pi(-\alpha, q)}$ *bleiben ungeändert, wenn* α *in* $\alpha+1$ *übergeht.“*

Die Untersuchung für Norm $(q) > 1$ in Bezug auf die σ-Function unterdrücken wir, beweisen aber noch den für die Folge brauchbaren Satz:

E. „Die Functionen $p\left(\alpha, \frac{1}{q}, x\right)$ *und* $p(\alpha, q, xq^{1-\alpha})$, *und ebenso die Functionen* $\pi\left(\alpha, \frac{1}{q}, x\right)$ *und* $\pi(\alpha, q, xq^{1-\alpha})$ *unterscheiden sich von einander nur durch einen k-Factor.“*

Es ist nämlich nach (5.) und (6.) für Norm $(q) < 1$

$$(7.) \qquad \begin{cases} q^{-\alpha(\alpha-1)} \cdot p\left(\alpha, \frac{1}{q}, x\right) = \pi(\alpha, q, xq^{1-\alpha}) = p(\alpha, q, xq^{1-\alpha}) \cdot \sigma(\alpha, q, xq^{1-\alpha}), \\ \pi\left(\alpha, \frac{1}{q}, x\right) = p(\alpha, q, xq^{1-\alpha}) = \frac{\pi(\alpha, q, xq^{1-\alpha})}{\sigma(\alpha, q, xq^{1-\alpha})}. \end{cases}$$

Betrachtet man, wie es hier nöthig ist, die ϑ-Functionen als Elementargebilde, so ist jede Darstellung einer π-Function auch eine Darstellung einer p-Function. Diese Darstellungen sind sehr mannigfaltig, wir lassen die wichtigsten hier folgen.

Neu dürften davon nur die Partialbruchzerlegungen sein. Ist Norm $(q) < 1$, so wird, wenn wir hier und auch später immer das Product

$$(1-q^{\lambda}) \cdot (1-q^{\lambda+1}) \ldots (1-q^{\lambda+n-1})$$

bei beliebigem λ für $n = 0$ durch die Einheit ersetzen:

$$(8.)\quad \begin{cases} p(\alpha, q, x) = \lim\limits_{n=\infty}(1-xq^n)^\alpha . \prod\limits_{0}^{n-1}{}_{(\mu)}\left(\dfrac{1-xq^\mu}{1-xq^{\alpha+\mu}}\right) \\ = \sum\limits_{0}^{\infty}{}_{(n)}\, x^n . \dfrac{q^\alpha-1}{1-q}\cdot\dfrac{q^\alpha-q}{1-q^2}\cdots\dfrac{q^\alpha-q^{n-1}}{1-q^n} = \sum\limits_{0}^{\infty}{}_{(n)}\,(xq^\alpha)^n\cdot\dfrac{1-q^{-\alpha}}{1-q}\cdot\dfrac{1-q^{-\alpha+1}}{1-q^2}\cdots\dfrac{1-q^{-\alpha+n-1}}{1-q^n} \\ = \left\{\sum\limits_{0}^{\infty}{}_{(n)}\dfrac{(-x)^n . q^{n\frac{n-1}{2}}}{(1-q)\cdot(1-q^2)\cdots(1-q^n)}\right\} : \left\{\sum\limits_{0}^{\infty}{}_{(n)}\dfrac{(-xq^\alpha)^n . q^{n\frac{n-1}{2}}}{(1-q)\cdot(1-q^2)\cdots(1-q^n)}\right\} \\ = \dfrac{(1-q)^{\alpha+1}}{\Pi(-\alpha-1, q)}\cdot\sum\limits_{0}^{\infty}{}_{(n)}\dfrac{1-q^{\alpha+1}}{1-q}\cdot\dfrac{1-q^{\alpha+2}}{1-q^2}\cdots\dfrac{1-q^{\alpha+n}}{1-q^n}\cdot\dfrac{q^{-\alpha n}}{1-xq^{\alpha+n}} . \end{cases}$$

Der Reihenquotient der vorletzten Gleichung ist durchaus convergent, die Partialbruchzerlegung der letzten dagegen nur brauchbar, so lange Norm $(q^{-\alpha}) < 1$. Für Norm $(q) > 1$ ist:

$$(8^a.)\quad \begin{cases} p(\alpha, q, x) = (-x)^\alpha . \lim\limits_{n=\infty}\left(1-\dfrac{1}{xq^n}\right)^\alpha . \prod\limits_{0}^{n-1}{}_{(\mu)}\left(\dfrac{1-\dfrac{1}{xq^\mu}}{1-\dfrac{1}{xq^{\alpha+\mu}}}\right) \\ = (-x)^\alpha . \sum\limits_{0}^{\infty}{}_{(n)}\left(\dfrac{1}{xq^\alpha}\right)^n\cdot\dfrac{q^\alpha-1}{1-q}\cdot\dfrac{q^\alpha-q}{1-q^2}\cdots\dfrac{q^\alpha-q^{n-1}}{1-q^n} \\ = (-x)^\alpha . \sum\limits_{0}^{\infty}{}_{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)^n\cdot\dfrac{1-q^{-\alpha}}{1-q}\cdots\dfrac{1-q^{-\alpha+n-1}}{1-q^n} \\ = \left\{(-x)^\alpha . \sum\limits_{0}^{\infty}{}_{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)^n\cdot\dfrac{1}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}\right\} : \left\{\sum\limits_{0}^{\infty}{}_{(n)}\left(\dfrac{1}{xq^\alpha}\right)^n\cdot\dfrac{1}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}\right\} \\ = \dfrac{(-1)^\alpha . x^{\alpha+1}\cdot\left(1-\dfrac{1}{q}\right)^{\alpha+1}}{\Pi(-\alpha-1, q)}\cdot\sum\limits_{0}^{\infty}{}_{(n)}\dfrac{1-q^{\alpha+1}}{1-q}\cdot\dfrac{1-q^{\alpha+2}}{1-q^2}\cdots\dfrac{1-q^{\alpha+n}}{1-q^n}\cdot\dfrac{q^{\alpha+n}}{xq^{\alpha+n}-1} . \end{cases}$$

Die Partialbruchentwicklung kann nur gebraucht werden, wenn Norm $(q^{-\alpha}) > 1$ ist. Vermittelst der Gleichung (3.) findet man aus derselben, wenn Norm $(q) < 1$ und Norm $(q^{-\alpha}) > 1$ ist:

$$(9.)\quad \frac{1}{p(\alpha, q, x)} = \frac{(1-q)^{1-\alpha}}{\Pi(\alpha-1, q)}\sum_{0}^{\infty}{}_{(n)}\frac{q^\alpha-q}{1-q}\cdot\frac{q^\alpha-q^2}{1-q^2}\cdots\frac{q^\alpha-q^n}{1-q^n}\cdot\frac{1}{1-q^n x} .$$

Für Norm $(q) < 1$ ist ferner:

$$(10.)\quad \begin{cases} \pi(\alpha, q, x) = (-x)^\alpha . \lim\limits_{n=\infty}\left(1-\dfrac{q^n}{x}\right)^\alpha . \prod\limits_{1}^{n}{}_{(\mu)}\left(\dfrac{1-\dfrac{1}{x}q^{\mu-\alpha}}{1-\dfrac{1}{x}q^\mu}\right) \\ = (-x)^\alpha . \sum\limits_{0}^{\infty}{}_{(n)}\left(\dfrac{1}{xq^{\alpha-1}}\right)^n\dfrac{q^\alpha-1}{1-q}\cdot\dfrac{q^\alpha-q}{1-q^2}\cdots\dfrac{q^\alpha-q^{n-1}}{1-q^n} \\ = \left\{(-x)^\alpha . \sum\limits_{0}^{\infty}{}_{(n)}\dfrac{\left(\dfrac{-1}{xq^{\alpha-1}}\right)^n . q^{n\frac{n-1}{2}}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}\right\} : \left\{\sum\limits_{0}^{\infty}{}_{(n)}\dfrac{\left(\dfrac{-q}{x}\right)^n . q^{n\frac{n-1}{2}}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}\right\} \\ = \dfrac{(-1)^\alpha . x^{\alpha+1}(1-q)^{\alpha+1}}{\Pi(-\alpha-1, q)}\cdot\sum\limits_{0}^{\infty}{}_{(n)}\dfrac{q^{-\alpha}-q}{1-q}\cdot\dfrac{q^{-\alpha}-q^2}{1-q^2}\cdots\dfrac{q^{-\alpha}-q^n}{1-q^n}\cdot\dfrac{1}{1-xq^{n+1}} . \end{cases}$$

In der letzten Gleichung muss Norm $(q^{-\alpha})<1$ sein. Für Norm $(q)>1$ ist:

$$(10^{\alpha}.)\quad \begin{cases} \pi(\alpha, q, x) = \lim\limits_{n=\infty}(1-xq^{-n})^{\alpha}.\prod\limits_{1}^{n}{}_{(\mu)}\left(\frac{1-xq^{\alpha-\mu}}{1-xq^{-\mu}}\right) \\ = \sum\limits_{0}^{\infty}{}_{(n)}\left(\frac{x}{q}\right)^{n}\frac{q^{\alpha}-1}{1-q}.\frac{q^{\alpha}-q}{1-q^{2}}\cdots\frac{q^{\alpha}-q^{n-1}}{1-q^{n}} \\ = \left\{\sum\limits_{0}^{\infty}{}_{(n)}\frac{(xq^{\alpha-1})^{n}}{(1-q)(1-q^{2})\ldots(1-q^{n})}\right\}:\left\{\sum\limits_{0}^{\infty}{}_{(n)}\frac{(xq^{-1})^{n}}{(1-q)(1-q^{2})\ldots(1-q^{n})}\right\} \\ = \frac{\left(1-\frac{1}{q}\right)^{\alpha+1}}{\Pi(-\alpha-1, q)}.\sum\limits_{0}^{\infty}{}_{(n)}\frac{1-q^{\alpha+1}}{1-q}.\frac{1-q^{\alpha+2}}{1-q^{2}}\cdots\frac{1-q^{\alpha+n}}{1-q^{n}}.\frac{q^{n+1}}{xq^{n+1}-1}, \end{cases}$$

welche letzte Gleichung nur, so lange Norm $(q^{\alpha})<1$ ist, giltig ist.

Als eine Erweiterung des Logarithmus lässt sich, wenn Norm $(q)<1$ ist, die Function ansehen:

$$(11.)\qquad L(q, x)=\frac{\lg x}{\lg q}+\sum\limits_{1}^{\infty}{}_{(n)}\frac{q^{n}}{x-q^{n}}=\frac{\lg x}{\lg(q)}+\sum\limits_{1}^{\infty}{}_{(n)}\left(\frac{q}{x}\right)^{n}\frac{1}{1-q^{n}},$$

welche der Differenzengleichung genügt:

$$(12.)\qquad \Delta L(q, x)=\frac{x}{x-1},$$

welcher auch noch genügt werden kann durch die Function:

$$\Delta x=\sum\limits_{1}^{\infty}{}_{(n)}\frac{x^{n}}{1-q^{n}}=x.\sum\limits_{0}^{\infty}{}_{(n)}\frac{q^{n}}{1-q^{n}x}.$$

Aus Satz $(B.)$ ergiebt sich:

$$(13.)\qquad L(x)-\Delta(x)=\frac{\lg(x\sqrt{q})}{\lg q}+\frac{\partial\lg.\theta_{11}(\frac{1}{2}\lg x)}{\partial\lg x},$$

welche Function mit $\sigma(\lg, x)$ bezeichnet werden kann. Weiter soll hier auf die logarithmischen Functionen nicht eingegangen werden.

Nun wollen wir unter

$$(15.)\qquad \sum\limits_{x}^{xq^{n}}f(x)\Delta\frac{\lg x}{\lg q}\quad\text{oder}\quad\sum\limits_{x}^{xq^{n}}f(x).\frac{\Delta x}{x.(q-1)}$$

die Summe $\sum\limits_{0}^{n-1}{}_{(\mu)}f(xq^{\mu})$ verstehen, wenn unter n eine ganze Zahl verstanden wird. (Ist dann $Sf(x)\Delta\frac{\lg x}{\lg q}=F(x)$, so ist $\sum\limits_{x}^{xq^{n}}f(x)\Delta\frac{\lg x}{\lg q}=F(xq^{n})-F(x)+k(x)$, denn es ist sowohl $\Delta(F(xq^{n})-F(x))=f(xq^{n})-f(x)$, als auch $\Delta\left(\sum\limits_{0}^{n-1}{}_{(\mu)}f(xq^{\mu})\right)=f(xq^{n})-f(x).$) Diese Ausdrücke nennen wir bestimmte Summen, und beschränken uns in ihrer Anwendung auf den Fall Norm $(q)<1$. Die be-

stimmte Summe $\overset{q^x}{\underset{1}{S}} s^\lambda . p(\mu, sq) . \frac{\Delta s}{q-1}$, in welcher Norm $(q^{\lambda+1}) < 1$ sein mag, ist demnach gleich

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{(n)} q^{n(\lambda+1)} . p(\mu, q^{n+1}) = \Pi(\mu, q) . \sum_{0}^{\infty}{}_{(n)} . q^{n(\lambda+1)} . \frac{1-q^{\mu+1}}{1-q} . \frac{1-q^{\mu+2}}{1-q^2} \cdots \frac{1-q^{\mu+n}}{1-q^n} . (1-q)^\mu$$

$$= (1-q)^\mu . \Pi(\mu, q) . p(-\mu-1, q^{\mu+\lambda+2}) = \frac{\Pi(\mu, q) . \Pi(\lambda, q)}{\Pi(\mu+\lambda+1, q) . (1-q)},$$

also

$$(16.) \qquad \overset{q^x}{\underset{1}{S}} s^\lambda . p(\mu, sq) \Delta s = -\frac{\Pi(\mu, q) . \Pi(\lambda, q)}{\Pi(\mu+\lambda+1, q)} .$$

Setzt man $q = 1-\varepsilon$ und nähert ε der Null, so fliesst hieraus:

$$\int_0^1 s^\lambda . (1-s)^\mu . ds = \frac{\Pi(\mu)\Pi(\lambda)}{\Pi(\mu+\lambda+1)},$$

welche Herleitung des *Euler*schen Integrals bemerkenswerth erscheint.

Diese Sätze dienen als Einleitung in unsere Untersuchungen über die *Heine*sche Reihe. Wir glaubten auf eingehendere Beweisführung derselben Verzicht leisten zu können, weil dieselbe als elementar anzusehen ist.

Art. 1.

Zur Definition der Functionen, welche den Gegenstand unserer Untersuchungen bilden, die durch die *Heine*sche Reihe dargestellt werden, wählen wir eine ganz ähnliche, als *Riemann* für die durch die *Gauss*ische Reihe dargestellten angewendet hat. Nämlich:

I. „*Die Function* $P\left(\begin{matrix}\alpha, \beta, \gamma, \\ \alpha', \beta', \gamma',\end{matrix} q, x\right)$ *als Function der complexen Variabeln* x *verzweigt sich nur für* $x = 0$ *und für* $x = \infty$, *und ihre Zweige können nur in diesen beiden Punkten vieldeutig sein*“.

II. „*Die Summe der Exponenten* $\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'$ *ist Eins, und keine der Differenzen* $\alpha-\alpha'$, $\beta-\beta'$, $\gamma-\gamma'$ *von der Form* $m+n\frac{2\pi i}{\lg q}$, *wenn* m *und* n *beliebige ganze positive oder negative Zahlen sind*“.

III. „*Die Function P ist in den Formen darstellbar:*

$$k_\alpha . P^\alpha + k_{\alpha'} . P^{\alpha'}, \quad k_\beta . P^\beta + k_{\beta'} . P^{\beta'}, \quad k_\gamma . P^\gamma + k_{\gamma'} . P^{\gamma'},$$

worin k_α, k_β *etc. k-Functionen sind, und* $P^\alpha . x^{-\alpha}$, $P^{\alpha'} . x^{-\alpha'}$ *durchaus einändrig und für* $x = 0$ *von* 0 *und* ∞ *verschieden sind; worin* $P^\beta . \left(\frac{1}{x}\right)^{-\beta}$, $P^{\beta'} . \left(\frac{1}{x}\right)^{-\beta'}$ *durchaus einändrig und für* $x = \infty$ *von* 0 *und* ∞ *verschieden sind; worin*

$P^{\gamma}.p(-\gamma, q, x)$, $P^{\gamma'}.p(-\gamma', q, x)$ überall endlich sind und nur um die Punkte $x=0$, $x=\infty$ herum verzweigt und in den Zweigen nur an diesen Stellen vieldeutig oder unendlich sein können".

Hieraus zunächst einige Folgerungen:

IV. „Eine P-Function verliert ihren Charakter als solche nicht, wenn sie mit einem k-Factor multiplicirt wird."

V. „In einer P-Function können die Exponenten eines jeden Paares, nämlich α mit α', β mit β', γ mit γ' vertauscht werden."

Aus der in der Einleitung unter (2.) gegebenen Gleichung

$$p\left(\alpha, \frac{1}{q}, \frac{1}{x}\right) = \left(\frac{-1}{x}\right)^{\alpha}.p(\alpha, q, x)$$

folgt der Satz:

VI. „In einer P-Function können die beiden ersten Exponentenpaare unter sich vertauscht werden, wenn man gleichzeitig $\frac{1}{x}$ statt x, $\frac{1}{q}$ statt q setzt, so dass

$$P\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma, \\ \alpha', & \beta', & \gamma',\end{pmatrix} q, x\Big) = P\begin{pmatrix}\beta, & \alpha, & \gamma, & \frac{1}{q}, & \frac{1}{x} \\ \beta', & \alpha', & \gamma', & & \end{pmatrix}$$

gesetzt werden kann."

Da hiernach

$$P\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma, & \frac{1}{q}, \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & & \end{pmatrix} x\Big) = P\begin{pmatrix}\beta, & \alpha, & \gamma, & \\ \beta', & \alpha', & \gamma', & q, & \frac{1}{x}\end{pmatrix}$$

ist, so wird die Allgemeinheit nicht beschränkt, wenn man Norm $(q) < 1$ voraussetzt, was in der Folge der Einfachheit halber überall geschehen soll.

Aus der Definition folgt ferner die Gleichung:

$$(1.) \qquad x^{\delta}.p(\varepsilon, x).P\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma, \\ \alpha', & \beta', & \gamma',\end{pmatrix} q, x\Big) = P\begin{pmatrix}\alpha+\delta, & \beta-\delta-\varepsilon, & \gamma+\varepsilon, \\ \alpha'+\delta, & \beta'-\delta-\varepsilon, & \gamma'+\varepsilon,\end{pmatrix} q, xq^{\varepsilon}\Big),$$

und wenn γ Null ist, so folgt aus der Gleichung (7.) der Einleitung:

$$(2.) \qquad P\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & 0, \\ \alpha', & \beta', & \gamma',\end{pmatrix} q, x\Big) = P\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & 0, & \frac{1}{q}, \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & & \end{pmatrix} xq^{-\gamma'-1}\Big).$$

Sind nun P', P'' von einander unabhängige Zweige*) einer P-Function, so können P^{α}, $P^{\alpha'}$ linear und homogen in P', P'' ausgedrückt werden, mit k-Functionen als Coefficienten, daher auch in P^{β}, $P^{\beta'}$; P^{γ}, $P^{\gamma'}$ und umgekehrt. Wir wollen deshalb setzen:

---

*) Der Fall, in welchem keine unabhängigen Zweige existiren, kann leicht durch die Bemerkung erledigt werden, dass die Summe zweier P-Functionen mit denselben Exponenten wieder eine P-Function ist.

$$(3.)\quad \begin{cases} P^{\alpha} = k_{\alpha\beta}\,.P^{\beta} + k_{\alpha\beta'}\,.P^{\beta'} = k_{\alpha\gamma}\,.P^{\gamma} + k_{\alpha\gamma'}\,.P^{\gamma'}, \\ P^{\alpha'} = k_{\alpha'\beta}.P^{\beta} + k_{\alpha'\beta'}.P^{\beta'} = k_{\alpha'\gamma}.P^{\gamma} + k_{\alpha'\gamma'}.P^{\gamma'}, \\ P^{\beta} = k_{\beta\alpha}\,.P^{\alpha} + k_{\beta\alpha'}\,.P^{\alpha'} = k_{\beta\gamma}\,.P^{\gamma} + k_{\beta\gamma'}\,.P^{\gamma'}, \\ P^{\beta'} = k_{\beta'\alpha}.P^{\alpha} + k_{\beta'\alpha'}.P^{\alpha'} = k_{\beta'\gamma}.P^{\gamma} + k_{\beta'\gamma'}.P^{\gamma'}. \end{cases}$$

Bei der Untersuchung, in wie weit die P-Function durch die Eigenschaften *I, II, III* bestimmt sei, können wir uns auf den Fall beschränken, in welchem $\gamma = 0$ ist, weil der allgemeine auf diesen durch die Gleichung (1.) zurück geführt wird. Wir bemerken, dass unter dieser Voraussetzung $P(xq)$, $P(xq^2)$, mithin auch $\Delta P(x)$, $\Delta^2 P(x)$ genau wie $P(x)$ verzweigt sind, dass auch ΔP^{γ}, $\Delta^2 P^{\gamma}$ wie P^{γ} ausser für $x=0$, $x=\infty$ nirgend ∞ sind, dass endlich $(1-xq^{-\gamma'}).p(-\gamma', x)\,\Delta P^{\gamma'}$, $(1-xq^{-\gamma'}).(1-xq^{-\gamma'+1}).p(-\gamma', x).\Delta^2 P^{\gamma'}$ ausser für $x=0$, $x=\infty$ überall endlich und einändrig sind. Hieraus folgt, dass die Ausdrücke

$$\frac{\begin{vmatrix} \Delta^2 P^{\alpha}, & P^{\alpha} \\ \Delta^2 P^{\alpha'}, & P^{\alpha'} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P^{\alpha}, & \Delta P^{\alpha} \\ P^{\alpha'}, & \Delta P^{\alpha'} \end{vmatrix}}\cdot(1-xq^{1-\gamma'}) = \frac{\begin{vmatrix} \Delta^2 P^{\gamma}, & P^{\gamma} \\ \Delta^2 P^{\gamma'}, & P^{\gamma'} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P^{\gamma}, & \Delta P^{\gamma} \\ P^{\gamma'}, & \Delta P^{\gamma'} \end{vmatrix}}\cdot(1-xq^{1-\gamma'}) = \frac{\begin{vmatrix} \Delta^2 P^{\beta}, & P^{\beta} \\ \Delta^2 P^{\beta'}, & P^{\beta'} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P^{\beta}, & \Delta P^{\beta} \\ P^{\beta'}, & \Delta P^{\beta'} \end{vmatrix}}\cdot(1-xq^{1-\gamma'})$$

überall einändrig und eindeutig seien und nur für $x=\infty$ unendlich gross erster Ordnung werden. Diese Ausdrücke können daher gleich $-A+Bx$ gesetzt werden, wenn A, B Constante sind. Für $x=0$ folgt aus dem ersten der Ausdrücke $-A = \dfrac{(q^{\alpha}-1)^2-(q^{\alpha'}-1)^2}{(q^{\alpha'}-1)-(q^{\alpha}-1)} = -(q^{\alpha}+q^{\alpha'}-2)$, für $x=\infty$ folgt aus dem letzten Ausdrucke $B = q^{1-\gamma'}(q^{-\beta}+q^{-\beta'}-2)$.

Mit denselben Beweismitteln findet sich

$$\begin{vmatrix} \Delta P^{\alpha}, & \Delta^2 P^{\alpha} \\ \Delta P^{\alpha'}, & \Delta^2 P^{\alpha'} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} P^{\alpha}, & \Delta P^{\alpha} \\ P^{\alpha'}, & \Delta P^{\alpha'} \end{vmatrix} = \frac{(q^{\alpha}-1)(q^{\alpha'}-1)-xq^{1-\gamma'}(q^{-\beta}-1)(q^{-\beta'}-1)}{1-xq^{1-\gamma'}}.$$

Setzen wir diese Grössen in die Identität

$$\begin{vmatrix} \Delta^2 P, & \Delta P, & P \\ \Delta^2 P^{\alpha}, & \Delta P^{\alpha}, & P^{\alpha} \\ \Delta^2 P^{\alpha'}, & \Delta P^{\alpha'}, & P^{\alpha'} \end{vmatrix} = 0$$

ein, so finden wir für die unbekannte P-Function die Differenzengleichung zweiter Ordnung:

$$(4.)\quad \begin{cases} (1-xq^{1-\gamma'})\Delta^2 P - \big((q^{\alpha}+q^{\alpha'}-2) - xq^{1-\gamma'}(q^{-\beta}+q^{-\beta'}-2)\big)\Delta P \\ +\big((q^{\alpha}-1)(q^{\alpha'}-1) - xq^{1-\gamma'}(q^{-\beta}-1)(q^{-\beta'}-1)\big)P = 0 \end{cases}$$

oder

$$(4^a.)\quad (1-xq^{1-\gamma'})P(xq^2) - (q^{\alpha}+q^{\alpha'}-xq^{1-\gamma'}(q^{-\beta}+q^{-\beta'}))P(xq) + q^{\alpha+\alpha'}(1-x)P(x) = 0,$$

durch welche für die Function P aus Satz (*C.*) der Einleitung, zunächst wenn $\gamma = 0$, dann aber wegen (1.) auch, wenn γ beliebig ist, folgt:

VII. „Eine P-Function ist durch die Eigenschaften I, II, III, bis auf zwei willkürliche k-Functionen, von denen sie eine lineare homogene Function ist, völlig bestimmt.“

Art. 2.

Nach der Methode der unbestimmten Coefficienten lässt sich eine Lösung der Differenzengleichung nach um Eins steigenden oder fallenden Potenzen in eine Reihe $\Sigma a_n x^n$ entwickeln. Es bestimmen sich die Coefficienten aus einem von ihnen mittelst der Recursionsformel

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q^{1-\gamma'} \cdot \frac{q^n - q^{-\beta}}{q^{n+1} - q^{\alpha}} \cdot \frac{q^n - q^{-\beta'}}{q^{n+1} - q^{\alpha'}},$$

welcher

$$a_n = \frac{\text{Const.}\ ^*)}{\Pi(n-\alpha, q).\Pi(n-\alpha', q).\Pi(-n-\beta, q).\Pi(-n-\beta', q)}$$

genügt. Demnach bildet die Reihe:

$$P = \text{Const.}\,\Sigma \frac{x^n}{\Pi(n-\alpha, q).\Pi(n-\alpha', q).\Pi(-n-\beta, q).\Pi(-n-\beta', q)},$$

sowohl wenn die Exponenten von α oder α' an um eine Einheit zunehmen, als auch wenn sie von $-\beta$, $-\beta'$ an um eine Einheit abnehmen, eine Lösung der Differenzengleichung (4.) und zwar bezüglich diejenige partikuläre Lösung, die wir mit P^{α}, $P^{\alpha'}$; P^{β}, $P^{\beta'}$ bezeichnet haben. Nach Herrn *Heine,* welcher durch $\varphi(a, b, c, q, x,)$ eine Reihe bezeichnet, in welcher der Quotient des $n+1^{\text{ten}}$ Gliedes in das folgende gleich $\frac{1-q^{n+a}}{1-q^{n+1}} \cdot \frac{1-q^{n+b}}{1-q^{n+c}} \cdot x$, und das Anfangsglied Eins ist, lässt sich dies Resultat für den einfachsten Fall, in welchem $\alpha = 0$ ist, so ausdrücken:

$$P^{\alpha}\begin{pmatrix} 0, & \beta, & 0, \\ \alpha', & \beta', & \gamma', \end{pmatrix} q, x = \text{Const.}\,\varphi(\beta, \beta', 1-\alpha', q, x).$$

Wir wollen jedoch für das Zeichen φ das Zeichen F wählen, um an die *Gauss*ische Reihe zu erinnern, in welche die *Heine*sche für $q = 1$ übergeht, so dass demnach:

$$(5.)\quad \begin{cases} P^{\alpha}\begin{pmatrix} 0, & \beta, & 0, \\ \alpha', & \beta', & \gamma', \end{pmatrix} q, x = \text{Const.}\,F(\beta, \beta', 1-\alpha', q, x), \\ F(a, b, c, q, x) = P^{\alpha}\begin{pmatrix} 0, & a, & 0, \\ 1-c, & b, & c-a-b, \end{pmatrix} q, x \end{cases}$$

*) Statt Const. kann auch eine in n periodische Function wie $(-1)^n \sin n\pi$ etc. gesetzt werden.

ist. Multipliciren wir die erste dieser Gleichungen, nachdem wir $xq^{-\gamma}$ statt x gesetzt haben, mit $x^{\alpha}.p(\gamma, xq^{-\gamma})$ und nehmen die Constante gleich Eins an, so erhalten wir die beiden Gleichungen:

$$(6.)\quad \begin{cases} P^{\alpha}\left(\begin{matrix}\alpha, & \beta, & \gamma, \\ \alpha', & \beta', & \gamma', \end{matrix} q, x\right) \\ = x^{\alpha}.p(\gamma, xq^{-\gamma}).F(\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta'+\gamma, \alpha-\alpha'+1, q, xq^{-\gamma}) \\ = x^{\alpha}.p(\gamma', xq^{-\gamma'}).F(\alpha+\beta+\gamma', \alpha+\beta'+\gamma', \alpha-\alpha'+1, q, xq^{-\gamma'}), \end{cases}$$

deren letztere aus der ersteren durch Vertauschung von γ mit γ' fliesst. Vertauscht man α mit α', so erhält man:

$$(7.)\quad \begin{cases} P^{\alpha'} = x^{\alpha'}.p(\gamma, xq^{-\gamma}).F(\alpha'+\beta+\gamma, \alpha'+\beta'+\gamma, \alpha'-\alpha+1, q, xq^{-\gamma}) \\ \quad = x^{\alpha'}.p(\gamma', xp^{-\gamma'}).F(\alpha'+\beta+\gamma', \alpha'+\beta'+\gamma', \alpha'-\alpha+1, q, xq^{-\gamma'}). \end{cases}$$

P^{β}, $P^{\beta'}$ ergeben sich hieraus, wenn man α mit β, α' mit β', q mit $\frac{1}{q}$, x mit $\frac{1}{x}$ vertauscht und einen k-Factor streicht. Dann ist mit Rücksicht auf (2.) Art. 1:

$$(8.)\quad \begin{cases} P^{\beta} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta}.p\left(\gamma, \frac{q}{x}\right).F\left(\alpha+\beta+\gamma, \alpha'+\beta+\gamma, \beta-\beta'+1, q, \frac{q^{1+\gamma'}}{x}\right) \\ \quad = \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta}.p\left(\gamma', \frac{q}{x}\right).F\left(\alpha+\beta+\gamma', \alpha'+\beta+\gamma', \beta-\beta'+1, q, \frac{q^{1+\gamma}}{x}\right), \end{cases}$$

$$(9.)\quad \begin{cases} P^{\beta'} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta'}.p\left(\gamma, \frac{q}{x}\right).F\left(\alpha+\beta'+\gamma, \alpha'+\beta'+\gamma, \beta'-\beta+1, q, \frac{q^{1+\gamma'}}{x}\right) \\ \quad = \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta'}.p\left(\gamma', \frac{q}{x}\right).F\left(\alpha+\beta'+\gamma', \alpha'+\beta'+\gamma', \beta'-\beta+1, q, \frac{q^{1+\gamma}}{x}\right). \end{cases}$$

Die in $P^{\alpha}, P^{\alpha'}; P^{\beta}, P^{\beta'}$ noch willkürlich gebliebenen constanten Factoren sollen nun so gewählt werden, wie sie in den Gleichungen (6.), (7.), (8.) und (9.) enthalten sind. Für $\alpha=\gamma=0$ stimmen diese Lösungen mit denen des Herrn *Heine* (Abh. pag. 325) überein. Für die Bestandtheile P^{γ}, $P^{\gamma'}$ selbständige einfache Entwicklungen zu finden, gelingt uns nicht, wir können aber aus P^{α}, $P^{\alpha'}$ Ausdrücke zusammensetzen, welche den Charakter derselben haben. Es sei zunächst $\gamma=0$, so wird P^{γ} ausser für $x=0$, $x=\infty$ nirgend ∞ werden dürfen. Haben wir nun irgend eine Lösung der Differenzengleichung (4.), welche für alle x, deren Norm <1 ist, ausser etwa für $x=0$, endlich bleibt, so bleibt sie, ausser etwa für $x=0$ und $x=\infty$ überhaupt endlich, wenn sie für $x=1$ endlich ist. Denn zwischen den drei Werthen der P-Function $P(xq^2)$, $P(xq)$, $P(x)$ besteht die lineare Gleichung (4^a.). Vermittelst dieser kann man die Function aus dem Kreisgebiete Norm $(x)<1$ heraus fortsetzen, und es kann

sich hierbei nur dann ein unendlich grosser Werth ergeben, wenn der Coefficient von $P(x)$ verschwindet, was nur für $x=1$ geschieht, für welchen Werth $P(x)$ endlich vorausgesetzt wurde.

Demnach wird der Ausdruck

$$AP^{\alpha}+A'P^{\alpha'}=$$

$$p(\gamma, xq^{-\gamma})\left\{AP^{\alpha}\begin{pmatrix}\alpha, & \beta+\gamma, & 0, \\ \alpha', & \beta'+\gamma, & \gamma'-\gamma,\end{pmatrix} q,\ xq^{-\gamma}\right)+A'P^{\alpha'}\begin{pmatrix}\alpha, & \beta+\gamma, & 0, \\ \alpha', & \beta'+\gamma, & \gamma'-\gamma,\end{pmatrix} q,\ xq^{-\gamma}\Big)\Big\}$$

mit $p(-\gamma, x)$ multiplicirt, ausser für $x=0$, $x=\infty$ überall endlich bleiben, wenn die Constanten A, A' so eingerichtet sind, dass der in den Klammern $\{\}$ stehende Ausdruck für $x=q^{\gamma}$ endlich bleibt, und demnach gleich P^{γ} gesetzt werden können. Nehmen wir die Residuen A, A' aus dem folgenden Artikel vorauf, so können wir schreiben:

$$(10.)\quad\begin{cases}P^{\gamma}=\dfrac{P^{\alpha}.\Pi(\alpha'-\alpha-1,q).\Pi(\gamma-\gamma',q)q^{\alpha'(1+\gamma)}}{\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma',q).\Pi(-\alpha-\beta-\gamma',q)}+\dfrac{P^{\alpha'}.\Pi(\alpha-\alpha'-1,q).\Pi(\gamma-\gamma',q)q^{\alpha(1+\gamma)}}{\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma',q).\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma',q)}, \\ P^{\gamma'}=\dfrac{P^{\alpha}.\Pi(\alpha'-\alpha-1,q).\Pi(\gamma'-\gamma,q)q^{\alpha'(1+\gamma')}}{\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma,q).\Pi(-\alpha-\beta-\gamma,q)}+\dfrac{P^{\alpha'}.\Pi(\alpha'-\alpha-1,q).\Pi(\gamma'-\gamma,q)q^{\alpha(1+\gamma')}}{\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma,q).\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma,q)},\end{cases}$$

welche Relationen für $q=1$ sofort die richtigen Gleichungen zwischen den analogen Bestandtheilen *Riemann*scher P-Functionen liefern.

Aus den Resultaten dieses Artikels geht hervor, dass die Eigenschaften *I, II, III* eine Function *nicht mehr* beschränken, als die Differenzengleichung (4.). Nur ist für die Differenzengleichung die unter *II* über $\alpha-\alpha'$, $\beta-\beta'$, $\gamma-\gamma'$ gemachte Beschränkung nicht nothwendig, während für diesen Fall die Eigenschaften unter *III* nicht mehr bestehen.

Art. 3.

Somit sind die Bestandtheile P^{α}, $P^{\alpha'}$, ... durch Reihen von endlichem Convergenzgebiete dargestellt. Man erhält aus denselben leicht einen Ausdruck der P-Functionen durch bestimmte Summen, indem man, analog wie dies bei der *Gauss*ischen Reihe geschieht, in dem allgemeinen Gliede der Reihe für die Π-Functionen mittelst der Gleichung (16.) der Einleitung den *Euler*schen Integralen verwandte bestimmte Summen einsetzt und dann die Ordnung der Reihen und Integrationssummation vertauscht. Es ist nämlich

$$(11.)\quad\begin{cases}F(\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta'+\gamma, \alpha-\alpha'+1, q, xq^{-\gamma})=\dfrac{-\Pi(\alpha-\alpha', q)}{\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma', q).\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma, q)} \\ \qquad\asymp\overset{q^{\infty}}{\underset{1}{S}}s^{-\alpha'-\beta-\gamma'}.p(-\alpha'-\beta'-\gamma, qs).p(-\alpha-\beta-\gamma, xsq^{\alpha+\beta}).\Delta s,\end{cases}$$

worin β mit β' vertauscht werden kann. Löst man diese bestimmten Summen auf, so erhält man Ausdrücke, die von Herrn *Heine* (Abh. Gl. (78.)) in anderer Weise gefunden sind. Convergiren diese Entwicklungen, was für reelle q der Fall ist, wenn $\alpha+\beta'+\gamma$ resp. $\alpha+\beta+\gamma$ einen positiven reellen Theil hat, so bilden sie Darstellungen der *Heine*schen Reihe, die in der ganzen x-Ebene brauchbar sind. Hiernach ist:

$$(12.)\quad \begin{cases} P^{\alpha} = -\dfrac{x^{\alpha}.p(\gamma, xq^{-\gamma}).\Pi(\alpha-\alpha', q)}{\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma', q).\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma, q)} \\ \asymp \overset{q^{\infty}}{\underset{1}{S}} s^{-\alpha'-\beta-\gamma'}.p(-\alpha'-\beta'-\gamma, qs).p(-\alpha-\beta-\gamma, xsq^{\alpha+\beta})\,\Delta s, \end{cases}$$

woraus noch drei Darstellungen fliessen, wenn man β mit β' oder γ mit γ' oder beide zugleich vertauscht. Vertauschen wir in allen diesen α mit α', so erhalten wir vier Darstellungen von $P^{\alpha'}$, von denen eine folgt:

$$(13.)\quad \begin{cases} P^{\alpha'} = -\dfrac{x^{\alpha'}.p(\gamma, xq^{-\gamma}).\Pi(\alpha'-\alpha, q)}{\Pi(-\alpha-\beta-\gamma', q).\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma, q)} \\ \asymp \overset{q^{\infty}}{\underset{1}{S}} s^{-\alpha-\beta-\gamma'}.p(-\alpha-\beta'-\gamma, qs).p(-\alpha'-\beta-\gamma, xsq^{\alpha'+\beta})\,\Delta s. \end{cases}$$

In gleicher Weise lassen sich die Bestandtheile P^{β}, $P^{\beta'}$ behandeln. Man erhält dann:

$$(14.)\quad \begin{cases} P^{\beta} = -\dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)^{\beta}.p\left(\gamma, \frac{q}{x}\right).\Pi(\beta-\beta', q)}{\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma', q).\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma, q)} \\ \asymp \overset{q^{\infty}}{\underset{1}{S}} s^{-\alpha-\beta'-\gamma'}.p(-\alpha'-\beta'-\gamma, sq).p\left(-\alpha-\beta-\gamma, \dfrac{sq^{\alpha+\beta+\gamma+\gamma'+1}}{x}\right)\Delta s, \end{cases}$$

$$(15.)\quad \begin{cases} P^{\beta'} = -\dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)^{\beta'}.p\left(\gamma, \frac{q}{x}\right).\Pi(\beta'-\beta, q)}{\Pi(-\alpha-\beta-\gamma', q).\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma, q)} \\ \asymp \overset{q^{\infty}}{\underset{1}{S}} s^{-\alpha-\beta-\gamma'}.p(-\alpha'-\beta-\gamma, qs).p\left(-\alpha-\beta'-\gamma, \dfrac{sq^{\alpha+\beta'+\gamma+\gamma'+1}}{x}\right)\Delta s, \end{cases}$$

woraus noch je drei Darstellungen durch Vertauschung von α mit α' oder γ mit γ' oder beiden zugleich fliessen. Sind die reellen Theile sämmtlicher Exponenten α, α', ... positiv, also kleiner als Eins, und ist q positiv reell, so sind sämmtliche 16 unter (12.), (13.), (14.), (15.) gegebenen und angedeuteten bestimmten Summen convergent. In speciellen Fällen können diese Formen noch vermehrt werden.

Aus diesen Ausdrücken leitet man leicht eine von Herrn *Heine* (Abh. Gl. (79.)) gegebene Gleichung ab, aus der wir wichtige Folgerungen ziehen.

Aus (12.) folgt nämlich:

$$F(a, b, c, q, x)$$

$$= \frac{\Pi(c-1, q)}{\Pi(b-1, q)} \cdot \frac{p(-a, xq^a)}{(1-q)^{b-c}} \cdot \sum_{1}^{\infty}{}_{(n)} q^{nb} \cdot \frac{1-q^{c-b}}{1-q} \cdots \frac{1-q^{c-b+n-1}}{1-q^n} \cdot \frac{1-x}{1-xq^a} \cdots \frac{1-xq^{n-1}}{1-xq^{a+n-1}},$$

und wenn man x durch q^r ersetzt:

$$(16^a.)\quad F(a,b,c,q,q^r) = \frac{\Pi(c-1, q) \cdot \Pi(r-1, q)}{\Pi(a+r-1, q) \cdot \Pi(b-1, q)} \cdot (1-q)^{c-b-a} \cdot F(c-b, r, a+r, q, q^b)$$

oder, wenn man $a+r$ durch a, b durch s ersetzt, symmetrischer:

$$(16.)\quad p(a-r, q^r) \cdot F(a-r, s, c, q, q^r) = p(c-s, q^s) \cdot F(c-s, r, a, q, q^s).$$

Multipliciren wir $(16^a.)$ mit $(1-q^r)$ und setzen dann $r=0$, so folgt:

$$(17.)\quad \lim_{x=1}(1-x) \cdot F(a, b, c, q, x) = \frac{\Pi(c-1, q) \cdot (1-q)^{c+1-a-b}}{\Pi(b-1, q) \cdot \Pi(a-1, q)},$$

woraus die Grösse A' des vorigen Art. leicht folgt. Obgleich nun diese Gleichung (17.) für den Fall gefunden wurde, dass die bestimmten Summen convergiren, so gilt sie doch ganz allgemein, da die Functionen zu beiden Seiten der Gleichung als Functionen der complexen Variabeln α, α', ... γ' nur auf eine Weise stetig fortgesetzt werden können. Aus (12.) folgt weiter:

$$P^{\alpha}(q^{\gamma'}) = \frac{-q^{\alpha\gamma'} \cdot p(\gamma, q^{\gamma'-\gamma}) \cdot \Pi(\alpha-\alpha', q)}{\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma', q) \cdot \Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma, q)}$$

$$\times \sum_{1}^{q^{\infty}} s^{-\alpha'-\beta-\gamma'} \cdot p(-\alpha'-\beta'-\gamma, qs) \cdot p(-\alpha-\beta-\gamma, sq^{1-\alpha'-\beta'-\gamma}) \cdot \Delta s$$

$$= \frac{-q^{\alpha\gamma'} \cdot \Pi(\gamma'-1, q) \cdot \Pi(\alpha-\alpha', q) \cdot \sum_{1}^{q^{\infty}} s^{-\alpha'-\beta-\gamma'} \cdot p(\gamma'-\gamma-1, qs) \Delta s}{\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma', q) \cdot \Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma, q) \cdot \Pi(\gamma'-\gamma-1, q) \cdot (1-q)^{-\gamma}}$$

$$= \frac{q^{\alpha\gamma'} \cdot \Pi(\gamma'-1, q) \cdot \Pi(\alpha-\alpha', q)}{\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma, q) \cdot \Pi(-\alpha'-\beta-\gamma, q)} \cdot (1-q)^{\gamma},$$

und so findet man die Ausdrücke:

$$(18.)\quad \begin{cases} P^{\alpha}(q^{\gamma}) = \dfrac{q^{\alpha\gamma} \cdot \Pi(\gamma-1, q) \cdot \Pi(\alpha-\alpha', q)(1-q)^{\gamma'}}{\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma', q) \cdot \Pi(-\alpha'-\beta-\gamma', q)}, \\ P^{\alpha}(q^{\gamma'}) = \dfrac{q^{\alpha\gamma'} \cdot \Pi(\gamma'-1, q) \cdot \Pi(\alpha-\alpha', q)(1-q)^{\gamma}}{\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma, q) \cdot \Pi(-\alpha'-\beta-\gamma, q)}, \\ P^{\alpha'}(q^{\gamma}) = \dfrac{q^{\alpha'\gamma} \cdot \Pi(\gamma-1, q) \cdot \Pi(\alpha'-\alpha, q)(1-q)^{\gamma'}}{\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma', q) \cdot \Pi(-\alpha-\beta-\gamma', q)}, \\ P^{\alpha'}(q^{\gamma'}) = \dfrac{q^{\alpha'\gamma'} \cdot \Pi(\gamma'-1, q) \cdot \Pi(\alpha'-\alpha, q)(1-q)^{\gamma}}{\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma, q) \cdot \Pi(-\alpha-\beta-\gamma, q)}. \end{cases}$$

Für $\alpha=\gamma=0$ ergeben sich hieraus Summen *Heine*scher Reihen, deren fünftes Element $q^{\gamma'}$ ist, oder wenn sie nicht mehr convergiren, ihrer Fortsetzungen.

Man kann hieraus noch leicht die Werthe der Bestandtheile P^{α}, $P^{\alpha'}$ für $x = q^{\gamma-n}$, $q^{\gamma'-n}$ finden, wenn n eine ganze positive Zahl ist. Aus der Gleichung, die aus $(4^{\alpha}.)$ entspringt:

$$(q^{-\beta}+q^{-\beta'}-q^{\alpha}-q^{\alpha'})\,P(q^{\gamma'})+q^{\alpha+\alpha'}(1-q^{\gamma'-1})\,P(q^{\gamma'-1})=0$$

fliessen diese Werthe für $n=1$, dann liefert sie, wenn man $x=q^{\gamma'-2}$ setzt, für $n=2$, etc. ebenfalls die Gleichung $(4^{n}.)$ in recurrenter Weise.

Ebenso ist es leicht, die Residuen von P^{β}, $P^{\beta'}$ für $x=q^{\gamma+1}$, $q^{\gamma'+1}$ anzugeben; für $x=q$, q^2, q^3, ... werden P^{β}, $P^{\beta'}$ Null, wenn nicht γ oder γ' Null ist. Im letzteren Falle sind die Werthe $P^{\beta}(q)$, $P^{\beta'}(q)$, $P^{\beta'}(q^2)$ etc. angebbar, worauf wir hier jedoch nicht eingehen.

Art. 4.

Wir ersetzen nun in der Relation $P^{\alpha}=k_{\alpha\beta}.P^{\beta}+k_{\alpha\beta'}.P^{\beta'}$, P^{α} durch die Summe unter (12.), P^{β}, $P^{\beta'}$ durch ihre Reihenausdrücke, so ist:

$$\frac{x^{\alpha}.p(\gamma, xq^{-\gamma}).\Pi(\alpha-\alpha', q)}{\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma', q).\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma, q)}$$
$$\asymp \overset{q^{\infty}}{\underset{1}{S}} s^{-\alpha'-\beta-\gamma'}.p(-\alpha'-\beta'-\gamma, qs)\,p(-\alpha-\beta-\gamma, xsq^{\alpha+\beta})\,\Delta s$$
$$= -p\Big(\gamma, \frac{q}{x}\Big)\cdot\Big\{k_{\alpha\beta}\cdot\Big(\frac{1}{x}\Big)^{\beta}\cdot F^{\beta}+k_{\alpha\beta'}\cdot\Big(\frac{1}{x}\Big)^{\beta'}F^{\beta'}\Big\},$$

$$F^{\beta}=F\Big(\alpha+\beta+\gamma, \alpha'+\beta+\gamma, \beta-\beta'+1, q, \frac{q^{1+\gamma'}}{x}\Big),$$

$$F^{\beta'}=F\Big(\alpha+\beta'+\gamma, \alpha'+\beta'+\gamma, \beta'-\beta+1, q, \frac{q^{1+\gamma'}}{x}\Big)$$

einen Augenblick gesetzt. Diese Gleichung kann auch, wenn man die Gleichungen (4.), (5.), (6.) der Einleitung berücksichtigt, geschrieben werden:

$$\frac{x^{\alpha}.p(\gamma, xq^{-\gamma}).\Pi(\alpha-\alpha', q).\overset{q^{\infty}}{\underset{1}{S}} s^{-\alpha'-\beta-\gamma'}.p(-\alpha'-\beta'-\gamma, qs).\pi(-\alpha-\beta-\gamma, xsq^{\alpha+\beta})\,\Delta s}{\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma', q).\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma, q).\sigma(-\alpha-\beta-\gamma, xq^{\alpha+\beta})}$$
$$= -(-x^{-\gamma}).q^{\gamma^2}.\pi(\gamma, xq^{-\gamma}).\Big\{k_{\alpha\beta}.\Big(\frac{1}{x}\Big)^{\beta}.F^{\beta}+k_{\alpha\beta'}.\Big(\frac{1}{x}\Big)^{\beta'}.F^{\beta'}\Big\}$$

und weiter:

$$\frac{(-1)^{-\alpha-\beta+1}.\Pi(\alpha-\alpha', q).\sigma(\alpha+\beta, x)}{\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma', q).\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma, q)}$$
$$\asymp \overset{q^{\infty}}{\underset{1}{S}} s^{-\alpha'-\beta-\gamma'-\alpha-\beta-\gamma}.p(-\alpha'-\beta'-\gamma, qs).p\Big(-\alpha-\beta-\gamma, \frac{q^{1+\gamma}}{xs}\Big)\,\Delta s$$
$$= k_{\alpha\beta}.F^{\beta}+k_{\alpha\beta'}.\Big(\frac{1}{x}\Big)^{\beta'-\beta}.F^{\beta'}.$$

Nun mag Norm $(q^{\beta'-\beta}) < 1$ sein, setzen wir dann xq^{-m} statt x, und für m eine unendlich grosse ganze positive Zahl, so verschwindet $\left(\frac{q^m}{x}\right)^{\beta'-\beta}$, und wir erhalten

$$(19.) \qquad k_{\alpha\beta} = \frac{(-1)^{\alpha+\beta}.\Pi(\alpha-\alpha', q).\Pi(\beta'-\beta-1, q).\sigma(\alpha+\beta, x)}{\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma', q).\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma, q)},$$

woraus man durch Vertauschung von β mit β', $k_{\alpha\beta'}$ erhält. Denn in der Relation $P^\alpha = k_{\alpha\beta}.P^\beta + k_{\alpha\beta'}.P^{\beta'}$ bleibt die linke Seite ungeändert, wenn β und β' vertauscht werden, dasselbe muss daher auch auf der rechten Seite statt haben, was nur möglich ist, wenn $k_{\alpha\beta}$ durch Vertauschung von β und β' in $k_{\alpha\beta'}$ übergeht. Demnach ist:

$$(20.) \begin{cases} P^\alpha = \\ \dfrac{P^\beta.\Pi(\alpha-\alpha', q)\,\Pi(\beta'-\beta-1, q).\sigma(\alpha+\beta, x)}{\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma', q).\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma, q).(-1)^{-\alpha-\beta}} + \dfrac{P^{\beta'}.\Pi(\alpha-\alpha', q).\Pi(\beta-\beta'-1, q).\sigma(\alpha+\beta', x)}{\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma', q).\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma, q).(-1)^{-\alpha-\beta'}}, \\ P^{\alpha'} = \\ \dfrac{P^\beta.\Pi(\alpha'-\alpha, q).\Pi(\beta'-\beta-1, q).\sigma(\alpha'+\beta, x)}{\Pi(-\alpha-\beta-\gamma', q).\Pi(-\alpha-\beta-\gamma, q).(-1)^{-\alpha'-\beta}} + \dfrac{P^{\beta'}.\Pi(\alpha'-\alpha, q).\Pi(\beta-\beta'-1, q).\sigma(\alpha'+\beta', x)}{\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma', q).\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma, q).(-1)^{-\alpha'-\beta'}}. \end{cases}$$

Man berechnet unschwer nach derselben Methode $k_{\beta\alpha}$ etc. und findet:

$$(21.) \begin{cases} k_{\beta\alpha} = \dfrac{(-1)^{\alpha+\beta}.\Pi(\beta-\beta', q).\Pi(\alpha'-\alpha-1, q).\sigma(\alpha'+\beta', x)}{\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma', q).\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma, q).\sigma(-\gamma, x).\sigma(-\gamma', x)}, \\ k_{\beta\alpha'} = \dfrac{(-1)^{\alpha'+\beta}.\Pi(\beta-\beta', q).\Pi(\alpha-\alpha'-1, q).\sigma(\alpha+\beta', x)}{\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma', q).\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma, q).\sigma(-\gamma, x).\sigma(-\gamma', x)}, \\ k_{\beta'\alpha} = \dfrac{(-1)^{\alpha+\beta'}.\Pi(\beta'-\beta, q).\Pi(\alpha'-\alpha-1, q).\sigma(\alpha'+\beta, x)}{\Pi(-\alpha-\beta-\gamma', q).\Pi(-\alpha-\beta-\gamma, q).\sigma(-\gamma, x).\sigma(-\gamma', x)}, \\ k_{\beta'\alpha'} = \dfrac{(-1)^{\alpha'+\beta'}.\Pi(\beta'-\beta, q).\Pi(\alpha-\alpha'-1, q).\sigma(\alpha+\beta, x)}{\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma', q).\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma, q).\sigma(-\gamma, x).\sigma(-\gamma', x)}. \end{cases}$$

Obgleich nun diese Relationen unter der Voraussetzung gefunden sind, dass die bestimmten Summen convergiren, so gelten sie doch allgemein in Folge des Princips, dass eine Function nur auf eine Weise als Function einer complexen Variabeln stetig fortgesetzt werden kann. Mittelst dieser Relationen ist man auch im Stande, die Bestandtheile P^γ, $P^{\gamma'}$ durch P^β, $P^{\beta'}$ auszudrücken, und es wird durch sie die *Heine*sche Reihe, für $q = 1$ aber die *Gauss*ische, unfehlbar über den Convergenzkreis hinaus fortgesetzt.

Art. 5.

Aus den Darstellungen für P^α, $P^{\alpha'}$ findet sich, dass $P^\alpha.x^{-\alpha}$, $P^{\alpha'}.x^{-\alpha'}$ mit $\lim_{n=\infty} p(n, q, x)$ multiplicirt im Endlichen überall endliche Functionen sind,

und sich daher in durchaus convergente Reihen müssen entwickeln lassen. Durch gewöhnliche Reihenmultiplication, wenn $\alpha+\beta+\gamma=a$, $\alpha+\beta'+\gamma=b$, $\alpha-\alpha'+1=c$ gesetzt wird, findet sich:

$$(22.)\quad \left\{\begin{array}{l} x^{-\alpha}.P^{\alpha}.\sum_{0}^{x}{}_{(n)}\dfrac{(-x)^n.q^{n.\frac{n-1}{2}}}{(1-q).(1-q^2)\ldots(1-q^n)} \\ =\sum_{0}^{x}{}_{(n)}\left\{(xq^{-\gamma})^n.\sum_{0}^{n}{}_{(\nu)}\dfrac{1-q^{\alpha}}{1-q}.\dfrac{1-q^{\alpha+1}}{1-q^2}\cdots\dfrac{1-q^{\alpha+\nu-1}}{1-q^{\nu}}.\dfrac{1-q^{b}}{1-q^{c}}.\dfrac{1-q^{b+1}}{1-q^{c+1}}\cdots\dfrac{1-q^{b+\nu-1}}{1-q^{c+\nu-1}}\right. \\ \left.\times\dfrac{q^{(n-\nu).\frac{n-\nu-1}{2}}.(-1)^{n-\nu}}{\Pi(n-\nu,q)(1-q)^{n-\nu}}\right\}, \end{array}\right.$$

worin γ mit γ' vertauscht werden kann. Vertauscht man dann α mit α', so ergeben sich zwei durchaus convergente verschiedene Darstellungen von $P^{\alpha'}$. Auch P^{β}, $P^{\beta'}$ lassen sich so in p-Functionen und durchaus convergenten Reihen darstellen. Es ist gewiss vortheilhaft, Darstellungen von unbedingter Anwendbarkeit zu besitzen, wie sie die Gleichung (22.) liefert, wofern nur Norm $(q)<1$ ist; ihr complicirter Coefficientenbau macht sie jedoch etwas schwerfällig.

Eine grosse Fülle von Darstellungen der Bestandtheile einer P-Function oder ihrer reciproken kann noch in Partialbrüchen gefunden werden, und zwar können $P^{\alpha}.x^{-\alpha}$, $P^{\alpha'}.x^{-\alpha'}$ durch solche dargestellt werden, wenn (der Einfachheit halber q positiv reell vorausgesetzt) $\beta+\alpha$ und $\beta'+\alpha$ bezüglich $\beta+\alpha'$ und $\beta'+\alpha'$ einen positiv reellen Theil haben. Oder es können $P^{\alpha}.x^{-\alpha}.p(-\gamma,x)$, $P^{\alpha}.x^{-\alpha}.p(-\gamma',x)$ durch Partialbrüche dargestellt werden, wenn $\alpha+\beta+\gamma$ und $\alpha+\beta'+\gamma$ bezüglich $\alpha+\beta+\gamma'$ und $\alpha+\beta'+\gamma'$ positive reelle Theile haben. Die Coefficienten der ersteren sind freilich nicht sehr einfach, indem F-Functionen, deren fünftes Element von der Ordnungszahl abhängt, in denselben vorkommen. Die letzteren Entwicklungen sind einfacher, weshalb hier eine als Repräsentant Platz findet. Sie wird mit Hilfe der Gleichung (17.) abgeleitet und lautet *):

$$(23.)\quad \left\{\begin{array}{l} P^{\alpha}.x^{-\alpha}.p(-\gamma,x).\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma',q).\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma',q) \\ =\dfrac{\Pi(\alpha-\alpha',q)}{(1-q)^{\gamma-\gamma'-1}}\cdot\sum_{0}^{x}{}_{(n)}\cdot\left\{\dfrac{q^{\alpha+\beta+\gamma}-q}{1-q}.\dfrac{q^{\alpha+\beta+\gamma}-q^2}{1-q^2}\cdots\dfrac{q^{\alpha+\beta+\gamma}-q^n}{1-q^n}\right. \\ \left.\times\dfrac{F(\alpha+\beta+\gamma',-n,\alpha+\beta+\gamma-n,q,q^{\alpha+\beta'+\gamma})}{1-xq^{n-\gamma}}\right\}, \end{array}\right.$$

*) Setzt man in der so fruchtbaren Gleichung (78.) der Abh. des Herrn *Heine* $\alpha=1$, so liefert sie auch einen speciellen Fall einer Partialbruchentwicklung.

woraus durch Vertauschung von β und β', γ und γ' noch sieben Entwicklungen gefunden werden. Wir verzichten darauf, P^{β}, $P^{\beta'}$ in ähnlicher Weise darzustellen, weil dies principielle Schwierigkeiten nicht hat. Um noch die Darstellung des Quotienten zweier P-Functionen durch einen Kettenbruch nach einer Methode zu bewerkstelligen, welche der von *Riemann* *) im Falle $q=1$ angewandten analog ist, bedürfen wir Mittel, welche Relationen zwischen den allgemeineren contiguen Functionen liefern, die im folgenden Artikel abgehandelt werden sollen.

Art. 6.

Bezeichnen wir nun mit $\mathfrak{P}^{\alpha}$, $\mathfrak{P}^{\alpha'}$ etc. Grössen, welche sich von den Grössen P^{α}, $P^{\alpha'}$, etc. nur durch constante einstweilen noch nicht bestimmte Factoren unterscheiden. Dann mag

$$\mathfrak{P}^{\alpha} = \alpha_{\gamma}\mathfrak{P}^{\gamma} + \alpha_{\gamma'}\mathfrak{P}^{\gamma'} = \alpha_{\beta}\mathfrak{P}^{\beta} + \alpha_{\beta'}\mathfrak{P}^{\beta'}, \quad \mathfrak{P}^{\alpha'} = \alpha'_{\gamma}\mathfrak{P}^{\gamma} + \alpha'_{\gamma'}\mathfrak{P}^{\gamma'} = \alpha'_{\beta}\mathfrak{P}^{\beta} + \alpha'_{\beta'}\mathfrak{P}^{\beta'}$$

gesetzt werden, und man hat dann in dieser Bezeichnung:

$$(24.)\quad \begin{cases} \dfrac{\alpha_{\gamma}}{\alpha'_{\gamma}} : \dfrac{\alpha_{\beta}}{\alpha'_{\beta}} = \dfrac{\theta_{11}\left(\dfrac{\alpha+\beta+\gamma'}{2}\lg q\right)\cdot q^{\frac{\alpha+\beta+\gamma'}{2}}}{\theta_{11}\left(\dfrac{\alpha'+\beta+\gamma'}{2}\lg q\right)\cdot q^{\frac{\alpha'+\beta+\gamma'}{2}}} \cdot \dfrac{(-1)^{\alpha'}.\sigma(\alpha'+\beta, x)\,q^{\alpha\gamma'}}{(-1)^{\alpha}.\sigma(\alpha+\beta, x)\,q^{\alpha'\gamma'}}, \\ \dfrac{\alpha_{\gamma}}{\alpha'_{\gamma}} : \dfrac{\alpha_{\beta'}}{\alpha'_{\beta'}} = \dfrac{\theta_{11}\left(\dfrac{\alpha+\beta'+\gamma'}{2}\lg q\right)\cdot q^{\frac{\alpha+\beta'+\gamma'}{2}}}{\theta_{11}\left(\dfrac{\alpha'+\beta'+\gamma'}{2}\lg q\right)\cdot q^{\frac{\alpha'+\beta'+\gamma'}{2}}} \cdot \dfrac{(-1)^{\alpha'}.\sigma(\alpha'+\beta', x)\,q^{\alpha\gamma'}}{(-1)^{\alpha}.\sigma(\alpha+\beta', x)\,q^{\alpha'\gamma'}}, \end{cases}$$

woraus noch zwei Gleichungen fliessen, wenn man γ mit γ' vertauscht. Die Gleichheit der aus diesen und aus (24.) fliessenden Werthe von $\frac{\alpha_{\beta}}{\alpha'_{\beta}} : \frac{\alpha_{\beta'}}{\alpha'_{\beta'}}$ erhellt als eine Folge von Relationen, deren eine ist:

$$\theta_{11}\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\lg q\right)q^{\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}} = \theta_{11}\left(\frac{\alpha'+\beta'+\gamma'}{2}\lg q\right)q^{\frac{\alpha'+\beta'+\gamma'}{2}}.$$

Demnach sind von den Grössen $\frac{\alpha_{\beta}}{\alpha'_{\beta}}$, $\frac{\alpha_{\beta'}}{\alpha'_{\beta'}}$, $\frac{\alpha_{\gamma}}{\alpha'_{\gamma}}$, $\frac{\alpha_{\gamma'}}{\alpha'_{\gamma'}}$ durch eine von ihnen,

---

*) Die Kenntniss dieser Methode verdanke ich einer Mittheilung des Herrn *Schering* im Jahre 1864. Man erhält durch sie das nämliche Resultat, welches Herr *Thomé* im 66sten und 67sten Bande dieses Journals gefunden hat, indem er die Grenze untersuchte, die man für die n^{ten} Näherungswerthe des *Gauss*ischen Kettenbruchs bei wachsendem n erhält.

z. B. durch $\frac{\alpha_\beta}{\alpha'_\beta}$ die übrigen bestimmt, und die drei Grössen $\alpha'_{\beta'}$, α'_γ, $\alpha'_{\gamma'}$ durch die fünf Grössen α_β, α'_β, $\alpha_{\beta'}$, α_γ, $\alpha_{\gamma'}$, welche von den Verhältnissen der willkürlichen Constanten in $\mathfrak{P}^\alpha$, $\mathfrak{P}^{\alpha'}$, ... abhängen und durch geeignete Bestimmung derselben jedwede Werthe annehmen können.

Sind nun in den Functionen $P\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma, \\ \alpha', & \beta', & \gamma',\end{pmatrix} q, x\Big)$, $P_1\begin{pmatrix}\alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, \\ \alpha'_1, & \beta'_1, & \gamma'_1,\end{pmatrix} q, x\Big)$ die entsprechenden Exponenten um die ganzen Zahlen bez. a, a', b, b', c, c', deren Summe Null ist, verschieden, und ist $\bar{a}$ die kleinere von a, a'; $\bar{b}$ die kleinere von b, b'; $\bar{\gamma}$ die kleinere von γ, γ_1; $\bar{\gamma'}$ die kleinere von γ, γ'_1, so kann man die acht Grössen $(\alpha_\beta)_1$, $(\alpha'_\beta)_1$, $(\alpha'_{\beta'})_1$, ... den acht Grössen α_β, α'_β, $\alpha'_{\beta'}$, ... gleich annehmen, weil die Gleichungen (24.) nach Satz (*D.*) der Einleitung ungeändert bleiben, und daher aus der Gleichheit der fünf willkürlichen die Gleichheit der drei übrigen folgt. Daher ist:

$$(\mathfrak{P}^\alpha \mathfrak{P}_1^{\alpha'_1} - \mathfrak{P}^{\alpha'} \mathfrak{P}_1^{\alpha_1})\, x^{-\alpha-\alpha'-\bar{a}} . p(-\bar{\gamma}, x) . p(-\bar{\gamma'}, x)$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_\gamma, & \alpha_{\gamma'} \\ \alpha'_\gamma, & \alpha'_{\gamma'} \end{vmatrix} . (\mathfrak{P}^\gamma \mathfrak{P}_1^{\gamma'_1} - \mathfrak{P}^{\gamma'} \mathfrak{P}_1^{\gamma_1}) . p(-\bar{\gamma}, x) . p(-\bar{\gamma'}, x) . x^{-\alpha-\alpha'-\bar{a}}$$

$$= (-1)^{-\bar{\gamma}-\bar{\gamma'}} . \begin{vmatrix} \alpha_\beta, & \alpha_{\beta'} \\ \alpha'_\beta, & \alpha'_{\beta'} \end{vmatrix} . \frac{x^{-\bar{a}-\bar{b}-\bar{\gamma}-\bar{\gamma'}+\gamma+\gamma'-1}}{\sigma(-\bar{\gamma}, x) . \sigma(-\bar{\gamma'}, x)} . (\mathfrak{P}^\beta \mathfrak{P}_1^{\beta'_1} - \mathfrak{P}^{\beta'} \mathfrak{P}^{\beta_1}) \Big(\frac{1}{x}\Big)^{-\beta-\beta'-\bar{b}}$$

$$\times p\Big(-\bar{\gamma}, \frac{q^{1+\bar{\gamma}}}{x}\Big) p\Big(-\bar{\gamma'}, \frac{q^{1+\bar{\gamma'}}}{x}\Big)$$

eine allenthalben einändrige und für endliche x endliche Function, und daher eine ganze Function von x vom Grade $-\bar{a}-\bar{b}-\bar{\gamma}-\bar{\gamma'}+\gamma+\gamma'-1$. (Die Grösse $\begin{vmatrix} \alpha_\beta, & \alpha_{\beta'} \\ \alpha'_\beta, & \alpha'_{\beta'} \end{vmatrix} : (\sigma(-\bar{\gamma}, x) . \sigma(-\bar{\gamma'}, x))$ aber muss constant sein.) Sind nun

$$P\begin{pmatrix}\alpha, & \beta, & \gamma, \\ \alpha', & \beta', & \gamma',\end{pmatrix} q, x\Big),\ P\begin{pmatrix}\alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, \\ \alpha'_1, & \beta'_1, & \gamma'_1,\end{pmatrix} q, x\Big),\ P\begin{pmatrix}\alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2, \\ \alpha'_2, & \beta_2, & \gamma'_2,\end{pmatrix} q, x\Big)$$

drei *P*-Functionen, in welchen sich die entsprechenden Exponenten um ganze Zahlen unterscheiden, so fliesst aus dem Satze mittelst der identischen Gleichung:

$$\mathfrak{P}^\alpha(\mathfrak{P}_1^{\alpha_1} \mathfrak{P}_2^{\alpha'_2} - \mathfrak{P}_1^{\alpha'_1} \mathfrak{P}_2^{\alpha_2}) + \mathfrak{P}_1^{\alpha_1}(\mathfrak{P}_2^{\alpha_2} \mathfrak{P}^{\alpha'} - \mathfrak{P}_2^{\alpha'_2} \mathfrak{P}^{\alpha}) + \mathfrak{P}_2^{\alpha_2}(\mathfrak{P}^\alpha \mathfrak{P}_1^{\alpha'_1} - \mathfrak{P}_1^{\alpha_1} \mathfrak{P}^{\alpha'}) = 0$$

der wichtige Satz, dass zwischen ihren entsprechenden Gliedern eine lineare Gleichung stattfindet, deren Coefficienten ganze Functionen in x sind, und dass also (H. Abh. pag. 291)

VIII. *„sämmtliche P-Functionen, deren entsprechende Exponenten sich um ganze Zahlen unterscheiden, sich in zwei beliebige von ihnen linear mit rationalen Functionen von x als Coefficienten ausdrücken lassen.“*

Setzt man nun:

$$(25.)\quad \begin{cases} \alpha_{\beta} = \dfrac{\sigma(\alpha+\beta, x).(-1)^{\alpha}}{\theta_{11}\left(\dfrac{\alpha+\beta+\gamma'}{2}\lg q\right) q^{\frac{\gamma'\cdot\gamma'}{2}+\gamma'(\alpha+\beta)+\frac{\alpha+\beta}{2}}}, \\ \alpha_{\beta'} = \dfrac{\sigma(\alpha+\beta', x).(-1)^{\alpha}}{\theta_{11}\left(\dfrac{\alpha+\beta'+\gamma'}{2}\lg q\right) q^{\frac{\gamma'\cdot\gamma'}{2}+\gamma'(\alpha+\beta')+\frac{\alpha+\beta'}{2}}}, \\ \alpha'_{\beta} = \dfrac{\sigma(\alpha'+\beta, x).(-1)^{\alpha'}}{\theta_{11}\left(\dfrac{\alpha'+\beta+\gamma'}{2}\lg q\right) q^{\frac{\gamma'\cdot\gamma'}{2}+\gamma'(\alpha'+\beta)+\frac{\alpha'+\beta}{2}}}, \\ \text{woraus folgt} \\ \alpha'_{\beta'} = \dfrac{\sigma(\alpha'+\beta', x).(-1)^{\alpha'}}{\theta_{11}\left(\dfrac{\alpha'+\beta'+\gamma'}{2}\lg q\right) q^{\frac{\gamma'\cdot\gamma'}{2}+\gamma'(\alpha'+\beta')+\frac{\alpha'+\beta'}{2}}}, \end{cases}$$

so muss das Verhältniss der Factoren in $\mathfrak{P}^{\alpha}$, $\mathfrak{P}^{\alpha'}$, durch welche sich diese Formen von P^{α}, $P^{\alpha'}$ unterscheiden, den Werth haben:

$$(26.)\quad \frac{\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma, q)}{\Pi(-\alpha-\beta'-\gamma, q)}\cdot\frac{\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma, q)}{\Pi(-\alpha-\beta-\gamma, q)}\cdot\frac{\Pi(\alpha'-\alpha, q)}{\Pi(\alpha-\alpha', q)}\cdot\frac{q^{\alpha'\gamma'}}{q^{\alpha\gamma'}}.$$

Mit Constanten von solchem Verhältnisse sollen im Folgenden $\mathfrak{P}^{\alpha}$, $\mathfrak{P}^{\alpha'}$ behaftet sein.

Art. 7.

Ist nun $f(x) = a'_0 - \cfrac{a'_1 x}{1 - \cfrac{a'_2 x}{1 - \cdot \cdot \cfrac{a'_m x}{1 - \varrho_{\mu+1}}}}$ und ϱ_{m+1} der unendliche Kettenbruch $\cfrac{a'_{m+1}x}{1-\cfrac{a'_{m+2}x}{1-\cdot\cdot}}$, ferner Z_{μ} der μ^{te} Näherungszähler, N_{μ} der Nenner, also $\frac{Z_0}{N_0} = \frac{a'_0}{1}$, $\frac{Z_1}{N_1} = \frac{a'_0 - a'_1 x}{1}$, etc., dann ist $f(x) = \frac{Z_m - \varrho_{m+1} Z_{m-1}}{N_m - \varrho_{m+1} N_{m-1}}$ und $N_m f(x) - Z_m = \varrho_{m+1}(N_{m+1} f(x) - Z_{m-1})$, wenn $m \geqq 1$ ist, für $m = 0$ aber ist: $N_0 f(x) - Z_0 = -\varrho_1$, woraus folgt, dass $N_m f(x) - Z_m$ den Factor x^{m+1} hat. Das von x freie Glied in Z_m ist a'_0, in N_m aber 1, N_{2m}, Z_{2m}, N_{2m+1} sind vom m^{ten}, Z_{2m+1} vom $m+1^{\text{ten}}$ Grade nach x. Nun sei weiter:

$$P_n = P\left(\begin{matrix}\alpha+n, & \beta, & \gamma, \\ \alpha'-n, & \beta', & \gamma',\end{matrix} q, x\right),\quad Q_n = P\left(\begin{matrix}\alpha+n, & \beta+1, & \gamma, \\ \alpha'-1-n, & \beta', & \gamma',\end{matrix} q, x\right),$$

$\mathfrak{P}_n^\alpha$, $\mathfrak{Q}_n^\alpha$, etc. seien die dem oberen Index entsprechenden Zweige dieser Function, wenn die Constanten in dem Verhältnisse (26.) stehen, dann sind nach dem vorigen Art. ganze Functionen vom Grade n nach x die Ausdrücke:

$$Z'_{2n} = c_{2n}\ (\mathfrak{P}^\alpha \mathfrak{P}^{\alpha'}_{n+1} - \mathfrak{P}^{\alpha'} \mathfrak{P}^\alpha_{n+1})\, x^{-\alpha-\alpha'+n+1} \cdot p(-\gamma, x)\, p(-\gamma', x),$$
$$N'_{2n} = c_{2n}\ (\mathfrak{P}^{\alpha'}_{n+1} \mathfrak{Q}^\alpha - \mathfrak{P}^\alpha_{n+1} \mathfrak{Q}^{\alpha'})\, x^{-\alpha-\alpha'+n+1} \cdot p(-\gamma, x)\, p(-\gamma', x),$$
$$N'_{2n+1} = c_{2n+1} (\mathfrak{Q}^\alpha \mathfrak{Q}^{\alpha'}_{n+1} - \mathfrak{Q}^{\alpha'} \mathfrak{Q}^\alpha_{n+1})\, x^{-\alpha-\alpha'+n+2} \cdot p(-\gamma, x) p(-\gamma', x),$$

aber vom Grade $n+1$ ist der Ausdruck:

$$Z'_{2n+1} = c_{2n+1} (\mathfrak{P}^\alpha \mathfrak{Q}^{\alpha'}_{n+1} - \mathfrak{P}^{\alpha'} \mathfrak{Q}^\alpha_{n+1})\, p(-\gamma, x) \cdot p(-\gamma', x) \cdot x^{-\alpha-\alpha'+n+2}.$$

Da also die Gleichungen statt finden:

$$\frac{Z'_{2n}}{N'_{2n}} = \frac{\mathfrak{P}^\alpha \mathfrak{P}^{\alpha'}_{n+1} - \mathfrak{P}^{\alpha'} \mathfrak{P}^\alpha_{n+1}}{\mathfrak{Q}^\alpha \mathfrak{P}^{\alpha'}_{n+1} - \mathfrak{Q}^{\alpha'} P^\alpha_{n+1}}, \quad \frac{Z'_{2n+1}}{N'_{2n+1}} = \frac{\mathfrak{P}^\alpha \mathfrak{Q}^{\alpha'}_{n+1} - \mathfrak{P}^{\alpha'} \mathfrak{Q}^\alpha_{n+1}}{\mathfrak{Q}^\alpha \mathfrak{Q}^{\alpha'}_{n+1} - \mathfrak{Q}^{\alpha'} \mathfrak{Q}^\alpha_{n+1}},$$

so folgen daraus auch diese:

$$\frac{Z'_{2n+2}}{N'_{2n+2}} = \frac{Z'_{2n+1} - x \cdot a_{2n+2} \cdot Z'_{2n}}{N'_{2n+1} - x \cdot a_{2n+2} \cdot N'_{2n}}, \quad \frac{Z'_{2n+3}}{N'_{2n+3}} = \frac{Z'_{2n+2} - x \cdot a_{2n+3} \cdot Z'_{2n+1}}{N'_{2n+2} - x \cdot a_{2n+3} \cdot N'_{2n+1}};$$

denn es können die Grössen a_{2n+2}, a_{2n+3} so eingerichtet werden, dass die Gleichungen erfüllt sind:

$$\mathfrak{P}^\alpha (c_{2n+1} \cdot \mathfrak{Q}^{\alpha'}_{n+1} - a_{2n+2} \cdot c_{2n} \cdot \mathfrak{P}^{\alpha'}_{n+1}) - \mathfrak{P}^{\alpha'} (c_{2n+1} \cdot \mathfrak{Q}^\alpha_{n+1} - a_{2n+2} \cdot c_{2n} \cdot \mathfrak{P}^\alpha_{n+1})$$
$$= (\mathfrak{P}^\alpha \cdot \mathfrak{P}^{\alpha'}_{n+2} - \mathfrak{P}^{\alpha'} \cdot \mathfrak{P}^\alpha_{n+2})\, c_{2n+2},$$
$$\mathfrak{Q}^\alpha (c_{2n+1} \cdot \mathfrak{Q}^{\alpha'}_{n+1} - a_{2n+2} \cdot c_{2n} \cdot \mathfrak{P}^{\alpha'}_{n+1}) - \mathfrak{Q}^{\alpha'} (c_{2n+1} \mathfrak{Q}^\alpha - a_{2n+2} \cdot c_{2n} \cdot \mathfrak{P}^\alpha_{n+1})$$
$$= (\mathfrak{Q}^\alpha \cdot \mathfrak{P}^{\alpha'}_{n+2} - \mathfrak{Q}^{\alpha'} \cdot \mathfrak{P}^\alpha_{n+2})\, c_{2n+2}.$$

Die Grössen Z'_m, N'_m stehen daher zu einander in dem nämlichen Verhältnisse, als die Näherungswerthe Z_m, N_m des Kettenbruchs $f(x)$, und es können in $f(x)$ die Grössen a'_0, a'_1, a'_2, ... so eingerichtet werden, indem man sie a_0, a_1, a_2, ... gleich macht, dass:

$$\frac{Z_{2n}}{N_{2n}} = \frac{\mathfrak{P}^\alpha - \mathfrak{P}^{\alpha'} \dfrac{\mathfrak{P}^\alpha_{n+1}}{\mathfrak{P}^{\alpha'}_{n+1}}}{\mathfrak{Q}^\alpha - \mathfrak{Q}^{\alpha'} \dfrac{\mathfrak{P}^\alpha_{n+1}}{\mathfrak{P}^{\alpha'}_{n+1}}}, \qquad \frac{Z_{2n+1}}{N_{2n+1}} = \frac{\mathfrak{P}^\alpha - \mathfrak{P}^{\alpha'} \dfrac{\mathfrak{Q}^\alpha_{n+1}}{\mathfrak{Q}^{\alpha'}_{n+1}}}{\mathfrak{Q}^\alpha - \mathfrak{Q}^{\alpha'} \dfrac{\mathfrak{Q}^\alpha_{n+1}}{\mathfrak{Q}^{\alpha'}_{n+1}}}.$$

So lange nun $\dfrac{\mathfrak{P}^\alpha_n}{\mathfrak{P}^{\alpha'}_n}$ und, was daraus von selbst folgt, $\dfrac{\mathfrak{Q}^\alpha_n}{\mathfrak{Q}^{\alpha'}_n}$ als Function von x sich mit wachsendem n der Null nähert *), so lange convergirt der Ketten-

*) Für $q = 1$ zeigt *Riemann*, dass dies für alle Werthe von x stattfinde, die nicht auf der reellen Axe zwischen 1 und ∞ liegen.

bruch $f(x)$ gegen $\frac{\mathfrak{P}^\alpha}{\mathfrak{Q}^\alpha}$. Mit Hilfe der Relation (26.) findet man aber, dass der Werth $\frac{\mathfrak{P}_n^\alpha}{\mathfrak{P}_n^{\alpha'}}$ für über alle Grenzen grosse n sich verhält wie

$$\frac{A \cdot q^{n^2-n(\gamma+\gamma'+2)} \cdot x^{\alpha-\alpha'+2n}}{p(n, xq^{-\gamma}) \cdot p(n, xq^{-\gamma'})},$$

wenn A eine von n unabhängige endliche Constante bedeutet. Demnach nähert sich $\frac{\mathfrak{P}_n^\alpha}{\mathfrak{P}_n^{\alpha'}}$ für alle endlichen x mit wachsendem n der Null, und $f(x)$ dem Quotienten $\frac{\mathfrak{P}^\alpha}{\mathfrak{Q}^\alpha}$, ausser etwa für $x = q^\gamma, q^{\gamma-1}, q^{\gamma-2}, \ldots q^{\gamma'}, q^{\gamma'-1}, q^{\gamma'-2}, \ldots$.

Es erübrigt noch, die Grössen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ zu bestimmen. Offenbar ist $a_0 = \frac{\mathfrak{P}^\alpha_{(0)}}{\mathfrak{Q}^\alpha_{(0)}}$, und da in $\mathfrak{P}^\alpha$ die Constante noch willkürlich ist (denn es wurden im vorigen Artikel nur die Verhältnisse bestimmt), so können wir sie gleich Eins setzen, so dass $a_0 = 1$ ist. Ferner ist

$$\frac{\mathfrak{P}^\alpha(x)}{\mathfrak{Q}^\alpha(x)} - 1 = -\varrho_1 = -\cfrac{a_1 x}{1-} \text{ etc.},$$

woraus für $x = 0$ folgt,

$$a_1 = q^{\alpha+\beta} \frac{1-q^{\alpha+\beta'+\gamma}}{1-q^{\alpha-\alpha'+1}} \cdot \frac{1}{1} \frac{-q^{\alpha+\beta'+\gamma'}}{1-q^{\alpha-\alpha'+2}}.$$

Da nun $(N_{2n} \cdot \mathfrak{P}^\alpha - Z_{2n} \cdot \mathfrak{Q}^\alpha)\, x^{-(\alpha+2n+1)}$, $(N_{2n} \cdot \mathfrak{P}^{\alpha'} - Z_{2n} \cdot \mathfrak{Q}^{\alpha'})\, x^{-(\alpha'-1)}$ für $x=0$ endlich und einändrig sind, da für $x=\infty$ der Ausdruck $(N_{2n} \cdot \mathfrak{P} - Z_{2n} \cdot \mathfrak{Q})$ in zwei Bestandtheile zerlegt werden kann, deren einer wie $\left(\frac{1}{x}\right)^{-n+\beta}$, deren anderer wie $\left(\frac{1}{x}\right)^{-n+\beta'}$ sich verzweigt, da er in Bestandtheile zerlegt werden kann, deren einer mit $p(-\gamma, x)$, deren anderer mit $p(-\gamma', x)$ multiplicirt ausser für $x=0$ und $x=\infty$ überall endlich bleibt, so kann er gleich $c_{2n} \cdot x^n \cdot \mathfrak{P}_{n+1}$ gesetzt werden, und ähnlich $N_{2n+1} \cdot \mathfrak{P} - Z_{2n+1} \cdot \mathfrak{Q} = c_{2n+1} \cdot x^n \cdot \mathfrak{Q}_{n+1}$ etc. Nach unseren Festsetzungen über die Constanten haben wir dann:

$$-\mathfrak{Q}^{\alpha'}(0) = c_{2n} \cdot (x^n \cdot \mathfrak{P}^{\alpha'}_{n+1})_{(x=0)}, \quad -\mathfrak{Q}^{\alpha'}(0) = c_{2n+1} \cdot (x^{n+1} \cdot \mathfrak{Q}^{\alpha'}_{n+1})_{(x=0)} \quad \text{etc.},$$

woraus folgt:

$$\frac{c^{2n+1}}{c^{2n}} = q^{-\gamma'} \cdot \frac{1-q^{-\alpha-\beta-\gamma-n-1}}{1-q^{\alpha'-\alpha-2n-2}} \cdot \frac{1-q^{-\alpha'-\beta'-\gamma+n+2}}{1-q^{\alpha-\alpha'+2n+3}}$$

$$= q^{\alpha+\beta'+n} \cdot \frac{1-q^{\alpha+\beta+\gamma+n+1}}{1-q^{\alpha-\alpha'+2n+2}} \cdot \frac{1-q^{\alpha+\beta+\gamma'+n+1}}{1-q^{\alpha-\alpha'+2n+3}},$$

$$\frac{c_{2n+2}}{c_{2n+1}} = q^{\alpha+\beta+n+1} \cdot \frac{1-q^{\alpha+\beta'+\gamma+n+1}}{1-q^{\alpha-\alpha'+2n+3}} \cdot \frac{1-q^{\alpha+\beta'+\gamma'+n+1}}{1-q^{\alpha-\alpha'+2n+4}}.$$

Da nun für $m > 0$

$$N_m \mathfrak{P}^\alpha - Z_m \mathfrak{Q}^\alpha = \varrho_{m+1}(N_{m-1}\mathfrak{P}^\alpha - Z_{m-1}\mathfrak{Q}^\alpha)$$

und daher:

$$c_{2n+1}x^{n+1}.\mathfrak{Q}^\alpha_{n+1} = \varrho_{2n+2}.x^n.c_{2n}.\mathfrak{P}^\alpha_{n+1},\ c_{2n+2}.x^{n+1}.\mathfrak{P}^\alpha_{n+2} = \varrho_{2n+3}.x^{n+1}.\mathfrak{Q}^\alpha_{n+1}.c_{2n+1}$$

etc. ist, so folgt für $x = 0$

$$a_{2n+2} = \frac{c_{2n+1}}{c_{2n}} = q^{\alpha+\beta'+n}.\frac{1-q^{\alpha+\beta+\gamma+n+1}}{1-q^{\alpha-\alpha'+1+2n+1}}.\frac{1-q^{\alpha+\beta+\gamma'+n+1}}{1-q^{\alpha-\alpha'+1+2n+2}},$$

$$a_{2n+3} = \frac{c_{2n+2}}{c_{2n+1}} = q^{\alpha+\beta+n+1}.\frac{1-q^{\alpha+\beta'+\gamma+n+1}}{1-q^{\alpha-\alpha'+1+2n+2}}.\frac{1-q^{\alpha+\beta'+\gamma'+n+1}}{1-q^{\alpha-\alpha'+1+2n+3}}\ \text{etc.}$$

und hieraus für $\gamma = 0$ (*Heines* Abh. pag. 295):

$$(27.)\quad \frac{F(a,b,c,q,x)}{F(a+1,b,c+1,q,x)} = \cfrac{1-q^\alpha.\frac{1-q^b}{1-q^c}.\frac{1-q^{c-a}}{1-q^{c+1}}x}{1-q^b.\frac{1-q^{a+1}}{1-q^{c+1}}.\cfrac{1-q^{c-b+1}}{1-q^{c+2}}x}{1-q^{a+1}.\frac{1-q^{b+1}}{1-q^{c+2}}.\cfrac{1-q^{c-a+1}}{1-q^{c+3}}}{1-\text{etc.}}$$

Eine Behandlung der Fälle, in welchen Differenzen $\alpha-\alpha'$, $\beta-\beta'$, $\gamma-\gamma'$ von der Form $m+n\frac{2\pi i}{\lg q}$ sind, wird vorbehalten.

Laucha, im September 1868.

Note sur les indices à module composé et sur une table d'une nouvelle espèce de logarithmes.

(Par M. *Hill* à Lund.)

Depuis longtemps l'arithmétique supérieure a mis en usage les indices à module simple, et le célèbre *Jacobi* en a calculé le „Canon“ pour chaque nombre premier inférieur à 1000; mais à ce que je sais on n'a pas encore eu l'idée de les employer pour des calculs autres que ceux de l'arithmétique supérieure. Et relativement aux modules composés on sait qu'il existe toujours des nombres inférieurs au module pour lesquels il n'y a pas d'indice. Ainsi, pour le module 1001 (=7.11.13), une base quelconque élevée aux puissances successives, fournit tout au plus 60 restes suivant ce module. Il y a donc 6.10.12−60 ou 660 nombres premiers avec 1001, pour lesquels on ne trouve, de cette manière, aucun indice. Néanmoins il existe une autre méthode par laquelle on y parvient, et que j'exposerai dans la suite. D'ailleurs, si l'on voulait se borner aux nombres premiers et que dans un calcul on eût à opérer sur des nombres un peu grands, il faudrait choisir p. e. le plus grand nombre premier connu jusqu'à présent, savoir 2147483647, ou du moins 9909901, ou bien un autre d'une pareille grandeur, et l'on aurait des tables d'indices bien volumineuses à calculer et à employer. Jusqu'à présent les calculs numériques dans lesquels on pourrait se servir de ces tables se font en général à l'aide des *logarithmes*, mais les logarithmes ne sont qu'approximatifs, et quelquefois l'usage en est plus incommode que l'opération qu'on veut éviter, p. e. lorsqu'on cherche le produit exact de deux grands nombres ou leurs puissances. J'ai montré ailleurs (Arithm. föreläsningar) que la table des carrés peut alors s'employer d'une manière plus commode.

On peut aussi se servir de *plusieurs nombres premiers* p_0, p_1, p_2, ... et déterminer le nombre cherché n au moyen des restes r_0, r_1, r_2, ... de n

relativement à p_0, p_1, p_2, ... Alors on voit que n aura la forme

$$n = q_0 r_0 + q_1 r_1 + q_2 r_2 + \cdots$$

et que les coefficients q_0, q_1, q_2, ... divisés:

par p_0 auront pour restes 1 0 0 ...
- p_1 - - - 0 1 0 ...
- p_2 - - - 0 0 1 ...
. . . . . .,

d'où l'on conclut que $q_0 = 1 + p_0 x = y p_1 p_2 \ldots$ et que l'on aura pour q_1, q_2 ... des équations semblables et qui servent à les déterminer. Ainsi, lorsque $p_0 . p_1 . p_2 = 7.11.13 = 1001$, on trouve $n = -286 r_0 + 364 r_1 - 77 r_2 + 1001 m$. Mais les nombres q deviennent souvent fort grands et composés, et par suite d'un usage moins commode. C'est pourquoi on ne doit employer que deux nombres premiers, mais qui sont d'une grandeur suffisante. Alors le problème se réduit à celui-ci: *Étant donnés les nombres r_0 et r_1, résidus d'un nombre inconnu x suivant les modules p_0 et p_1, trouver le nombre x lui-même, ou du moins le résidu de x suivant $p_0 . p_1$, pourvu que p_0 et p_1 n'aient pas de facteur commun.* Me plaçant à ce point de vue, j'ai composé, il y a longtemps, des canons calculés pour des modules d'une grandeur de plus en plus croissante, et je me suis arrêté à 9091 et 9901, que je désigne par P et P', nombres premiers tels qu'en les choisissant pour modules on peut, à l'aide des symboles $(\alpha^\gamma . \beta)$ (expliqués dans ce Journal tome XI p. 256), trouver aisément le reste d'un nombre quelconque, ce qui constitue une espèce particulière de *calcul des résidus modulaires*. Donc, si un nombre cherché n est inférieur à $P.P'$ ou 90010009*) et que, moyennant les canons mentionnés ci-dessus, on en ait trouvé les restes r_0 et r_1, on aura

$$n = r_0 + P.2009\,(r_1 - r_0) - mPP'.$$

Une très-grande simplification aura lieu pour les *modules composés* suivants: 30, 9900, 10100, 9999000, 99990000, etc., pour lesquels on trouvera la formule simple $r_0 \pm 10^n . \Delta r_0$, où Δr_0 signifie la différence $r_1 - r_0$.

Or il ne suffit pas de posséder les indices pour les nombres premiers, si l'on se propose de trouver par composition les restes par rapport à des modules composés quelconques. On en a besoin aussi pour les puissances des nombres premiers. Et effectivement, si nous avons *les canons pour les*

*) c. à. d. 90009991; je sousligne un chiffre pour exprimer qu'il doit être pris avec le signe négatif.

modules 2^n *et* 5^n, nous serons en état de calculer, au moyen de ceux-ci, les nombres r_0 et r_1, résidus d'un nombre inconnu t suivant ces modules, et l'on en composera le résidu du même nombre suivant 10^n, c'est-à-dire que l'on aura *les n derniers chiffres* de t par une opération analogue à celle des logarithmes qui en fournissent les 6 ou 9 premiers. Les indices calculés pour les modules 2^n et 5^n constituent donc *un nouveau genre de logarithmes* qui fournissent les derniers chiffres, les anciens n'en fournissant que les premiers. Or il y a longtemps que j'ai calculé des tables d'indices pour les cas de $n = 2, 3, 4, 5$, et j'ai nouvellement fait imprimer*) celle pour $n = 5$, laquelle les comprend toutes implicitement.

Nous jugeons à propos de résumer ici les théorèmes élémentaires dont nous avons fait usage pour établir notre théorie. Soit p un nombre premier quelconque, b sa base ou une racine primitive de la congruence **) $x^{p-1} \underset{p}{\backsim} 1$ (ou $x^{p-1} - 1 \equiv 0 \bmod. p$); alors d étant un nombre non divisible par p, il y aura une certaine puissance de b congrue à d, soit $b^n \backsim d$; n est l'indice de d ou bien $n \backsim Jd$, le sous-module ***) étant $p-1$. Pour une puissance p^n de p on a $b^{(p-1)p^{n-1}} \underset{p^n}{\backsim} 1$. Soit e un autre nombre non divisible par p et $b^r \underset{p^n}{\backsim} e$, r sera nommé *l'indice* de e pour le module p^n, ou en signes $r \backsim J_{p^n} e$, le sous-module (ou module de cette congruence) étant $(p-1)p^{n-1}$. En posant p. e. p égal à 5, les modules sont 5, 25, 125, 625, 3125, 15625 ... (ou 5^n) et les sous-modules 4, 20, 100, 500, 2500, 12500 ... (4.5^{n-1}), b étant égal à 2 (ou 3). Mais ces sous-modules pourront devenir 10, 100, 1000, 10000, 100000, pourvu qu'on ait pris b égal à $2^{0,4}$, 2^2, 2, $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[8]{2}$ ..., et alors 2 sera congru à $b^{2,5}$, $\sqrt{b}$, b, b^2, b^4, b^8 ..., et par suite $J2 \backsim \frac{5}{2}, \frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 ....

Il est vrai qu'on n'est pas accoutumé à se servir pour bases de nombres fractionnaires; mais leur exclusion n'est pas absolument nécessaire et nous ferait renoncer aux avantages essentiels des modules de la forme 10^n, avantages qui consistent à ce qu'on achève une division en ne retenant que les n derniers

*) sous le titre: *Tables des indices à module* 5^5 *(Tabula indicum directa et inversa modulo* 5^5*)*. Les personnes qui voudront se servir de cette table trouveront un nombre d'exemplaires déposés dans la librairie de M. *Reimer* au prix de $\frac{1}{3}$ thaler.

**) Au lieu de $n \equiv A$ (modulo m) j'écris $n \underset{m}{\backsim} A$ (voir Alm. Storhetslära). Je préfère le signe $\backsim$, parce que je suis d'avis qu'il faut employer le signe $\equiv$ pour indiquer l'identité absolue.

***) c. à. d. le module des indices.

chiffres. Pour passer d'un système d'indices à un autre il faut, comme dans la théorie des logarithmes, multiplier par le même nombre tous les indices du premier système. Car soit $c \backsim 2^r$ et $2 \backsim b^m$, nous aurons $c \backsim 2^r \backsim b^{mr}$ et nous nommerons mr l'indice de c, en signes $mr \backsim Jc$, le sous-module étant $m.4.5^{n-1}$ et par conséquent de la forme 10^{n-1}, si $m = 2^{n-3}$. Mais en choisissant p^n pour module, on n'a pas d'indices pour les multiples et les puissances de p. Remédions à cet inconvénient, en introduisant un indice pour le nombre p, et désignons-le par $\dot{p}$ ou j. Alors l'indice de chaque nombre αp^γ, où $\gamma < n-1$ et α non divisible par p, aura la forme $J\alpha+\gamma\dot{p}$ ou $J\alpha+\gamma j$. Par exemple, si $n=2$, nous aurons des indices réels (r) pour les $p(p-1)$ nombres inférieurs à p^2 et premiers avec p, et $p-1$ indices de la forme $r+j$ pour les $p-1$ multiples de p, en tout $p(p-1)+p-1 = p^2-1$ indices pour les p^2-1 nombres inférieurs à p^2. Il en sera de même du module p^3 et pour les nombres de la forme mp^2. Les indices auront la forme $Jm+2\dot{p} \backsim r+2j$, tous ensemble rempliront le nombre nécessaire. Il en sera encore de même du module p^n. Soit $p=5$, la base $b=2$. On aura b^r congru à 1, 2, 4, 8 ou 3, 16 ou 1. Mais pour le module 5^2 on aura b^r congru à 1, 2, 4, 8, 16, 7, 14, 3, 6, 12, 24, 23, 21, 17, 9, 18, 11, 22, 19, 13 pour $r<20$. Joignons-y $J5 \backsim j$; à l'aide de cet indice on complétera le canon pour le module 25; car $J10 \backsim 1+j$, $J15 \backsim 7+j$, $J20 \backsim 2+j$. Il ne paraît pas nécessaire d'entrer dans le même détail pour les modules 5^3, 5^4, 5^5 et 5^6, peut-être le plus grand module que l'on puisse mettre en usage. Notre table mentionnée ci-dessus fait voir l'existence des indices dont nous venons d'exposer la théorie. La table construite une fois pour toutes, on opère avec les j d'après les règles communes de l'algèbre. Il faut seulement observer que dans les cas de $4i$, $3i$, $2i$, $1i$ les sous-modules sont 16, 80, 400, 2000, comme l'on trouvera en multipliant par 4 ceux mentionnés ci-dessus, le module des Tables étant $\sqrt[4]{2}$ au lieu de 2. (Voyez Tables des indices à module 5^5 VI, Obs. 3.)

En se servant des modules 2^n, on est obligé d'employer, à côté de $J2 \backsim j$ ou $\dot{2}$, l'indice $J(-1) = i$. Car la base étant égal à 3 et $n=5$, on ne tire de la base 3 que 8 nombres différents, 3^8 étant $\underset{32}{\backsim} 1$. (Voir la table p. XI, XII.)

Pour les nombres	2,	3,	5,	7,	11,	13,	17,	19,	23,	29,	31	$(<2^5)$
je trouve les indices	j,	1,	$3+i$,	$6+i$,	7,	$5+i$,	4,	5,	$2+i$,	$1+i$,	i	
ou	j,	1,	$11+i$,	$14+i$,	7,	$13+i$,	4,	13,	$10+i$,	$9+i$,	$8+i$	etc.

Le sous-module est ici en général 8, mais pour les indices dont j, $2j$, $3j$, $4j$ font partie, il se réduit à 4, 2, 2, 1.

Les indices des nombres composés dérivent de ceux des nombres premiers, et dans notre Table nous avons donné ceux relativement au module 32. Le tableau A. p. XII donne les indices des nombres tant impairs que pairs, et B. les nombres appartenant aux indices. Pour le module 5^5 on trouve les indices (p. IV—VII) et les nombres (p. I—III, et obs. 1, p. IV). Les indices j et $j+5000$ s'offrent ici l'un à côté de l'autre, parce que les nombres n et $3125-n$ leur répondent, et la base étant 2, le calcul s'achève en doublant le moindre nombre et prenant son complément au module (chose qui a lieu pour toute base $=2$). Ainsi $J2048$ étant $=44$, et $5^5-2048=1077$, $J1077$ sera 5044, et $J2154 \backsim J2+5044 \backsim 5048$; mais $44+4=48 \backsim J971$ ou $\backsim J(3125-2154)$. Les indices des nombres $5^r.n$ et les nombres appartenant aux indices $r.i+j$ se trouvent dans les Tables VIII—X, comme nous venons de le dire. La théorie étant ainsi expliquée, passons à *l'usage* de notre *table d'indices*.

L'usage principal en consiste en ce qu'ils servent à résoudre le problème *de trouver les n* (5) *derniers chiffres d'un nombre entier inconnu* (x) et conséquemment *de trouver le nombre x même, s'il est inférieur à* 10^n (n, dans notre table, est inférieur à 6, mais cette limite pourra être surpassée, si quelqu'un entreprend de calculer des canons plus étendus, du moins pour 5). Le problème se résout par la recherche des restes r_0 et r_1 de x par rapport à 2^n et 5^n, dont on se sert alors pour déterminer le reste r de x par rapport à 10^n. Ce calcul s'opère selon le théorème connu: Si $x \underset{p}{\backsim} a$, $x \underset{q}{\backsim} a$, et q premier avec p, on a $x \underset{pq}{\backsim} a$. Comparons aussi ce que nous avons dit sur le problème arithmétique mentionné au commencement de cette note; nous avons (en posant $\Delta r_0 = r_1 - r_0$) x ou $r = r_1 + 5^n.\Delta r_0.d_n$, si $d_2=1$, $d_3=3$, $d_4=-1$, $d_5=3$, $d_6=7$. Il est clair que cette formule donne $x \underset{5^n}{\backsim} r$, ce qu'il fallait. Il reste à prouver que $x \underset{2^n}{\backsim} r_0$. Pour d_5, voyez p. XI. Pour $d_6=7$ nous démontrons la formule de la manière suivante. On a $5^3 \backsim -3$ (mod. 64), donc $5^6 \backsim 9$, et $7.5^6 \backsim 63 \backsim -1$, par conséquent $r_1+5^6.\Delta r_0 \backsim r_1-\Delta r_0 \backsim r_0$. De cette manière on trouve pour les cinq derniers chiffres de 877 les suivants: 48157 (V, p. XI), et l'on en trouvera autant pour une puissance quelconque. Mais nous pouvons aussi nous occuper de la question inverse: *chercher les puissances* (carrés, cubes etc.) *dont les cinq derniers chiffres sont des nombres donnés a.* Cela revient à résoudre la congruence $x^n \underset{10^5}{\backsim} a$, et cette

congruence se réduit immédiatement à ces deux $x^n \underset{2^5}{\sim} a$ et $x^n \underset{5^5}{\sim} a$. Soit par exemple $a = 46357$. On trouve tout de suite (à l'aide des nombres d'épreuve N. P. p. IX) $a \underset{32}{\sim} 21$ et $a \underset{m}{\sim} 2607$ (si $m = 5^5$). On aura donc la congruence $x^5 \underset{32}{\sim} 21$ à résoudre d'où $5.Jx \sim J21 \underset{8}{\sim} 7+i$ (voir Table A. p. XII); or 3.5 étant $\underset{8}{\sim} -1$, on a $Jx \sim -3(7+i) \underset{8}{\sim} 3+i$ (à cause de $2i \sim 0$), donc $x \sim N(3+i) \sim 5 \sim r_0$ (v. Table B. p. XII). — Passons à la résolution de l'autre congruence $x^5 \underset{m}{\sim} 2607$. On trouve $5Jx \sim J2607 \underset{10^5}{\sim} 8260$ (Table VI), d'où (v. T. I—III)

$$Jx \underset{2.10^5}{\sim} 1652 \underset{10000}{\sim} \begin{vmatrix} 1652, & 3652, & 5652, & 7652, & 9652, \\ 1817, & 2442, & 3067, & 567, & 1192, \end{vmatrix} \sim r_1.$$

Enfin il faut réunir ces restes en un seul pour le module 10^5 $(=32m)$ moyennant les N. P., d'après la formule $r \sim r_0 + 5^5.3.\Delta r_0$. Divisons d'abord $3\Delta r_0$ par 32; nous obtenons -4, 15, 2, -10, 7, puis multiplions par 55 (au moyen des N.P.) et ajoutons r_1; en posant $\nu = 10^5$ il suit $r \underset{\nu}{\sim} 89317$, 49317, 9317, 69317 ou 2917. Il est évident qu'on peut résoudre de la même façon toute congruence $ax^m \sim b$ dont le module est égal à $2^n.5^n$, et encore si p est égal à 2 ou 5 et $n = 5+s$, on saura résoudre $ax^m \underset{p^s}{\sim} b$ ou $ap^5x^m \underset{p^{5+s}}{\sim} b.p^5$. Ainsi p. e. $x^2 \underset{10^4}{\sim} 1329$ donne $x \underset{10^4}{\sim} \pm 177, \pm 1073$.

C'est par la réunion de notre petite table pour les cinq derniers chiffres avec nos deux canons des modules 9091 et 9901 et avec le Thesaurus de *Vega* que nous serons en état de calculer commodément tout nombre inférieur à 9.10^{21}, c'est-à-dire s'écrivant avec 22 chiffres. L'énoncé du problème est celui-ci: *Étant trouvés, au moyen des logarithmes anciens et nouveaux, les m premiers et les n (ou 5) derniers chiffres d'un nombre inconnu T, il s'agit de trouver, si T ne surpasse pas une certaine limite, les chiffres de T qui restent encore à déterminer.* Posons $T = a.10^\alpha + x.10^5 + b$; nous connaîtrons d'abord a, α et b, et nous pourrons donc calculer $a.10^\alpha + b = B$. Par conséquent nous aurons $x.10^5 \sim T - B \sim A$. Appliquons-y maintenant les indices de nos grands modules P et P'. Nous aurons pour l'un et l'autre $Jx \sim JA - 5.J10$, d'où nous déterminerons x par la composition des restes que ces congruences fournissent. Soit p. e. $T = 877^5$. Il vient $a = 518797$, $b = 48157$, $\alpha = 9$. Faisons $P = 9901$; le reste B' de B suivant P se calculera ou par nos symboles 1^{-VI} et $n10101$, ou par le canon des J_P; d'où $B \underset{P}{\sim} 4151$. Or $J_1 877 \sim 4699$ (mod. P_1), $J_1 877^5 \sim 5.4699 \sim 3695$, donc $877^5 \underset{P}{\sim} 4531 \sim T$, et $A \underset{P}{\sim} T - B \sim 380 \sim x.10^5$; mais $J10 \sim 825$, donc $Jx \sim J380 - 5.825 \sim 2444$,

et $x = N2444 = 6101$, ce qui sera exact, parce que T' est plus petit que $10^{6+5}P$. Donc $T = 518797|6101|48157$. Ou bien ne calculons pas b, mais $n = 51879761$, $\alpha = 7$ (par le Thes. de *Vega*); employons de plus le canon du module $9091 = P'$. Il viendra: $T \underset{P'}{\sim} 5753$ et de là $T \underset{PP'}{\sim} r + P.2009.1222 \sim 4242159$, d'où l'on dérivera la même valeur de $T = 877^5$ *).

*) Pour plus de détail et pour différents usages (dans l'instruction des mathématiques, dans les calculs probatoires etc.) V. les tables mêmes et les „Afhandl. om tals visare".

Lund, 1861.

Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen.

(Von Herrn *G. Kirchhoff* in Heidelberg.)

Herr *Helmholtz* hat in seiner Mittheilung „über discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen“ *) zum ersten Male die Gestalt eines freien Flüssigkeitsstrahles in einem speciellen Falle theoretisch bestimmt. Die von ihm dabei benutzte Methode lässt sich, wie hier gezeigt werden soll, leicht so verallgemeinern, dass sie zur Lösung derselben Aufgabe für eine grosse Zahl von Fällen führt.

Es wird vorausgesetzt, dass die Flüssigkeit incompressibel ist, dass keine äusseren Kräfte auf sie wirken, dass ihre Theilchen nicht rotiren, dass die Strömungen stationäre sind, und endlich, dass die Bewegung überall parallel einer festen Ebene ist.

Nennt man x und y die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes des von der strömenden Flüssigkeit erfüllten Raumes, parallel dieser Ebene, und φ das Geschwindigkeitspotential in diesem Punkte, so ist φ eine Function von x und y, die der Gleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

genügt. Dabei sind $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ die Geschwindigkeiten parallel den Axen der x und der y, und, ist p der Druck, ϱ die Dichtigkeit, so ist weiter

$$p=c-\frac{\varrho}{2}\left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right),$$

wo c eine Constante bedeutet. Hat die strömende Flüssigkeit eine freie Grenze, so muss diese einer Strömungslinie entsprechen, und es muss für sie der Druck ein constanter sein. Die zweite von diesen Bedingungen wird, wenn man die in Betracht kommenden Einheiten passend wählt:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=1.$$

Der partiellen Differentialgleichung für φ wird genügt, wenn man

$$z=x+iy, \qquad \omega=\varphi+i\psi,$$

wo

$$i=\sqrt{-1},$$

*) Monatsberichte der Berl. Akad. April 1868.

und ω gleich irgend einer Function von z setzt. Dabei ist die Gleichung einer Strömungscurve

$$\psi = \text{const.},$$

und es ist

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\frac{\partial x}{\partial\varphi}}{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\frac{\partial y}{\partial\varphi}}{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2},$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2},$$

wenn man auf den rechten Seiten dieser Gleichungen x und y als Functionen von φ und ψ dargestellt annimmt. Die Bedingungen für eine freie Grenze des Strahles sind dann die, dass für sie

$$\psi = \text{const.}$$

und

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2 = 1$$

ist. Es handelt sich darum, solche Functionen ω von z zu finden, dass diesen Bedingungen genügt wird.

Zu diesem Zwecke setze man:

$$\frac{dz}{d\omega} = f(\omega)+\sqrt{f(\omega)f(\omega)-1},$$

und wähle die Function $f(\omega)$ so, dass sie für einen gewissen Werth von ψ und für ein gewisses Intervall von φ reell ist und zwischen -1 und $+1$ liegt. Für diesen Werth von ψ und dieses Intervall von φ ist dann:

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = f(\omega), \qquad \frac{\partial y}{\partial\varphi} = \sqrt{1-f(\omega)f(\omega)},$$

also

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2 = 1;$$

d. h. die dem Werthe von ψ entsprechende Strömungslinie kann in dem dem Intervalle von φ entsprechenden Stücke eine freie Grenze der bewegten Flüssigkeit bilden. Giebt es mehrere Werthe von ψ, für welche $f(\omega)$ die genannte

Eigenschaft besitzt, so können alle Strömungslinien, welche diesen entsprechen, freie Grenzen sein.

Bei einer bestimmten Annahme über $f(\omega)$ ist ω durch die für $\frac{dz}{d\omega}$ aufgestellte Gleichung im Allgemeinen als eine mehrwerthige Function von z definirt. Es soll das Gebiet von z, d. h. der von der bewegten Flüssigkeit erfüllte Raum, so abgegrenzt werden, dass innerhalb desselben *ein* Zweig von ω nicht in andere übergeht; dieser Zweig stellt dann eine mögliche Flüssigkeitsbewegung dar. Der genannte Zweck wird erreicht, wenn das Gebiet von ω auf passende Weise begrenzt wird.

In Bezug auf die Begrenzung des Gebietes von ω werde zunächst festgesetzt, dass sie eine in sich zurückkehrende, sich nicht schneidende Linie ist, die aus Theilen besteht, für welche ψ constante Werthe hat, und aus Theilen, für welche φ einen unendlich grossen positiven oder einen unendlich grossen negativen Werth besitzt.

Innerhalb des Gebietes von ω soll $f(\omega)$ eine einwerthige Function von ω sein. Hat man für $f(\omega)$ einen Ausdruck angenommen, der eine mehrwerthige Function darstellt, so sollen daher aus den Verzweigungspunkten derselben Schnitte gezogen sein, für welche ψ constante Werthe hat.

Weiter soll auch $\sqrt{f(\omega)f(\omega)-1}$ zu einer einwerthigen Function von ω gemacht werden, indem aus denjenigen Punkten, für welche $f(\omega) = \pm 1$ ist, Schnitte gelegt werden, für welche ψ constante Werthe hat. Für *einen* Punkt des Gebietes von ω kann dann noch über das Vorzeichen der Wurzelgrösse verfügt werden. Sind Punkte vorhanden, für welche $f(\omega)$ unendlich oder unendlich gross *) ist, so soll für *einen* dieser Punkte

$$\sqrt{f(\omega)f(\omega)-1} = +f(\omega)$$

gemacht und vorausgesetzt werden, dass für sie alle dieselbe Gleichung besteht.

Ferner werde angenommen, dass die Function $f(\omega)$ *nur* in ihren Verzweigungspunkten unendlich wird, wenn sie es überhaupt wird; und auch hier nur so, dass, wenn $f(\omega_0)$ unendlich ist,

$$(\omega-\omega_0)f(\omega)$$

sich der Null nähert, wenn ω dem Werthe ω_0 sich nähert.

---

*) Ich nenne *unendlich* das Reciproke von Null, *unendlich gross* das Reciproke einer unendlich kleinen Grösse.

Innerhalb des bezeichneten Gebietes von ω ist dann z eine einwerthige Function dieser Variablen, und zwar eine, die nirgend unendlich wird.

Nun betrachte man ω als Function von z. Das Gebiet von z, welches dem angenommenen Gebiete von ω entspricht, erstreckt sich nicht durch die Unendlichkeit und ist begrenzt durch eine in sich zurücklaufende Linie, die zusammengesetzt ist aus den Linien, deren Gleichungen $\varphi = -\infty$ und $\varphi = +\infty$ sind, und aus Strömungslinien; ein gewisser Theil der letzteren kann als freie Grenze der bewegten Flüssigkeit, der andere als feste Wand angesehen werden. Innerhalb dieses Gebietes von z hat ω keine Verzweigungspunkte, da $\frac{dz}{d\omega}$ in keinem Punkte desselben verschwindet. Unter der Bedingung, dass die Grenze des Gebietes von z sich selbst nicht schneidet, ist daher innerhalb desselben ω eine einwerthige Function von z. Es ist diese vollkommen bestimmt, sobald man noch einen Werth von z als entsprechend einem gewissen Werthe von ω festsetzt.

Ein Beispiel, welches eine Verallgemeinerung des von Herrn *Helmholtz* behandelten Falles bildet, erhält man, wenn man

$$f(\omega) = k + e^{-\omega}$$

setzt, wo k — wie auch in den folgenden Beispielen — einen positiven echten Bruch bezeichnet, und das Gebiet von ω durch die Linien

$$\psi = 0, \qquad \varphi = -\infty,$$
$$\psi = \pi, \qquad \varphi = +\infty$$

begrenzt.

Der für $f(\omega)$ angenommene Ausdruck ist einwerthig; die Verzweigungspunkte von $\sqrt{f(\omega)f(\omega)-1}$, welche nicht ausserhalb des bezeichneten Gebietes liegen, sind die Punkte

$$\varphi = -\log(1-k), \qquad \psi = 0,$$
$$\varphi = -\log(1+k), \qquad \psi = \pi;$$

sie liegen in der Grenze dieses Gebietes, und es darf deshalb dasselbe nicht durch Schnitte weiter begrenzt werden.

Die Gleichungen der Grenze des Gebietes von ω sind zugleich die Gleichungen der Grenze des Gebietes von z. Nimmt man an, dass

$$\text{für} \quad \varphi = -\lg(1+k) \quad \text{und} \quad \psi = \pi$$
$$x = 0 \quad \text{und} \quad y = 0$$

ist, so sind diese Gleichungen entwickelt die folgenden.

Für $\psi = \pi$ und $\varphi < -\lg(1+k)$ ist

$$x = \int_{-\lg(1+k)}^{\varphi} \left(k - e^{-\varphi} - \sqrt{(k-e^{-\varphi})^2 - 1}\right) d\varphi,$$
$$y = 0,$$

wo die Wurzel — wie auch später jede Wurzel aus einer positiven Grösse — positiv genommen werden soll. Durch diese Gleichungen wird die positive Hälfte der x-Axe dargestellt; dieselbe ist als feste Wand anzunehmen; an sie schliesst sich im Anfangspunkte der Coordinaten eine freie Grenze; für diese, nämlich für $\psi = \pi$ und $\varphi > -\lg(1+k)$, ist

$$x = \int_{-\lg(1+k)}^{\varphi} (k - e^{-\varphi})\, d\varphi,$$
$$y = -\int_{-\lg(1+k)}^{\varphi} \sqrt{1-(k-e^{-\varphi})^2}\, d\varphi.$$

Ferner findet man für $\psi = 0$ und $\varphi < -\lg(1-k)$

$$x = \int_{-\lg(1-k)}^{\varphi} \left(k + e^{-\varphi} + \sqrt{(k+e^{-\varphi})^2 - 1}\right) + a,$$
$$y = b$$

und für $\psi = 0$ und $\varphi > -\lg(1-k)$

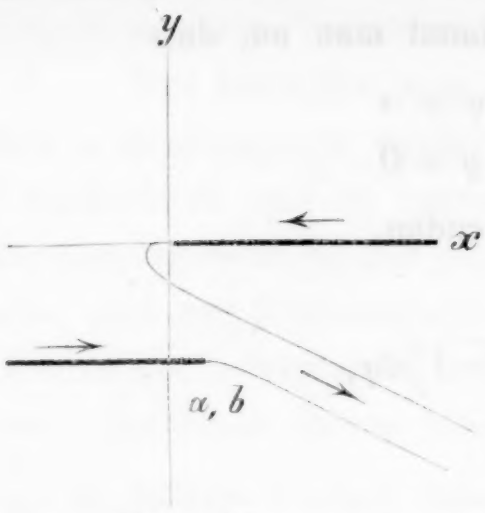
$$x = \int_{-\lg(1-k)}^{\varphi} (k + e^{-\varphi})\, d\varphi + a,$$
$$y = -\int_{-\lg(1-k)}^{\varphi} \sqrt{1-(k+e^{-\varphi})^2}\, d\varphi + b,$$

wo

$$a = k \lg \frac{1+k}{1-k} - 2 - \pi\sqrt{1-k^2},$$
$$b = -2\pi k.$$

Der erste Theil der Strömungslinie $\psi = 0$, der eine der x-Axe parallele, bis zum Punkte $x = a$, $y = b$ gehende Gerade ist, ist als feste Wand, der zweite Theil als freie Grenze des austretenden Strahles anzusehen.

Fig. 1.



Der ungefähre Verlauf der Linien $\psi=\pi$ und $\psi=0$ ist in Fig. 1 dargestellt.

Die Vervollständigung der Begrenzung des Gebietes von z wird gebildet durch die Linie $\varphi=-\infty$, d. h.

$$x = 2k\varphi - 2e^{-\varphi}\cos\psi + a_1,$$
$$y = 2k\psi + 2e^{-\varphi}\sin\psi + b_1$$

und die Linie $\varphi=+\infty$, d. h.

$$x = k\varphi + \sqrt{1-k^2}\,\psi + a_2,$$
$$y = k\psi - \sqrt{1-k^2}\,\varphi + b_2,$$

wo a_1, b_1, a_2, b_2 Constanten sind, deren Werthe leicht angebbar und theilweise benutzt sind bei der Berechnung von a und b. Die erste von diesen beiden Linien lässt sich bezeichnen als ein Halbkreis, der mit einem unendlich grossen Radius um den Anfangspunkt der Coordinaten beschrieben ist; die zweite ist eine Gerade, die in unendlich grosser Entfernung vom Anfangspunkte senkrecht zum Strahle steht; der Strahl bildet hier mit der positiven x-Axe einen Winkel, dessen Cosinus $=k$ ist.

Lässt man $k=1$ werden, so wird a unendlich, der Punkt a, b rückt in die Unendlichkeit; das Gebiet von ω kann man dann durch die Linien $\psi=\pi$ und $\psi=-\pi$ statt durch die Linien $\psi=\pi$ und $\psi=0$ begrenzen; dadurch kommt man zu dem von Herrn *Helmholtz* behandelten Falle, auf den Fig. 2 sich bezieht.

Fig. 2.

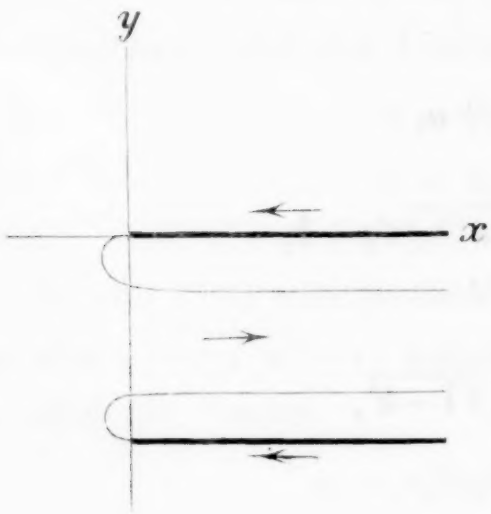
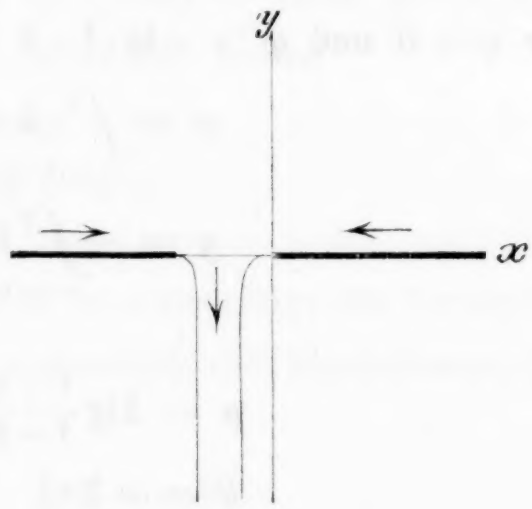


Fig. 3.



Macht man $k=0$, so wird $b=0$; die Begrenzung der bewegten Flüssigkeit ist dann die Fig. 3 dargestellte.

Als ein zweites Beispiel möge der Fall behandelt werden, dass

$$f(\omega) = k + \frac{1}{\sqrt{\omega}}$$

ist, und das Gebiet von ω sich nach allen Richtungen ins unendlich Grosse erstreckt.

Um $f(\omega)$ zu einer einwerthigen Function zu machen, lege man von dem Punkte $\omega = 0$ aus einen Schnitt, für den $\psi = 0$ und $\varphi > 0$ ist, und setze fest, dass für $\varphi = +0$ und $\psi = +0$ der reelle Theil von $\sqrt{\omega}$ positiv ist. Die Verzweigungspunkte von $\sqrt{f(\omega)f(\omega)-1}$ sind die Punkte, für welche

$$\omega = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{\omega}} = 1-k, \quad \frac{1}{\sqrt{\omega}} = -(1+k)$$

ist; sie liegen alle auf dem schon gezogenen Schnitte, erfordern also nicht die Legung neuer Schnitte. Was das Vorzeichen von $\sqrt{f(\omega)f(\omega)-1}$ betrifft, so muss dasselbe nach den gemachten Festsetzungen so bestimmt werden, dass der reelle Theil dieser Wurzelgrösse für $\varphi = +0$ und $\psi = +0$ positiv ist. Endlich werde angenommen, dass ω und z gleichzeitig verschwinden.

Zur Grenze des Gebietes von z gehört die Linie, für welche $\psi = 0$ und $\varphi > 0$ ist. Diese Linie setzt sich aus mehreren Theilen zusammen, die zu unterscheiden sind. Für $\psi = +0$ und $0 < \varphi < \frac{1}{(1-k)^2}$ ist

$$x = \int_0^{\varphi} \left(k + \frac{1}{\sqrt{\varphi}} + \sqrt{\left(k + \frac{1}{\sqrt{\varphi}}\right)^2 - 1}\right) d\varphi,$$

$$y = 0,$$

für $\psi = -0$ und $0 < \varphi < \frac{1}{(1+k)^2}$

$$x = \int_0^{\varphi} \left(k - \frac{1}{\sqrt{\varphi}} - \sqrt{\left(k - \frac{1}{\sqrt{\varphi}}\right)^2 - 1}\right) d\varphi,$$

$$y = 0.$$

Diese Gleichungen stellen einen Theil der x-Axe dar, welcher als feste Wand anzunehmen ist. Benutzt man, dass

$$\int \sqrt{\left(k + \frac{1}{\sqrt{\varphi}}\right)^2 - 1}\, d\varphi$$

$$= \frac{(1-k^2)\sqrt{\varphi} - k}{1-k^2} \sqrt{(k\sqrt{\varphi}+1)^2 - \varphi} + \frac{1}{(1-k^2)^{\frac{3}{2}}} \arcsin\left((1-k^2)\sqrt{\varphi} - k\right)$$

ist, so findet man für die Endpunkte dieses Theiles

$$x = 2\frac{1+k-k^2}{(1-k)(1-k^2)} + \frac{1}{(1-k^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin k\right)$$

und

$$x = -2\frac{1-k-k^2}{(1+k)(1-k^2)} - \frac{1}{(1-k^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin k\right),$$

wo $\arcsin k$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ zu wählen ist.

Für $\psi = +0$ und $\varphi > \frac{1}{(1-k)^2}$ ist

$$\frac{dx}{d\varphi} = k + \frac{1}{\sqrt{\varphi}}, \quad \frac{dy}{d\varphi} = -\sqrt{1-\left(k+\frac{1}{\sqrt{\varphi}}\right)^2},$$

und für $\psi = -0$ und $\varphi > \frac{1}{(1+k)^2}$

$$\frac{dx}{d\varphi} = k - \frac{1}{\sqrt{\varphi}}, \quad \frac{dy}{d\varphi} = -\sqrt{1-\left(k-\frac{1}{\sqrt{\varphi}}\right)^2}.$$

Die Linien, welche durch die Integrale dieser Gleichungen dargestellt werden, wenn man die Integrationsconstanten so bestimmt, dass sie von den eben bezeichneten Endpunkten der festen Wand ausgehen, sind freie Grenzen der bewegten Flüssigkeit. Die übrigen Grenzen des Gebietes von z liegen im unendlich Grossen, wie daraus hervorgeht, dass für $\omega = \infty$

$$\frac{dz}{d\omega} = k - i\sqrt{1-k^2}$$

ist; diese Gleichung zeigt zugleich, dass in unendlich grosser Entfernung vom Anfangspunkte der Coordinaten die Strömung mit der Geschwindigkeit 1 in einer Richtung geschieht, die mit der x-Axe einen Winkel bildet, dessen Cosinus $= k$ ist.

Fig. 4.

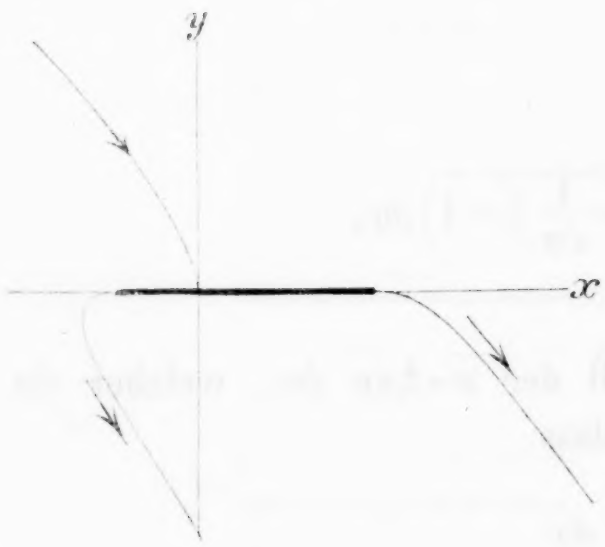


Fig. 4 veranschaulicht die Grenzen des Gebietes von z; ausser diesen ist in ihr noch die Strömungslinie, für die $\psi = 0$ und $\varphi < 0$ ist, angegeben.

Noch ein Beispiel möge angeführt werden. Es sei

$$f(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1-e^{-\omega}}},$$

und es variire ψ von $-\pi$ bis $+\pi$, φ von $-\infty$ bis $+\infty$.

Von dem Punkte $\omega = 0$ aus lege man einen Schnitt, für den $\psi = 0$, $\varphi > 0$ ist, und setze fest, dass für $\varphi = +0$ und $\psi = +0$ der reelle Theil von $f(\omega)$ positiv ist. Die Verzweigungspunkte von $\sqrt{f(\omega)f(\omega)-1}$ sind die beiden Punkte

$$\omega = 0 \quad \text{und} \quad \omega = -\lg(1-k^2),$$

die beide auf dem gezogenen Schnitte sich befinden. Das Vorzeichen der Wurzelgrösse $\sqrt{f(\omega)f(\omega)-1}$ ist dadurch bestimmt, dass ihr reeller Theil für $\varphi = +0$ und $\psi = +0$ positiv sein soll. Endlich setze man fest, dass ω und z gleichzeitig verschwinden.

Zur Grenze des Gebietes von z gehört zunächst die Linie, für welche $\psi = 0$, $\varphi > 0$ ist. Diese setzt sich aus den folgenden Theilen zusammen.

Für $\psi = +0$ und $0 < \varphi < -\lg(1-k^2)$ ist

$$x = \int_0^{\varphi} \left(\frac{k}{\sqrt{1-e^{-\varphi}}} + \sqrt{\frac{k^2}{1-e^{-\varphi}} - 1} \right) d\varphi,$$

$$y = 0,$$

für $\psi = -0$ und $0 < \varphi < -\lg(1-k^2)$

$$x = -\int_0^{\varphi} \left(\frac{k}{\sqrt{1-e^{-\varphi}}} + \sqrt{\frac{k^2}{1-e^{-\varphi}} - 1} \right) d\varphi,$$

$$y = 0.$$

Diese Gleichungen stellen einen Theil der x-Axe dar, der als feste Wand anzunehmen ist. An ihn schliessen sich als freie Grenzen der bewegten Flüssigkeit die Linien, für welche

$$\psi = +0, \qquad \varphi > -\lg(1-k^2),$$

also

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{k}{\sqrt{1-e^{-\varphi}}}, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = -\sqrt{1-\frac{k^2}{1-e^{-\varphi}}}$$

und

$$\psi = -0, \qquad \varphi > -\lg(1-k^2),$$

also

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\frac{k}{\sqrt{1-e^{-\varphi}}}, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = -\sqrt{1-\frac{k^2}{1-e^{-\varphi}}}$$

ist. Die übrigen Grenzen des Gebietes von z sind die Linien $\psi=-\pi$, $\psi=+\pi$, $\varphi=-\infty$, $\varphi=+\infty$.

Für $\psi=-\pi$ ist

$$\frac{dx}{d\varphi}=-\frac{k}{\sqrt{1+e^{-\varphi}}}, \qquad \frac{dy}{d\varphi}=-\sqrt{1-\frac{k^2}{1+e^{-\varphi}}},$$

für $\psi=+\pi$

$$\frac{dx}{d\varphi}=\frac{k}{\sqrt{1+e^{-\varphi}}}, \qquad \frac{dy}{d\varphi}=-\sqrt{1-\frac{k^2}{1+e^{-\varphi}}};$$

diese beiden Strömungslinien sind in ihrer ganzen Ausdehnung freie Grenzen.

Für $\varphi=-\infty$ ist $\frac{dz}{d\omega}=-i$,

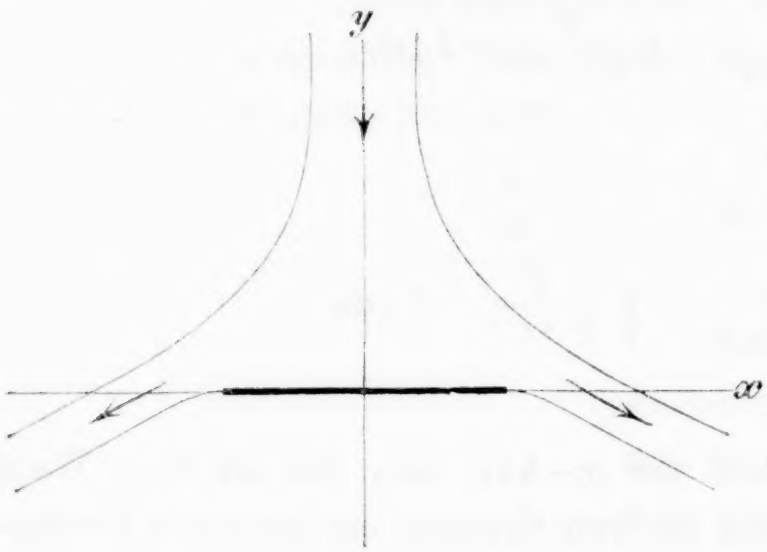
für $\varphi=+\infty$, $\psi<0$: $\frac{dz}{d\omega}=-k-i\sqrt{1-k^2}$,

und für $\varphi=+\infty$, $\psi>0$: $\frac{dz}{d\omega}=\quad k-i\sqrt{1-k^2}$.

Für $\varphi=-\infty$ ist hiernach $y=+\infty$, und die Strömung geschieht mit der Geschwindigkeit 1 in der Richtung der negativen y-Axe; für $\varphi=+\infty$ ist $x=\mp\infty$, $y=-\infty$, und die Strömung geschieht mit der Geschwindigkeit 1 in einer Richtung, die mit der positiven x-Axe einen Winkel bildet, dessen Cosinus $\mp k$ ist.

In Fig. 5 sind die Grenzen der bewegten Flüssigkeit für diesen Fall dargestellt.

Fig. 5.



Heidelberg, Mai 1869.

Ueber die Integration lineärer totaler Differentialgleichungen, denen durch ein Integral Genüge geschieht.

(Von Herrn *Paul du Bois-Reymond* in Heidelberg.)

Ich habe in meiner Schrift: Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen *) §. 1 eine neue Methode entwickelt, um das Integral einer lineären totalen Differentialgleichung mit drei Variabeln, wenn sie durch ein Integral befriedigt werden kann, mit dem Integral nur einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in Zusammenhang zu bringen, und habe auch dort schon bemerkt, dass diese Auflösungsmethode sich ausdehnen lasse auf Differentialgleichungen mit n Variabeln und einem Integral, dessen Auffindung dann auch von der Auflösung nur einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung abhängt. Die damals angekündigte Ausdehnung wird in §. 5 und §. 6 dieser Mittheilung gegeben. In den voraufgehenden Paragraphen wird ihre geometrische Grundlage, die Auflösungsmethode der Differentialgleichungen mit drei Variabeln, indessen in vollständigerer Weise, als a. a. O. geschah, entwickelt, wobei ich bemüht bin, den Unterschied der zwei verschiedenen Formen hervortreten zu lassen, welche man der in Rede stehenden Methode ertheilen kann, ein Unterschied, der bei der Ausdehnung auf n Variabeln die beiden Formen der geometrischen Methode in zwei wesentlich verschiedene analytische Methoden auseinanderführt.

§. 1. Die Auflösung der Gleichung $Xdx + Ydy + Zdz = 0$, wenn sie durch ein Integral befriedigt werden kann, wird nach einer ersten Methode bewerkstelligt.

Ich nehme an, die Differentialgleichung:

$$(1.) \qquad Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

lasse sich durch ein Integral befriedigen, d. h. sie lasse sich auf die Form bringen:

$$M\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz\right) = 0,$$

*) Leipzig, 1864, bei Ambr. Barth.

wo M und φ zwei Functionen von x, y, z bedeuten, und $\varphi(x,y,z) = \text{const.} = c$ das Integral von (1.) ist.

Wir können $\varphi(x, y, z) = c$ als die Gleichung einer Oberflächenschaar ansehen. Dann ist die Differentialgleichung $Xdx + Ydy + Zdz = 0$ die Differentialgleichung aller auf allen Oberflächen jener Schaar denkbaren Curven. Es handelt sich nun darum, wenn M nicht gegeben ist, φ zu finden.

Es seien die Gleichungen:

$$a = \chi(x, y, z),$$
$$b = \chi_1(x, y, z)$$

von zwei anderen Oberflächenschaaren beliebig gegeben. Diese Schaaren liefern auf jedem Individuum der Schaar $\varphi(x, y, z) = c$ zwei Schaaren von Durchschnittslinien, die daselbst ein Coordinatensystem bilden. Wir wollen jetzt unser Augenmerk richten auf *drei* Punkte derjenigen Oberfläche $\varphi = c$, welche durch einen festgedachten Punkt $\mathfrak{P}_0$ mit den Coordinaten x_0, y_0, z_0 geht. Die Gleichung dieser speciellen Oberfläche ist dann $\varphi(x, y, z) = \varphi(x_0, y_0, z_0)$ oder kürzer $\varphi = \varphi_0$.

Der erste jener drei Punkte ist der Punkt $\mathfrak{P}_0$. Wir gehen von ihm aus auf der Durchschnittslinie der ihn passirenden Oberfläche $b = \chi_1$ mit $\varphi = \varphi_0$ bis zu einem beliebigen Punkt $\mathfrak{P}_1$ mit den Coordinaten x_1, y_1, z_1, welcher der *zweite* jener drei Punkte ist. Endlich vom Punkt $\mathfrak{P}_1$ gehen wir auf der ihn passirenden Durchschnittslinie einer Oberfläche $a = \chi$ mit $\varphi = \varphi_0$ bis zu einem beliebigen Punkt $\mathfrak{P}$, dem *dritten* jener drei Punkte.

Man erhält die Differentialgleichung einer Projection der Durchschnittslinien von $\varphi = \varphi_0$ mit $a = \chi$ durch Combination der Gleichungen

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 \quad \text{und} \quad a = \chi, \quad 0 = d\chi$$

zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung mit zwei Variabeln *). Das Integral dieser Differentialgleichung sei:

$$f(x, y, z, a) = c_1.$$

Ebenso findet man

$$f^0(x, y, z, b) = c_2$$

als Gleichung einer Projection der Durchschnittslinien von $\varphi = \varphi_0$ mit $b = \chi_1$

*) D. h. man eliminirt aus diesen Gleichungen entweder eine der Variabeln x, y, z und ihr Differential, oder man führt für x, y, z drei neue Variabeln ein und verfährt ebenso; im letzteren Falle werden im Integral der Differentialgleichung, wenn man für die neuen Variabeln die alten x, y, z zurücksetzt, im Allgemeinen diese sämmtlich explicite vorhanden sein, deshalb ist in dem Integral $f(x,y,z,a) = c_1$ der so erhaltenen Differentialgleichung hier und in den folgenden ähnlichen Fällen keine der Variabeln x, y, z ausgelassen.

durch Combination der Gleichungen $X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=0$, $b=\chi_1$, $0=d\chi_1$ zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung mit zwei Variabeln und Integration derselben.

Nun sind die Coordinaten x_0, y_0, z_0; x_1, y_1, z_1; x, y, z der Punkte $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}$ enthalten in den Gleichungen:

$$\begin{aligned} b &= \chi_1(x_0, y_0, z_0), & b &= \chi_1(x_1, y_1, z_1),\\ c_2 &= f^0(x_0, y_0, z_0, b), & c_2 &= f^0(x_1, y_1, z_1, b),\\ a &= \chi(x_1, y_1, z_1), & a &= \chi(x, y, z),\\ c_1 &= f(x_1, y_1, z_1, a), & c_1 &= f(x, y, z, a), \end{aligned}$$

die man kürzer schreibt:

$$\begin{aligned} f(x, y, z, a)-f(x_1, y_1, z_1, a) &= 0,\\ \chi(x, y, z) &= a,\\ \chi(x_1, y_1, z_1) &= a,\\ f^0(x_1, y_1, z_1, b)-f^0(x_0, y_0, z_0, b) &= 0,\\ \chi_1(x_1, y_1, z_1) &= b,\\ \chi_1(x_0, y_0, z_0) &= b. \end{aligned}$$

Aus vorstehenden sechs Gleichungen folgt durch Elimination von a, b, x_1, y_1, z_1 *eine* Gleichung in x, y, z; x_0, y_0, z_0, die, x_0, y_0, z_0 als constant gedacht, zwei von den Variabeln x, y, z willkürlich lässt, mithin mit dem Integral $\varphi(x, y, z)-\varphi(x_0, y_0, z_0)=0$ identisch sein muss und auf die nämliche Form muss gebracht werden können. Ich werde zu dieser Integrationsmethode ein Beispiel geben.

Das Integral sei:

$$c=\varphi=x^2(y+z).$$

Dann ist die Differentialgleichung unter Fortlassung des Multiplicators x:

$$2(y+z)\,dx+x\,dy+x\,dz = 0.$$

Die beiden Oberflächenschaaren seien:

$$a=\chi = \frac{y}{x},$$

$$b=\chi_1=\frac{z}{x}.$$

Durch Einsetzung von y und z aus diesen beiden Gleichungen in die Differentialgleichung erhält man diese beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} 3ax\,dx+2z\,dx+x\,dz &= 0,\\ 3bx\,dx+2y\,dx+x\,dy &= 0, \end{aligned}$$

deren Integrale sind:

$$c_1 = f = ax^3 + x^2 z,$$
$$c_2 = f^0 = bx^3 + x^2 y,$$

woraus folgt:

$$f(x, y, z, a) = f(x_1, y_1, z_1, a) \equiv ax^3 + x^2 z = ax_1^3 + x_1^2 z,$$
$$f^0(x_1, y_1, z_1, b) = f^0(x_0, y_0, z_0, b) \equiv bx_1^3 + x_1^2 y_1 = bx_0^3 + x_0^2 y_0.$$

In die obere Gleichung hat man nun für a einmal $\frac{y}{x}$, dann $\frac{y_1}{x_1}$ zu setzen, in die untere für b einmal $\frac{z_1}{x_1}$, dann $\frac{z_0}{x_0}$. Man erhält so diese vier Gleichungen:

$$x^3(y+z) = x_1^2(x_1 y + x z_1),$$
$$x^2(x y_1 + x_1 z) = x_1^3(y_1 + z_1),$$
$$x_1^3(y_1 + z_1) = x_0^2(x_0 z_1 + x_1 y_0),$$
$$x_1^2(x_1 z_0 + x_0 y_1) = x_0^3(y_0 + z_0).$$

Aus diesen vier Gleichungen muss durch Elimination von x_1, y_1, z_1 die Gleichung $x^2(y+z) = x_0^2(y_0+z_0)$ folgen. Man überzeugt sich leicht davon, dass dies der Fall ist, indem man die Gleichungen etwas umformt. Man ziehe nämlich von beiden Seiten obiger Gleichungen der Reihe nach ab:

$$x_1^3 y, \quad x^3 z_1, \quad x_0^3 y_1, \quad x_1^3 y_0.$$

Dann lassen sie sich schreiben:

$$(y+z)(x^3 - x_1^3) = x_1^2(x z_1 - x_1 z),$$
$$(y_1 + z_1)(x^3 - x_1^3) = x^2(x z_1 - x_1 z),$$
$$(y_1 + z_1)(x_1^3 - x_0^3) = x_0^2(x_1 y_0 - x_0 y_1),$$
$$(y_0 + z_0)(x_1^3 - x_0^3) = x_1^2(x_1 y_0 - x_0 y_1).$$

Nun liefert die Division der ersten und zweiten Gleichung: $x^2(y+z) = x_1^2(y_1+z_1)$ und die der dritten und vierten: $x_1^2(y_1+z_1) = x_0^2(y_0+z_0)$, aus welchen beiden Gleichungen sich durch Vergleichung das gesuchte Integral in der verlangten Form $x^2(y+z) = x_0^2(y_0+z_0)$ ergiebt.

§. 2. Specialisirung der allgemeinen Methode des §. 1.

Die eben auseinandergesetzte Methode hat die allgemeinste Gestalt, welche man ihr geometrisch geben kann, insofern sie in Bezug auf die Punkte $\mathfrak{P}_0$ und $\mathfrak{P}$ vollkommen symmetrisch ist. Giebt man aber diese Symmetrie

auf, so lässt sie u. A. folgende nützliche Vereinfachung zu. Zunächst kann man, wenn es sich nur darum handelt, das Integral $\varphi = c$ zu finden, den Punkt $\mathfrak{P}_0$ auf einer festen Oberfläche liegend annehmen, also statt der Schaar $\chi_1 = b$ eine einzelne Oberfläche $\chi_1 = 0$ einführen. Dadurch wird die Integration der zweiten Differentialgleichung erleichtert, denn sie enthält einen willkürlichen Parameter weniger. Auf der Oberfläche $\chi_1 = 0$ wird man dann noch, um die Integrationsconstante in nur eine Grösse zusammenzufassen, eine Curve festsetzen, in der der Punkt $\mathfrak{P}_0$ zu liegen hat. Nehmen wir beispielsweise an

$$\chi(x, y, z) = z = a, \qquad \chi_1(x, y, z) = y = 0,$$

und setzen fest, dass $\mathfrak{P}_0$ auf der x-Axe liege, so sind die Coordinaten der Punkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_0$ respective:

$$x = x,\ y = y,\ z = z; \quad x = x_1,\ y = 0,\ z = z; \quad x = x_0,\ y = 0,\ z = 0,$$

und die Integrale:

$$f(x, y, z, a) - f(x_1, y_1, z_1, a) = 0, \quad f^0(x_1, y_1, z_1, b) - f^0(x_0, y_0, z_0, b) = 0$$

werden, wenn man z für a, und 0 für b schreibt:

$$f(x, y, z, z) - f(x_1, 0, z, z) = 0,$$
$$f^0(x_1, 0, z, 0) - f^0(x_0, 0, 0, 0) = 0.$$

Aus beiden Gleichungen x_1 eliminirt, erhält man das Integral $\varphi = c$, worin c durch x_0 ausgedrückt ist. Setzt man $X = \psi(x, y, z)$, $Y = \psi_1(x, y, z)$, $Z = \psi_2(x, y, z)$, so kann man die abgekürzte Methode als Regel so aussprechen. Man integrire erstens die Gleichung

$$\psi(x, y, z)\,dx + \psi_1(x, y, z)\,dy = 0,$$

indem man z als constant behandelt. Ist $\Psi(x, y, z) = c$ das Integral, so bilde man $\Psi(x, y, z) - \Psi(x_1, 0, z) = 0$. Ferner integrire man die Gleichung:

$$\psi(x, 0, z)\,dx + \psi_2(x, 0, z)\,dz = 0.$$

Ist $\Psi_1(x, z) = c_1$ ihr Integral, so bilde man $\Psi_1(x_1, z) - \Psi(x_0, 0) = 0$. Eliminirt man hierauf x_1 aus $\Psi(x, y, z) - \Psi(x_1, 0, z) = 0$ und $\Psi_1(x_1, z) - \Psi(x_0, 0) = 0$, so erhält man das Integral von $\psi\,dx + \psi_1\,dy + \psi_2\,dz = 0$, in welchem x_0 oder auch $\Psi(x_0, 0)$ die Integrationsconstante ist. Diese Regel ist nicht neu. Sie kommt völlig überein mit dem von Herrn *Natani**) zur Integration der Gleichung $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0$ angegebenen Verfahren. und ist allerdings, wie er bemerkt, dem gewöhnlichen Verfahren vorzuziehen, da bei dem gewöhnlichen

*) Bd. 58, pag. 304 dieses Journals.

Verfahren, unter Nichtbenutzung naheliegender Vortheile, die Auflösung zweier Differentialgleichungen verlangt wird, von denen die zweite erst nach Integration der ersten aufgestellt werden kann, bei dem eben entwickelten dagegen aber beide aufzulösenden Differentialgleichungen gleichzeitig aufgestellt werden.

§. 3. Die allgemeine Methode des §. 1 kann so abgeändert werden, dass nur eine gewöhnliche Differentialgleichung aufzulösen ist, die aber einen willkürlichen Parameter mehr enthält.

Die Ersetzung der beiden Differentialgleichungen, deren Auflösung die allgemeine Methode verlangt, durch eine liegt sehr nahe. Statt zwei Oberflächenschaaren $a=\chi(x,y,z)$, $b=\chi_1(x,y,z)$ einzuführen, kann man eine Schaarschaar $\Theta(x,y,z,\alpha,\beta)=0$ einführen. Indem man dem Parameter β beliebig viele numerische Werthe ertheilt, erhält man beliebig viele Oberflächenschaaren, deren variabler Parameter α ist. Combinirt man also die Gleichungen $Xdx+Ydy+Zdz=0$, $\Theta=0$, $d\Theta=0$ zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung mit zwei Variabeln, sucht das Integral $F(x,y,z,\alpha,\beta)=c$ dieser Differentialgleichung, giebt darin dem β, z. B. einmal den Werth 0, einmal den Werth 1, schreibt im ersteren Falle a statt α, im zweiten b statt α, und bildet die Gleichungen:

$$F(x,y,z,a,0)-F(x_1,y_1,z_1,a,0)=0,$$
$$F(x_1,y_1,z_1,b,1)-F(x_0,y_0,z_0,b,0)=0,$$

so sind diese beiden Gleichungen die nämlichen, wie die Gleichungen

$$f(x,y,z,a)-f(x_1,y_1,z_1,a)=0, \quad f^0(x_1,y_1,z_1,b)-f^0(x_0,y_0,z_0,b)=0$$

des §. 1, und liefern gleichzeitig mit den Gleichungen

$$\Theta(x,y,z,a,0)=0, \qquad \Theta(x_1,y_1,z_1,a,0)=0,$$
$$\Theta(x_1,y_1,z_1,b,1)=0, \qquad \Theta(x_0,y_0,z_0,b,1)=0$$

durch Elimination von x_1, y_1, z_1, a, b das Integral der Gleichung

$$Xdx+Ydy+Zdz=0.$$

Führen wir im Beispiel des §. 1 statt der Schaaren $a=\frac{y}{x}$, $b=\frac{z}{x}$ die Schaarschaar $\alpha=(1-\beta)\frac{y}{x}+\beta\frac{z}{x}$ ein, eliminiren z. B. x zwischen dieser Gleichung und den Gleichungen: $\alpha dx=(1-\beta)dy+\beta dz$, $2(y+z)dx+xdy+xdz=0$, so ist das Integral der resultirenden: $\gamma=(y+z)((1-\beta)y+\beta z)^2$. Wenn in

den Gleichungen $\alpha = (1-\beta)\frac{y}{x} + \beta\frac{z}{x}$, $\gamma = (y+z)((1-\beta)y+\beta z)^2$ einmal $\beta = 0$, einmal $\beta = 1$ gesetzt wird, und im ersteren Falle a und c_1, im zweiten b und c_2 für α und γ geschrieben wird, so folgt: $a = \frac{y}{x}$, $c_1 = (y+z)y^2$ und $b = \frac{z}{x}$, $c_2 = (y+z)z^2$. Oder aus $a = \frac{y}{x}$, $c_1 = (y+z)y^2$ folgt durch Elimination von y: $c_1' = ax^3 + x^2 z$, aus $b = \frac{z}{x}$, $c_2 = (y+z)z^2$ folgt durch Elimination von z: $c_2' = bx^3 + x^2 y$, wo $c_1' = \frac{c_1}{a^2}$, $c_2' = \frac{c_2}{b^2}$. Wir haben nun die nämlichen Integrale $c_1' = f$, $c_2' = f^0$ wie im §. 1, so dass die weitere Rechnung mit der dort angestellten identisch sein würde.

Die Modification der allgemeinen Methode, welche in diesem Paragraphen mitgetheilt wurde, darf im Allgemeinen kaum als eine practisch nützliche angesehen werden. Denn, wenn allerdings eine Differentialgleichung weniger aufzulösen ist, so enthält die noch aufzulösende Differentialgleichung dafür einen willkürlichen Parameter mehr, und die ihr genügende Function ist daher schwerer zu definiren. Bei totalen Differentialgleichungen mit mehr wie drei, allgemein mit n Variabeln, dürfte die analoge Modification, die §. 5 gezeigt wird, dagegen wirklich nützlich sein, da sie die Anzahl der zu integrirenden Differentialgleichungen auch dort von n auf *eine* herabsetzt, durch Einführung nur eines willkürlichen Parameters. Im Uebrigen existirt auch eine Methode die Auflösung der Gleichung $Xdx + Ydy + Zdz = 0$ von der Auflösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung mit nur einem willkürlichen Parameter abhängig zu machen, wie im folgenden Paragraphen gezeigt werden soll.

§. 4. Eine andere Auflösungsmethode der Gleichung $Xdx + Ydy + Zdz = 0$, die sich zu der des §. 1 ähnlich verhält, wie Polarcoordinaten zu gewöhnlichen.

Wir führen statt der beiden Schaaren $\chi = a$, $\chi_1 = b$ eine einfache Schaar $\Xi = \alpha$ ein, deren Individuen sämmtlich durch den Punkt $\mathfrak{P}_0$ der Oberfläche $\varphi = c$ gehen. Die Durchschnittslinien der Schaar mit der Oberfläche $\varphi = c$ bilden dann auf dieser eine Curvenschaar, welche sich zu den Durchschnittslinien von $\varphi = c$ und $\chi = a$, $\chi_1 = b$ ähnlich verhält, wie Polarcoordinaten zu gewöhnlichen Coordinaten. Vermöge dieser Construction wird von den drei Punkten $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}$ der mittlere $\mathfrak{P}_1$ ausgelassen, so dass man direct vom Punkt $\mathfrak{P}$ zum Punkt $\mathfrak{P}_0$ gelangt, statt auf einer gebrochenen Linie über $\mathfrak{P}_1$ zu

gehen. Man erhält eine solche Schaar $\Xi = \alpha$, deren Individuen den Punkt x_0, y_0, z_0 enthalten, am allgemeinsten, wenn man die Gleichung einer Schaarschaar aufstellt für einen beliebigen Punkt x, y, z:

$$\Theta(x, y, z, \alpha, b) = 0$$

und für den Punkt x_0, y_0, z_0:

$$\Theta(x_0, y_0, z_0, \alpha, b) = 0$$

und aus beiden Gleichungen den Parameter b eliminirt, wodurch man finden möge:

$$\Xi(x, y, z, x_0, y_0, z_0) = \alpha.$$

Dies ist dann die Gleichung einer nach dem Parameter α variabeln Oberflächenschaar, deren Individuen den Punkt $\mathfrak{P}_0$ enthalten.

Analog der Methode des §. 1 hat man jetzt die Gleichungen:

$$X dx + Y dy + Z dz = 0, \quad \Xi = \alpha, \quad d\Xi = 0$$

zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung mit zwei Variabeln zu combiniren, deren Integral sei

$$f(x, y, z, x_0, y_0, z_0, \alpha) = c,$$

welches man, da x, y, z für jeden Werth von c die Werthe x_0, y_0, z_0 annehmen können, auch schreiben darf:

$$f(x, y, z, x_0, y_0, z_0, \alpha) - f(x_0, y_0, z_0, x_0, y_0, z_0, \alpha) = 0.$$

Wenn α hieraus und aus $\Xi = \alpha$ eliminirt wird, erhält man wieder das Integral $\varphi = c$. Bemerkenswerth ist diese Methode dadurch, dass man vor der Integration der Differentialgleichung die Integrationsconstante, nämlich die Coordinaten x_0, y_0, z_0, in die Differentialgleichung einführt, was, wenn sie die geeigneten *numerischen* Werthe haben, unter Umständen eine grosse Erleichterung gewähren kann. Da man aber im Allgemeinen das Integral mit der *willkürlichen* Constante braucht, so müssen wir die Methode so abändern, dass die Coordinaten x_0, y_0, z_0 erst nach der Integration und nicht in der Differentialgleichung selbst auftreten, da wir sonst in der letzteren mehr wie einen neuen willkürlichen Parameter haben, nämlich α und die Coordinaten x_0, y_0, z_0.

Dies vermeiden wir, indem wir statt der Schaar $\Xi = 0$ eine Schaar $\Pi = \alpha$ anwenden, deren Individuen sämmtlich die nämliche Curve $\pi(x, y, z) = 0$, $\pi_1(x, y, z) = 0$ passiren. Die Combination von $\Pi = \alpha$, $d\Pi = 0$, $X dx + Y dy + Z dz = 0$ zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung mit zwei Variabeln, die Umformung ihres Integrals, die Elimination von α, alles dies geschieht wie oben. Der Unterschied ist nur der, dass die Differentialgleichung ausser α keinen

neuen Parameter enthält neben solchen, die schon in den Coefficienten X, Y, Z etwa enthalten sind. Wir specialisiren diese Methode wieder, indem wir für die Schaar $\Pi = \alpha$ einfach die Schaar der sich in der z-Axe schneidenden Ebenen $y = \alpha x$ nehmen. Dann kann man die Methode als Regel so aussprechen. In:

$$\psi(x, y, z)\,dx + \psi_1(x, y, z)\,dy + \psi_2(x, y, z)\,dz = 0$$

setze man αx statt y, $\alpha\,dx$ statt dy, löse die sich ergebende Differentialgleichung:

$$\{\psi(x, \alpha x, z) + \alpha\psi_1(x, \alpha x, z)\}\,dx + \psi_2(x, \alpha x, z)\,dz = 0$$

auf. Ihr Integral sei $f(x, z, \alpha) = c$. Dann ist:

$$f\left(x, z, \frac{y}{x}\right) = f\left(0, z_0, \frac{y}{x}\right)$$

das Integral der Differentialgleichung $\psi\,dx + \psi_1\,dy + \psi_2\,dz = 0$, und z_0 ist die Integrationsconstante.

Diese Methode wird unbrauchbar, wenn die Individuen der Oberflächenschaar $\varphi = c$ sämmtlich denselben Punkt der z-Axe schneiden, oder in die z-Axe erst im Unendlichen gelangen. Dann hat man für y und dy, z. B. ihre aus der Gleichung $y - y_0 = \alpha(x - x_0)$ gezogenen Werthe zu setzen, wenn die Schaar $\varphi = c$ die Linie $x = x_0$, $y = y_0$ in einer Schaar von Punkten schneidet. Ist z. B. $\varphi = xyz = c$, so wird man von der Substitution $y - y_0 = \alpha(x - x_0)$ Gebrauch machen müssen. Man hat die Differentialgleichung:

$$d\{xyz - c\} = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz = 0.$$

Die Elimination von y und dy liefert:

$$z\,dx\{y_0 + 2\alpha x - \alpha x_0\} + x\,dz\{y_0 + \alpha(x - x_0)\} = 0.$$

Diese Gleichung hat zum Integral

$$x\{y_0 + \alpha(x - x_0)\}z = c.$$

Bestimmt man die Constante c, indem man x_0, z_0 statt x, z schreibt, so folgt $c = x_0 y_0 z_0$ und wegen $y = y_0 + \alpha(x - x_0)$ erhält man das Integral $\varphi = c$ in der Form

$$xyz = x_0 y_0 z_0$$

zurück.

Ich gehe jetzt dazu über, beide Methoden, die im §. 1 u. ff. entwickelte und die im §. 4 dargelegte, für Differentialgleichungen mit n Variabeln, denen aber durch *ein* Integral genügt werden kann, analytisch zu verallgemeinern. Wenn nun jene Methoden durch die analytische Behandlung auch für Differential-

gleichungen mit drei Variabeln einen allgemeineren Charakter als die geometrischen, aus denen sie hervorgegangen, gewinnen, so wird man doch bei einiger Aufmerksamkeit die letzteren in ihnen wiederfinden, weshalb ich glaube, die ausdrückliche Nachweisung dieses Zusammenhangs unterlassen zu dürfen.

Auf die ähnliche Behandlung von Differentialgleichungen mit mehr Integralen einzugehen, bin ich gewisser algebraischen Schwierigkeiten wegen noch nicht genügend vorbereitet.

§. 5. Verallgemeinerung der Methode des §. 1 u. ff.

Es sei die Differentialgleichung:

$$\Sigma X dx = X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_n dx_n$$

vorgelegt, von deren Coefficienten angenommen wird, dass sie auf die Form $X_p = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_p}$, $p = 1, 2, \ldots n$ gebracht werden können, wofür beiläufig die Bedingung sich wie folgt symbolisch ausdrücken lässt:

$$0 = \begin{vmatrix} X_p & X_q & X_r \\ \partial X_p & \partial X_q & \partial X_r \\ \frac{1}{\partial x_p} & \frac{1}{\partial x_q} & \frac{1}{\partial x_r} \end{vmatrix}, \qquad p, q, r = 1, 2, \ldots n.$$

Es handelt sich darum, wenn λ nicht bekannt ist, das Integral

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) = \text{constans}$$

zu finden.

Wir führen in die Differentialgleichung $\Sigma X dx = 0$, für die x, m verschiedene Substitutionen α ein durch die Gleichungen:

$$x_p = \psi_{pq}(\alpha_{q1}, \alpha_{q2}, \ldots \alpha_{qn}), \quad p = 1, 2, \ldots n; \quad q = 1, 2, \ldots m.$$

Hierdurch wird:

$$\Sigma X dx = \sum_{r=1}^{r=n} A_{qr} d\alpha_{qr} = 0; \quad q = 1, 2, \ldots m.$$

In dieser Gleichung setzen wir $d\alpha_{q3}$, $d\alpha_{q4}$, $\ldots$ $d\alpha_{qn}$ gleich Null und integriren, α_{q3}, α_{q4}, $\ldots$ α_{qn} als constant behandelt, die Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Variabeln:

$$A_{q1} d\alpha_{q1} + A_{q2} d\alpha_{q2} = 0, \qquad q = 1, 2, \ldots m.$$

Die Integrale seien:

$$F_q(\alpha_{q1}, \alpha_{q2}, \ldots \alpha_{qn}) = c, \qquad q = 1, 2, \ldots m.$$

Ich werde das Integral $\varphi = \text{constans}$ von $\Sigma X dx = 0$, jenachdem darin die

Variabeln x oder die Variabeln α_q stehen, mit φ_x oder φ_{α_q} bezeichnen. Es hat alsdann $F(\alpha_{q1}, \alpha_{q2}, \dots \alpha_{qn})$ die Form: $\Phi(\varphi_{\alpha_q}, \alpha_{q3}, \alpha_{q4}, \dots \alpha_{qn})$. Und wenn die Integration der Differentialgleichung $A_{q1}d\alpha_{q1} + A_{q2}d\alpha_{q2} = 0$ von α^i_{q1}, α^i_{q2} bis α_{q1}, α_{q2} vollzogen wird, so kann das Integral $F_q = \Phi_q = c$ auf die Form gebracht werden:

$$\Phi_q\{\varphi_{\alpha_q}(\alpha_{q1}, \alpha_{q2}, \dots \alpha_{qn}), \alpha_{q3}, \alpha_{q4}, \dots \alpha_{qn}\} - \Phi_q\{\varphi_{\alpha_q}(\alpha^i_{q1}, \alpha^i_{q2}, \alpha_{q3}, \dots \alpha_{qn}), \alpha_{q3}, \alpha_{q4}, \dots \alpha_{qn}\} = 0,$$
$$q = 1, 2, \dots m$$

oder es ist vollständig äquivalent mit:

(1.) $$\varphi_{\alpha_q}(\alpha_{q1}, \alpha_{q2}, \dots \alpha_{qn}) - \varphi_{\alpha_q}(\alpha^i_{q1}, \alpha^i_{q2}, \alpha_{q3}, \dots \alpha_{qn}) = 0, \quad q = 1, 2, \dots m,$$

und die letzte Gleichung vertritt vollständig die Stelle der vorletzten und soll auch statt ihrer benutzt werden. Aus der Gleichung (1.) findet man nun wie folgt das Integral $\varphi_x = c$. Wir wollen zwischen den Veränderlichen α_q untereinander und zwischen als verschieden zu betrachtenden Werthen der Variabeln x ein System von Beziehungen annehmen, und darin die besonderen Werthe der Variabeln x und α durch obere Indices unterscheiden. Das System lautet in extenso:

(2.) $$x_p = \psi_{p1}(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots \alpha_{1n}),$$

(3.)
$$\begin{cases} x^{(1)}_p = \psi_{p1}(\alpha^{(1)}_{11}, \alpha^{(1)}_{12}, \alpha_{13}, \dots \alpha_{1n}) = \psi_{p2}(\alpha^{(1)}_{21}, \alpha^{(1)}_{22}, \alpha^{(1)}_{23}, \dots \alpha^{(1)}_{2n}), \\ x^{(2)}_p = \psi_{p2}(\alpha^{(2)}_{21}, \alpha^{(2)}_{22}, \alpha^{(1)}_{23}, \dots \alpha^{(1)}_{2n}) = \psi_{p3}(\alpha^{(2)}_{31}, \alpha^{(2)}_{32}, \alpha^{(2)}_{33}, \dots \alpha^{(2)}_{3n}), \\ x^{(3)}_p = \psi_{p3}(\alpha^{(3)}_{31}, \alpha^{(3)}_{32}, \alpha^{(2)}_{33}, \dots \alpha^{(2)}_{3n}) = \psi_{p4}(\alpha^{(3)}_{41}, \alpha^{(3)}_{42}, \alpha^{(3)}_{43}, \dots \alpha^{(3)}_{4n}), \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x^{(m-1)}_p = \psi_{p,m-1}(\alpha^{(m-1)}_{m-1,1}, \alpha^{(m-1)}_{m-1,2}, \alpha^{(m-2)}_{m-1,3}, \dots \alpha^{(m-2)}_{m-1,n}) = \psi_{pm}(\alpha^{(m-1)}_{m1}, \alpha^{(m-1)}_{m2}, \dots \alpha^{(m-1)}_{mn}), \end{cases}$$

(4.) $$x^m_p = \psi_{pm}(\alpha^{(m)}_{m1}, \alpha^{(m)}_{m2}, \alpha^{(m-1)}_{m3}, \dots \alpha^{(m-1)}_{mn}),$$
$$p = 1, 2, \dots n.$$

Wir können es in die eine Gleichung zusammenfassen:

$$x^{(q-1)}_p = \psi_{p,q-1}(\alpha^{(q-1)}_{q-1,1}, \alpha^{(q-1)}_{q-1,2}, \alpha^{(q-2)}_{q-1,3}, \dots \alpha^{(q-2)}_{q-1,n}) = \psi_{pq}(\alpha^{(q-1)}_{q1}, \alpha^{(q-1)}_{q2}, \dots \alpha^{(q-1)}_{qn});$$
$$p = 1, 2, \dots n; \; q = 1, 2, \dots m+1,$$

wenn wir festsetzen, dass die nicht existirenden Functionen: ψ_{p0}, $\psi_{p,m+1}$ auch nicht hingeschrieben werden, und dass für $x^{(0)}_p$, $\alpha^{(0)}_{qp}$ einfach x_p, α_{pq} zu schreiben sei, welche letztere Bestimmung auch ferner stets gelten soll. Die Gleichungen (3.) repräsentiren $n(m-1)$ Gleichungen zwischen den Variabeln α.

Wir können jetzt das Integral (1.) so schreiben:

(5.) $$\varphi_{\alpha_q}(\alpha^{(q-1)}_{q1}, \alpha^{(q-1)}_{q2}, \dots \alpha^{(q-1)}_{qn}) - \varphi_{\alpha_q}(\alpha^{(q)}_{q1}, \alpha^{(q)}_{q2}, \alpha^{(q-1)}_{q3}, \dots \alpha^{(q-1)}_{qn}) = 0, \; q = 1, 2, \dots m.$$

Vermöge der Gleichungen (3.) folgt hieraus, wenn man sich die α successive durch die x ersetzt denkt:

$$(6.) \qquad \varphi_{\alpha_1}(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots \alpha_{1n}) = \varphi_{\alpha_m}(\alpha_{m1}^{(m)}, \alpha_{m2}^{(m)}, \alpha_{m3}^{(m-1)}, \ldots \alpha_{mn}^{(m-1)}).$$

Zwischen den α allein bestehen nur die Gleichungen (3.) und die Gleichungen (5.). Wenn m so gewählt werden kann, dass man mit Hülfe der Gleichungen (3.) und (5.) alle α, mit Ausnahme der in (6.) enthaltenen, eliminiren kann, und man behält nach der Elimination nur eine Gleichung zwischen den in (6.) enthaltenen α, so muss diese Resultante die Gleichung (6.) selbst sein. Da alsdann ferner zwischen den in (6.) enthaltenen α nur die Gleichung (6.) besteht, so haben sie auch die ganze Willkürlichkeit, die ihnen die eine Relation (6.) einräumt. Wir können also u. a. den Grössen

$$\alpha_{m1}^{(m)}, \quad \alpha_{m2}^{(m)}, \quad \alpha_{m3}^{(m-1)}, \quad \ldots \quad \alpha_{mn}^{(m-1)}$$

beliebige constante Werthe ertheilen, wodurch φ_{α_m} eine Constante wird. Dann wird (6.), wenn für die α_{1p} die x_p mit Hülfe der Relationen (2.) zurückgesetzt werden, das gesuchte Integral $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) = \text{constans}$. Es handelt sich also noch darum, m in der geeigneten Weise zu bestimmen.

Die in (6.) nicht vorkommenden α sind folgende:

$$(7.) \quad \begin{cases} 1) \text{ Substitution } \alpha_{1p} : & \alpha_{11}^{(1)}, \quad \alpha_{12}^{(1)} \\ 2) \quad - \quad \alpha_{2p} : \alpha_{21}^{(1)}, \quad \alpha_{22}^{(1)}, \quad \ldots \quad \alpha_{2n}^{(1)}; & \alpha_{21}^{(2)}, \quad \alpha_{22}^{(2)} \\ 3) \quad - \quad \alpha_{3p} : \alpha_{31}^{(2)}, \quad \alpha_{32}^{(2)}, \quad \ldots \quad \alpha_{3n}^{(2)}; & \alpha_{31}^{(3)}, \quad \alpha_{32}^{(3)} \\ \ldots\ldots\ldots\

äquivalent sind mit den ursprünglich gefundenen Integralen:

$$(8.) \qquad F_q(\alpha_{q1}, \alpha_{q2}, \dots \alpha_{qn}) - F_q(\alpha^i_{q1}, \alpha^i_{q2}, \alpha_{q3}, \dots \alpha_{qn}) = 0, \quad q = 1, 2, \dots m.$$

Wir haben also folgende Regel zur Bestimmung des Integrals

$$\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) = \text{constans.}$$

Aus (8.) *bilden wir die* $n-1$ *Gleichungen:*

$$F_q(\alpha^{q-1}_{q1}, \alpha^{q-1}_{q2}, \dots \alpha^{q-1}_{qn}) - F_q(\alpha^{(q)}_{q1}, \alpha^{(q)}_{q2}, \alpha^{(q-1)}_{q3}, \dots \alpha^{(q-1)}_{qn}) = 0, \quad q = 1, 2, \dots n-1$$

und fügen hierzu die $n(n-2)$ *Gleichungen* (3.):

$$\psi_{p,q-1}(\alpha^{(q-1)}_{q-1,1}, \alpha^{(q-1)}_{q-1,2}, \alpha^{(q-2)}_{q-1,3}, \dots \alpha^{(q-2)}_{q-1,n}) = \psi_{pq}(\alpha^{(q-1)}_{q1}, \alpha^{(q-1)}_{q2}, \dots \alpha^{(q-1)}_{qn});$$

$$p = 1, 2, 3, \dots n; \; q = 2, 3, \dots n-1.$$

Aus vorstehenden $n-1+n(n-2) = n^2-n-1$ *Gleichungen eliminiren wir die* n^2-n-2 *Grössen* (7.). *Wir behalten dann eine Gleichung:*

$$\Psi(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots \alpha_{1n}, \alpha^{(n-1)}_{n-1,1}, \alpha^{(n-1)}_{n-1,2}, \alpha^{(n-2)}_{n-1,3}, \dots \alpha^{(n-2)}_{n-1,n}) = 0.$$

In dieser betrachten wir die Grössen:

$$\alpha^{(n-1)}_{n-1,1}, \quad \alpha^{(n-1)}_{n-1,2}, \quad \alpha^{(n-2)}_{n-1,3}, \quad \dots \quad \alpha^{(n-2)}_{n-1,n}$$

als willkürliche Parameter, die wir z. B. alle bis auf einen gleich Null setzen können, und führen in $\Psi = 0$ *für die*

$$\alpha_{11}, \quad \alpha_{12}, \quad \dots \quad \alpha_{1n}$$

die $x_1, x_2, \dots x_n$ *mit Hülfe der Gleichungen:*

$$x_p = \psi_{1p}(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots \alpha_{1n})$$

wieder ein. Dann ist $\Psi = 0$ *aequivalent mit dem gesuchten Integral*

$$\varphi(x_1, x_2, \dots x_n) = \text{constans}$$

der Gleichung $\Sigma X dx = 0$, *und muss auf dieselbe Form gebracht werden können.*

Diese Regel setzt die Auflösung der $n-1$ Differentialgleichungen

$$A_{q1} d\alpha_{q1} + A_{q2} d\alpha_{q2} = 0, \quad q = 1, 2, \dots n-1$$

voraus. Es ist aber klar, dass wir diese $n-1$ Differentialgleichungen durch *eine* ersetzen können. Führen wir nämlich für die x eine Substitution:

$$x_p = \psi_p(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n, \varrho)$$

mit dem willkürlichen Parameter ϱ ein, und ertheilen diesem Parameter die $n-1$ verschiedenen Werthe $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_{n-1}$, so erhalten wir aus der einen Substitution die $n-1$ Substitutionen:

$$x_p = \psi_p(\alpha_{q1}, \alpha_{q2}, \dots \alpha_{qn}, \varrho_q), \quad p = 1, 2, \dots n, \; q = 1, 2, \dots n-1.$$

Verwandeln wir mithin wieder die Differentialgleichung $\Sigma X dx = 0$ mit Hülfe der Substitution $x_p = \psi(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n, \varrho)$ in die andere $A_1 d\alpha_1 + A_2 d\alpha_2 + \dots + A_n d\alpha_n = 0$,

integriren die Differentialgleichung $A_1 d\alpha_1 + A_2 d\alpha_2 = 0$, so genügt deren Integral:

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \varrho) - F(\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \alpha_3, \ldots \alpha_n, \varrho) = 0,$$

in dem man ϱ die $n-1$ Werthe $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{n-1}$ ertheilt, um die erforderlichen $n-1$ Gleichungen:

$$F(\alpha_{q1}^{q-1}, \alpha_{q2}^{q-1}, \ldots \alpha_{qn}^{q-1}, \varrho_q) - F(\alpha_{q1}^{(q)}, \alpha_{q2}^{(q)}, \ldots \alpha_{q3}^{(q-1)}, \ldots \alpha_{qn}^{(q-1)}, \varrho_q) = 0,$$
$$q = 1, 2, \ldots n-1$$

ohne Weiteres hinschreiben zu können. Dies ist die verallgemeinerte Methode des §. 1.

§. 6. Verallgemeinerung der Methode des §. 4.

Die zweite Methode beruht trotz ihrer geometrischen Verwandtschaft mit der ersten im Falle von nur drei Variabeln analytisch doch auf einem anderen Principe, nämlich auf diesem. Wenn wir in eine Function $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ für die x solche Variabeln α einführen, dass die x in Constanten übergehen, sobald zweien der α gewisse besondere Werthe ertheilt werden, so wird auch $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) = \varphi_\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$ für diese besonderen Werthe der α eine Constante. Wir setzen also:

$$(9.) \quad \begin{cases} x_p = x_p^{(0)} + (\alpha_1 - \alpha_1^{(0)})\,\theta_{1p}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) + (\alpha_2 - \alpha_2^{(0)})\,\theta_{2p}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n), \\ p = 1, 2, 3, \ldots n \end{cases}$$

wo $x_p^{(0)}$ constant ist und θ_{1p}, θ_{2p} sonst beliebige Functionen vorstellen, die aber für $\alpha_1 - \alpha_1^{(0)} = 0$, $\alpha_2 - \alpha_2^{(0)} = 0$ nicht unendlich werden dürfen. Diese Substitution für die x in $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ eingeführt, wird es für $\alpha_1 = \alpha_1^{(0)}$, $\alpha_2 = \alpha_2^{(0)}$: $\varphi(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots x_n^{(0)})$, mithin constant.

Nun möge die Differentialgleichung $\Sigma X dx = 0$ durch Einführung der Substitution (9.) übergehen in:

$$A_1 d\alpha_1 + A_2 d\alpha_2 + \cdots + A_n d\alpha_n = 0.$$

Denkt man sich die gewöhnliche Differentialgleichung

$$A_1 d\alpha_1 + A_2 d\alpha_2 = 0$$

integrirt, indem $\alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_n$ als constant behandelt werden, so hat das Integral

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = c$$

die Form:

$$\Phi(\varphi_\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n), \alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_n) = c,$$

oder wenn von $\alpha_1^{(0)}$, $\alpha_2^{(0)}$ bis α_1, α_2 integrirt wird, kann man ihm die Form geben:

$$\Phi(\varphi_\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n), \alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_n) - \Phi(\varphi_\alpha(\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \alpha_3, \ldots \alpha_n), \alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_n) = 0,$$

welche aequivalent ist mit:

$$\varphi_\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) - \varphi_\alpha(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3, \ldots \alpha_n) = 0$$

oder mit:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n) = \varphi(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0) = 0,$$

demnach das gesuchte Integral ist.

Wenn insbesondere $\Sigma X dx$ ein vollständiges Differential ist, so wird die Gleichung $du = \Sigma X dx$ durch *eine* Quadratur aufgelöst. Führen wir statt der x neue Variabeln α ein, so dass $du = A_1 d\alpha_1 + A_2 d\alpha_2 + \cdots + A_n d\alpha_n$, und betrachten alle α bis auf α_1 als constant, integriren dann, so folgt:

$$u - u_0 = \int_{\alpha_1^0}^{\alpha_1} A_1 d\alpha_1 = \psi_\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) - \psi_\alpha(\alpha_1^0, \alpha_2, \ldots \alpha_n),$$

wo $\frac{\partial u}{\partial \alpha_p} = \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \alpha_p}$ oder $\frac{\partial u}{\partial x_p} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x_p}$. Waren nun die x und die α verbunden durch Gleichungen der Form:

$$x_p = x_p^0 + (\alpha_1 - \alpha_1^0)\theta_p(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n), \qquad p = 1, 2, \ldots n,$$

so ist

$$\psi_\alpha(\alpha_1^0, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = \psi_x(x_p^0, x_2^0, \ldots x_n^0),$$

und

$$u = u_0 + \int_{\alpha_1^0}^{\alpha_1} A_1 d\alpha_1$$

ist das Integral von $du = A_1 d\alpha_1 + \cdots + A_n d\alpha_n$. Machen wir die Substitution

$$x_p = x_p^0 + (\alpha_1 - \alpha_1^0)\theta_{1p}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) + (\alpha_2 - \alpha_2^0)\theta_{2p}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n),$$

$$u - u_0 = \int_{\alpha_1^0, \alpha_2^0}^{\alpha_1, \alpha_2} (A_1 d\alpha_1 + A_2 d\alpha_2)$$

das Integral, u. s. f. Das bekannte Verfahren, den Ausdruck $du = \Sigma X dx$ zu quadriren, indem man statt $x_2, x_3, \ldots x_n$ setzt: $a_1 x_1, a_2 x_1, a_3 x_1, \ldots a_{n-1} x_1$, dann nach x_1 von $x_1 = 0$ an integrirt und hinterher $\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \cdots \frac{x_n}{x_1}$ für $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ zurücksetzt, ist eine specielle Form des angegebenen, die sich ergiebt, wenn man setzt: $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_1 \alpha_2$, $x_3 = \alpha_1 \alpha_3$, $\ldots$ $x_n = \alpha_1 \alpha_n$, d. i. wenn in

$$x_p = x_p^0 + (\alpha_1 - \alpha_1^0)\theta_p(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n)$$

$x_p^0 = 0$, $\alpha_1^0 = 0$, $\theta_1 = 1$, $\theta_p = \alpha_p$, $p = 2, 3, \ldots n$ gesetzt wird.

Dieser Paragraph enthält die Verallgemeinerung der Methode des §. 4.

Heidelberg, Juni 1868.

Zur Theorie der Umkehrung der *Abel*schen Integrale.

(Von Herrn *H. Weber* in Heidelberg.)

Das von *Jacobi* zuerst aufgestellte Problem der Umkehrung algebraischer Integrale, das fundamentale Problem der Theorie dieser Integrale, wurde in dem speciellen Fall, wo die Irrationalität auf eine Quadratwurzel beschränkt ist, durch Herrn *Weierstrass* gelöst. Eine Lösung für den allgemeinen Fall algebraischer Integrale wurde von den Herren *Clebsch* und *Gordan* aufgestellt; und ich habe in meiner Abhandlung über das Additionstheorem der *Abel*schen Functionen gezeigt, wie eine im Wesentlichen mit der zuletzt erwähnten übereinstimmende Lösung aus den von *Riemann* aufgestellten Sätzen gewonnen werden könne. Diese Lösung des allgemeineren Problems entbehrt aber der Einfachheit und Eleganz der von Herrn *Weierstrass* im speciellen Fall entwickelten, und es schien mir der Mühe werth, die Frage aufzuwerfen, ob und in wie weit dieser Mangel an Einfachheit begründet ist in der allgemeineren Natur des Problems, und wie sich das Endergebniss in einer wenigstens ebenso vollständig entwickelten, wenn auch minder einfachen Form aufstellen lasse. Das Resultat, zu welchem ich gelangt bin, ist, dass die besondere Form der Lösung des Herrn *Weierstrass* allerdings eine charakteristische Eigenthümlichkeit der hyperelliptischen Functionen ist, dass aber eine in ähnlicher Weise völlig entwickelte Lösung sich wohl angeben lässt. Es schien mir erforderlich, einige Untersuchungen über gewisse Punkte aus der Theorie der ϑ-Functionen vorauszuschicken, um die zweckmässigste Wahl der unteren Grenzen der Integrale erster Gattung zu ermitteln, wodurch ich auf die schon anderweitig eingeführten, meines Wissens aus *Riemann*s Vorlesungen stammenden ϑ-Charakteristiken und auf die 2^{2p} geraden und ungeraden ϑ-Functionen geführt wurde. Mit diesen ϑ-Functionen steht im genauen Zusammenhang ein merkwürdiges System von ebensovielen Transcendenten zweiter Gattung, welches der *Jacobi*schen Z-Function analog ist. Diese Functionen sind nämlich sämmtlich in Bezug auf jedes ihrer Argumente einzeln einfach periodisch und sind ausserdem alle ungerade Functionen.

In manchen Punkten begegnen meine Resultate denen der Herren *Clebsch* und *Gordan*. Da indessen der von mir eingeschlagene Weg, welcher wesentlich auf den *Riemann*schen Principien beruht, durchaus verschieden ist von dem der genannten Herren, so mag es genügen, dies hier im Allgemeinen hervorgehoben zu haben.

Der Hauptsache nach habe ich mich der *Riemann*schen Bezeichnungsweise angeschlossen, die ich als bekannt voraussetzen darf. Nur fand ich es für meine Zwecke bequemer, die algebraischen Integrale durch Integralzeichen, statt durch einfache Buchstaben zu bezeichnen, weil sich so die Grenzen leichter und übersichtlicher schon in der Bezeichnung angeben lassen.

§. 1.

Bezeichnet man mit $u_1, u_2, \ldots u_p$ ein System von einander unabhängiger Integrale erster Gattung, und bedient sich des von *Riemann* eingeführten Zeichens der Congruenz, um anzudeuten, dass ein System Grössen von einem andern nur um entsprechende ganze Vielfache der Periodicitätsmoduln sich unterscheide, so ergiebt das *Abel*sche Theorem, angewendet auf Integrale erster Gattung, den folgenden Satz: Ist ζ eine rationale Function von s und z, die nur in μ Punkten unendlich von der ersten Ordnung wird, die demnach auch jeden andern Werth in μ Punkten annnimmt, so hat man, wenn $x_1, x_2, \ldots x_\mu$; $y_1, y_2, \ldots y_\mu$ solche Punkte sind, in denen ζ je einen bestimmten Werth erhält:

$$(1.) \qquad \left(\sum_{1}^{p}{}_h \left(\sum_{1}^{\mu}{}_i \int_{x_i}^{y_i} du_h\right)\right) \equiv 0.$$

Wenn diese Congruenz erfüllt ist für irgend ein System von p Integralen erster Gattung, so ist sie es auch für jedes andere, und man kann demnach, was fortan geschehen soll, unter den $u_1, u_2, \ldots u_\mu$ die Normalintegrale erster Gattung verstehen, so dass ein System entsprechender Vielfacher der Periodicitätsmoduln den Ausdruck hat:

$$\left(\sum_{1}^{p}{}_h (m_h \pi i + n_1 a_{1h} + n_2 a_{2h} + \cdots + n_p a_{ph})\right),$$

worin die m_h, n_h ganze Zahlen sind und $a_{hk} = a_{kh}$.

Dieser Satz gilt, wie jetzt gezeigt werden soll, auch umgekehrt; d. h. wenn die Congruenz (1.) erfüllt ist, so muss eine rationale Function ζ von s und z existiren, welche einen bestimmten Werth nur in den Punkten x_1, $x_2, \ldots x_\mu$, einen andern bestimmten Werth nur in den Punkten $y_1, y_2, \ldots y_\mu$

annimmt. Mit dieser Behauptung ist nicht mehr und nicht weniger gesagt, als dass eine Function ζ existirt, welche in den Punkten $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ unendlich klein, in den Punkten $y_1, y_2, \ldots y_\mu$ unendlich gross von der ersten Ordnung wird; denn man übersieht sofort, dass man mittelst einer linearen gebrochenen Substitution für ζ den einen Fall auf den andern reduciren kann. Um diese Behauptung zu beweisen, ist also nur nöthig, eine solche Function ζ aufzustellen, welche in den Punkten $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ verschwindet, in den Punkten $y_1, y_2, \ldots y_\mu$ unendlich wird.

Versteht man unter m eine ganze Zahl und setzt $\mu = mp$, indem man, wenn μ nicht durch p theilbar ist, die nöthige Anzahl zusammenfallender x, y hinzufügt, wodurch die Congruenz (1.) nicht gestört wird, so kann man die Function ζ mit Hülfe von ϑ-Functionen leicht herstellen.

Es lässt sich nämlich immer, wenn $\varepsilon, c_1, c_2, \ldots c_p$ beliebige feste Punkte sind, ein von $z, x_1, x_2, \ldots x_p$ unabhängiges Grössensystem $k_1, k_2, \ldots k_p$ bestimmen, so dass die Function von z

$$\vartheta\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}\left(\int_\varepsilon^{z,s} du_h - \int_{c_1}^{x_1} du_h - \int_{c_2}^{x_2} du_h - \cdots - \int_{c_p}^{x_p} du_h + k_h\right)\right),$$

falls sie nicht identisch verschwindet, in den Punkten $x_1, x_2, \ldots x_p$ unendlich klein von der ersten Ordnung wird *). Demnach wird der Quotient:

$$= \frac{\vartheta\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}\left(\int_\varepsilon^{z,s} du_h - \sum_1^p{}_i \int_{c_i}^{x_i} du_h + k_h\right)\right)\vartheta\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}\left(\int_\varepsilon^{z,s} du_h - \sum_1^p{}_i \int_{c_i}^{x_{p+i}} du_h + k_h\right)\right)\ldots\vartheta\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}\left(\int_\varepsilon^{z,s} du_h - \sum_1^p{}_i \int_{c_i}^{x_{(m-1)p+i}} du_h + k_i\right)\right)}{\vartheta\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}\left(\int_\varepsilon^{z,s} du_h - \sum_1^p{}_i \int_{c_i}^{y_i} du_h + k_h\right)\right)\vartheta\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}\left(\int_\varepsilon^{z,s} du_h - \sum_1^p{}_i \int_{c_i}^{y_{p+i}} du_h + k_h\right)\right)\ldots\vartheta\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}\left(\int_\varepsilon^{z,s} du_h - \sum_1^p{}_i \int_{c_i}^{y_{(m-1)p+i}} du_h + k_i\right)\right)}$$

in den Punkten $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ unendlich klein, in $y_1, y_2, \ldots y_\mu$ unendlich gross von der ersten Ordnung.

An den Querschnitten a_ν ändert der Quotient Q seinen Werth nicht, während er beim Ueberschreiten des Querschnitts b_ν einen Factor annimmt:

$$e^{2\sum_1^\mu \int_{y_i}^{x_i} du_\nu} = e^{2(n_1 a_{1\nu} + n_2 a_{2\nu} + \cdots + n_p a_{p\nu})},$$

wobei $n_1, n_2, \ldots n_p$ positive oder negative ganze Zahlen sind, in Folge der

*) Vergl. hierüber meine Abhandlung über das Additionstheorem der *Abel*schen Functionen §. 3, dieses Journal pag. 193 dieses Bandes.

vorausgesetzten Congruenz (1.). Es bleibt also die Function:

$$\zeta = e^{-2\sum_1^p h n_h \int_\varepsilon^{z,s} du_h} Q$$

an allen Querschnitten stetig und ist daher rational durch z, s ausdrückbar. Damit ist die Function ζ, welche die oben verlangten Eigenschaften besitzt, wirklich dargestellt.

Unzulänglich ist dieser Beweis in dem Fall, wo von den ϑ-Functionen in dem Ausdruck für Q einige identisch verschwinden, ein Fall, der immer eintritt, wenn $\mu \gtreqless p$ ist. Um diese Fälle allgemein zu erledigen, mache ich die Bemerkung, dass es unmöglich ist, in der Function

$$(2.) \qquad \vartheta\left(\sum_1^p h \left(\int_\varepsilon^{z,r} du_h - \int_{c_1}^{x_1} du_h - \int_{c_2}^{\xi_2} du_h - \cdots - \int_{c_p}^{\xi_p} du_h + k_h\right)\right)$$

über x_1 so zu verfügen, dass diese Function für alle Werthe von $z, \xi_2, \xi_3, \ldots \xi_p$ verschwindet; denn was auch x_1 sein möge, man wird immer über die Punkte $z, \xi_2, \xi_3, \ldots \xi_p$ so verfügen können, dass das System

$$(3.) \qquad \left(\sum_1^p h \left(\int_\varepsilon^{z,s} du_h - \int_{c_1}^{x_1} du_h - \int_{c_2}^{\xi_2} du_h - \cdots - \int_{cp}^{\xi_p} du_h + k_h\right)\right)$$

einem beliebig gegebenen Grössensystem congruent wird *).

Demnach lässt sich in dem Quotienten:

$$(4.) \qquad Q = \prod_{i=1}^{i=\mu} \frac{\vartheta\left(\sum_1^p h \left(\int_\varepsilon^{z,s} du_h - \int_{c_1}^{x_i} du_h - \int_{c_2}^{\xi_2^{(i)}} du_h - \cdots - \int_{c_p}^{\xi_p^{(i)}} du_h + k_h\right)\right)}{\vartheta\left(\sum_1^p h \left(\int_\varepsilon^{z,s} du_h - \int_{c_1}^{y_i} du_h - \int_{c_2}^{\xi_2^{(i)}} du_h - \cdots - \int_{c_p}^{\xi_p^{(i)}} du_h + k_h\right)\right)}$$

unter allen Umständen über die $\mu(p-1)$ willkürlichen Punkte $\xi_2^{(i)}, \xi_3^{(i)}, \ldots \xi_p^{(i)}$ so verfügen, dass keine der ϑ-Functionen des Zählers und Nenners von Q identisch verschwindet. Demnach wird Q, als Function von z betrachtet, un-

*) Wiewohl sich diese Behauptung mit Hülfe der Sätze über die Umkehrung der *Abel*schen Integrale leicht allgemein und streng nachweisen lässt, so ist dieser allgemeine Beweis für den vorliegenden Zweck nicht erforderlich. Es genügt die Bemerkung, dass das Grössensystem (3.) ein System p von einander unabhängiger Aenderungen erleiden kann, wenn man den Punkten $z, \xi_2, \ldots \xi_p$ von einander unabhängige Verschiebungen ertheilt, und das ergiebt sich unmittelbar aus der Unabhängigkeit der Functionen $u_1, u_2, \ldots u_p$.

endlich klein von der ersten Ordnung in den Punkten $x_1, x_2, \ldots x_\mu$, unendlich gross von der ersten Ordnung in den Punkten $y_1, y_2, \ldots y_\mu$. An den Querschnitten a_ν ändert sich Q nicht, nimmt aber beim Ueberschreiten des Querschnitts b_ν den Factor an:

$$e^{2\sum_1^\mu i \int_{y_i}^{x_i} du_\nu} = e^{2(n_1 a_{1\nu} + n_2 a_{2\nu} + \cdots + n_p a_{p\nu})}.$$

Demnach ist wieder:

$$\zeta = e^{-2\sum_1^p h\, n_h \int_\varepsilon^{z,s} du_h} Q \tag{5.}$$

an allen Querschnitten stetig und ist sonach eine rationale Function von s und z, die nur in den Punkten $x_1, x_2, \ldots x_\mu; y_1, y_2, \ldots y_\mu$ resp. unendlich klein und unendlich gross von der ersten Ordnung wird. Damit ist also, unter Voraussetzung der Congruenz (1.) nicht nur die Existenz einer solchen Function ζ nachgewiesen, sondern dieselbe ist auch analytisch dargestellt.

§. 2.

Im §. 9 der Abhandlung über die *Abel*schen Functionen (dieses Journal Bd. 54) hat *Riemann* die Integrale erster Gattung in der Form aufgestellt:

$$\omega = \int \frac{\varphi(s, z)^{n-2\ m-2} dz}{\frac{\partial F}{\partial s}}, \tag{6.}$$

wo φ eine Function bedeutet, welche in den r Punktepaaren γ, δ verschwindet, in denen $\frac{\partial F}{\partial s}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ gleichzeitig verschwinden, die ausserdem noch in $2p-2$ Punkten verschwindet, von denen im Allgemeinen $p-1$ beliebig gewählt werden können, wodurch die übrigen $p-1$ bestimmt sind. Solche Functionen, welche im Differentialquotienten eines Integrals erster Gattung den Zähler bilden können, deren p von einander linear-unabhängige existiren, sollen im Folgenden durchweg mit dem Buchstaben φ, wenn nöthig mit einem Index versehen, bezeichnet werden.

In ähnlicher Weise lässt sich die allgemeine Form von Integralen zweiter und dritter Gattung angeben, welche resp. in einem oder in zwei Punkten unendlich gross werden. Das Integral

$$\omega = \int \frac{\psi(s, z)^{n-1\ m-1} dz}{(as+bz+c)\frac{\partial F}{\partial s}} \tag{7.}$$

wird sich nur dann auf ein Integral erster Gattung reduciren können, wenn die ganze rationale Function $\psi(\overset{n-1}{s}, \overset{m-1}{z})$ den linearen Factor $(as+bz+c)$ enthält. Um aber ω zu einem Integral dritter oder zweiter Gattung zu machen, hat man folgendermassen zu verfahren:

Die Verhältnisse der Constanten a, b, c lassen sich so bestimmen, dass $as+bz+c$ in zwei beliebig gegebenen Punkten ε_1, ε_2 unendlich klein von der ersten Ordnung, oder auch, indem ε_1, ε_2 zusammenfallen, in einem Punkt ε unendlich klein von der zweiten Ordnung wird. Ich werde im Folgenden nur den letzteren Fall, der auf die Integrale zweiter Gattung führt, näher betrachten, und die demgemäss bestimmte lineare Function $as+bz+c$ mit l_ε bezeichnen. Die Function l_ε verschwindet ausser in dem Punkt ε noch in $m+n-2$ anderen Punkten, weil die Elimination von s oder z aus den beiden Gleichungen

$$F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0, \qquad as+bz+c=0$$

auf eine Endgleichung vom $(m+n)$ten Grade führt. Von den $n.m$ constanten Coefficienten, die in der Function ψ enthalten sind, müssen nun $n+m-2$ so bestimmt werden, dass die Function ψ verschwindet in den $n+m-2$ von ε verschiedenen Punkten, in denen l_ε verschwindet, und r weitere so, dass ψ in den r Punktepaaren γ, δ verschwindet, so dass ψ im Ganzen noch

$$n.m-m-n+2-r=(n-1)(m-1)-r+1=p+1$$

willkürliche Constanten enthält. Sind daher $\psi_0, \psi_1, \ldots \psi_p$ specielle Functionen ψ, so kann die allgemeinste dieser Functionen dargestellt werden in der Form:

$$(8.) \qquad \psi(\overset{n-1}{s}, \overset{m-1}{z}) = a_0\psi_0+a_1\psi_1+\cdots+a_p\psi_p$$

oder auch in der Form:

$$(9.) \qquad \psi(\overset{n-1}{s}, \overset{m-1}{z}) = a_0\psi_0+l_\varepsilon(a_1\varphi_1+a_2\varphi_2+\cdots+a_p\varphi_p).$$

Die Function ψ verschwindet im Ganzen in

$$m(n-1)+n(m-1)$$

Punkten, also ausser in den bereits bestimmten Punkten, da die γ, δ Punktepaare sind, noch in

$$m(n-1)+n(m-1)-2r-m-n+2=2(m-1)(n-1)-2r=2p$$

Punkten, von denen wegen der $p+1$ in ψ enthaltenen willkürlichen Constanten im Allgemeinen p willkürlich gewählt werden können.

Das auf diese Weise durch (7.) dargestellte Integral zweiter Gattung ist das allgemeinste, welches nur im Punkte ε unendlich von der ersten Ordnung wird; denn in Folge von (9.) kann dasselbe dargestellt werden in der Form:

$$\omega = a_0\omega_0 + a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_pu_p + \text{const.}$$

worin die $u_1, u_2, \ldots u_p$ irgend ein System von einander unabhängiger Integrale erster Gattung bedeuten.

Man kann nun auch über die p Verhältnisse der $p+1$ in ψ enthaltenen willkürlichen Constanten so verfügen, dass von den $2p$ noch unbestimmten Nullpunkten der Function ψ je zwei in einen zusammenfallen, wodurch sich ein System $c_1, c_2, \ldots c_p$ von doppelten Nullpunkten der Function ψ ergiebt. Die Anzahl $2p$ der dadurch gestellten Bedingungen stimmt genau überein mit der Anzahl der verfügbaren Grössen $c_1, c_2, \ldots c_p$ und der p Verhältnisse der $a_0, a_1, \ldots a_p$. In wie weit diese Grössen durch diese Bedingungen wirklich bestimmt sind, wird sich weiter unten ergeben.

Es soll nun im Folgenden durchweg eine diesen Bedingungen entsprechende Function ψ durch $\psi_{(\varepsilon,c)}$ bezeichnet werden, da das System der Punkte c jedenfalls von dem willkürlich wählbaren Punkt ε abhängig sein wird.

Hat man eine solche Function $\psi_{(\varepsilon,c)}$ gefunden, so lässt sich damit eine rationale Function von s und z herstellen:

$$(10.) \qquad \zeta = \frac{l_\varepsilon\varphi}{\psi_{(\varepsilon,c)}},$$

welcher folgende Eigenschaften zukommen:

Die Function ζ wird unendlich gross von der zweiten Ordnung in p gegebenen Punkten, unendlich klein von der zweiten Ordnung in einem, diesen p Punkten zugeordneten, gleichfalls festen Punkt und wird ausserdem unendlich klein von der ersten Ordnung in $2p-2$ Punkten, von denen $p-1$ beliebig gewählt werden können, wodurch die übrigen $p-1$ im Allgemeinen und zwar unabhängig von den Punkten $\varepsilon, c_1, c_2, \ldots c_p$, bestimmt sind.

§. 3.

In ähnlicher Weise, wie im vorigen Paragraphen die Functionen ψ, lassen sich auch die Functionen φ specialisiren. Man kann nämlich die $p-1$ Verhältnisse der in φ enthaltenen willkürlichen Constanten so bestimmen, dass diese Functionen ausser in den Punktepaaren γ, δ in nur $p-1$ Punkten, dann aber in jedem von der zweiten Ordnung unendlich klein wird. Die Anzahl

der zu erfüllenden Bedingungsgleichungen stimmt hier wieder überein mit der Anzahl der verfügbaren Grössen, so dass die Anzahl der Punktsysteme $c_2', c_3', \ldots c_p'$, in denen eine Function φ unendlich klein von der zweiten Ordnung werden kann, im Allgemeinen eine endliche ist.

Die letztere Behauptung soll nun noch näher nachgewiesen und die Bedeutung der gegentheiligen Annahme ins Licht gesetzt werden durch eine Untersuchung über die Anzahl der Moduln der Klasse von Systemen gleichverzweigter Functionen, welche den Betrachtungen zu Grunde liegt *).

Nehmen wir also an, es könne von den $p-1$ Punkten $c_2', c_3', \ldots c_p'$, in denen eine Function φ unendlich klein von der zweiten Ordnung werden kann, einer, etwa c_2', beliebig gewählt werden, und die übrigen seien durch diesen einen entweder völlig bestimmt, oder enthalten noch weitere Unbestimmtheiten. Ist nun

$$\varphi = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \cdots + \alpha_p\varphi_p$$

eine solche Function, welche in $c_2', c_3', \ldots c_p'$ unendlich klein von der zweiten Ordnung wird, so lässt sich daraus ein Integral erster Gattung bilden:

$$\omega = \int \frac{\varphi dz}{\frac{\partial F}{\partial s}} = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p.$$

Die Coefficienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ hängen in gewisser Weise von dem noch willkürlichen Punkt c_2' ab, und zwar so, dass nicht ihre Verhältnisse von diesem willkürlichen Punkt unabhängig sein können, weil sonst der Differentialquotient von ω, also die Function φ bis auf einen von z unabhängigen Factor, also die Nullpunkte von φ völlig bestimmt wären, gegen die Voraussetzung. Es wird daher möglich sein, durch passende Wahl des Punktes c_2' über die Coefficienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ so zu verfügen, dass mindestens zwei der Periodicitätsmoduln von ω beliebig gegebene Werthe erhalten. Denn sind z. B. die Integrale $u_1, u_2, \ldots u_p$ die Normalintegrale erster Gattung, so sind die Periodicitätsmoduln von ω an den Querschnitten a_h:

$$\lambda_1 = \alpha_1\pi i, \quad \lambda_2 = \alpha_2\pi i, \quad \ldots \quad \lambda_p = \alpha_p\pi i.$$

Da nun nicht alle Verhältnisse der α von dem willkürlichen Punkt c_2' unab-

*) Die hier gebrauchten Bezeichnungen sind dieselben wie die im §. 12 der citirten *Riemann*schen Abhandlung. Auch ist das folgende Beweisverfahren dem zweiten der dort gegebenen Beweise für die Anzahl $3p-3$ der Moduln einer Klasse von Systemen gleichverzweigter Functionen nachgebildet, gegen dessen Richtigkeit und Strenge, wenn das *Dirichlet*sche Princip zugegeben wird, wie es mir scheint, nichts einzuwenden ist.

hängig sein können, so wird man diesen zunächst so wählen können, dass das Verhältniss zweier Periodicitätsmoduln, etwa $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, einen beliebig gegebenen Werth erhält, und dann lässt sich noch ein gemeinschaftlicher Factor der α so bestimmen, dass einer der Periodicitätsmoduln, etwa λ_1, einen beliebig gegebenen Werth erhält.

Man bilde nun die Fläche T', welche die Verzweigungsart der Function s darstellt, und durch Querschnitte in eine einfach zusammenhangende zerlegt ist, in den kleinsten Theilchen ähnlich, auf eine Fläche ω' ab, mittelst der Function

$$(11.) \qquad \omega' = \omega + \beta.$$

Dieses Abbild wird, falls $p > 1$, ein die Fläche ω' mehrfach bedeckendes, einfach zusammenhangendes, allenthalben endliches Flächenstück sein, dessen Begrenzung durch $2p$ Paare paralleler Curvenstücke gebildet ist, deren Ortsverschiedenheiten die $2p$ Periodicitätsmoduln der Function ω oder ω' sind. In seinem Innern hat dieses Flächenstück $p-1$ doppelte Verzweigungspunkte, weil $d\omega$ in $p-1$ Punkten der Fläche T' unendlich klein von der dritten Ordnung wird. Es lässt sich aber in (11.) die Constante β so bestimmen, dass einer der doppelten Verzweigungspunkte eine beliebig gegebene Lage erhält. Ausserdem folgt aus dem oben Bemerkten, dass zwei von den Ortsverschiedenheiten der parallelen Grenzcurven beliebige Werthe erhalten können. Haben dann die übrigen $3p-4$ Grössen, nämlich die $2p-2$ Periodicitätsmoduln (oder Ortsverschiedenheiten der parallelen Curvenstücke) und die $p-2$ noch übrigen doppelten Verzweigungspunkte irgend welche gegebene Werthe, so lässt sich, wie *Riemann* gezeigt hat, immer ein System wie diese Fläche verzweigter Functionen finden, welche in den entsprechenden Punkten paralleler Begrenzungstheile denselben Werth annehmen und also $2p$fach periodisch sind, die dann als Functionen von einer derselben betrachtet, zu einem solchen System $2p+1$fach zusammenhangender algebraischer Functionen führen, welches die hier vorausgesetzte Eigenschaft hat, und welches sonach nur von $3p-4$ Moduln abhängig ist, also mindestens einen Modul weniger enthält, als die allgemeine Classe $2p+1$fach zusammenhangender algebraischer Functionen.

Es ist dadurch nachgewiesen, dass die Voraussetzung, es existiren unendlich viele Functionen φ, die in $p-1$ Punkten unendlich klein von der zweiten Ordnung werden, mindestens eine Bedingungsgleichung zwischen den

Moduln der betreffenden Classe algebraischer Functionen involvirt, also bei den allgemeinen algebraischen Functionen nicht statthaft ist.

Denjenigen algebraischen Functionen, die auf die hyperelliptischen Integrale führen, entspricht, falls $p > 2$ ist, die hier betrachtete specielle Annahme, und es wird sich zeigen, dass dieser Umstand die wesentlichste Ursache ist, dass diese Functionen eine verhältnissmässig einfache Behandlung zulassen.

§. 4.

Die im §. 2 bestimmten Punkte $c_1, c_2, \ldots c_p$, in denen eine Function $\psi_{(c,\varepsilon)}$ unendlich klein von der zweiten Ordnung wird, haben eine besondere Bedeutung für die Theorie der ϑ-Functionen, die sogleich hervortritt, wenn man diese Punkte als untere Grenzen der Normalintegrale erster Gattung einführt. Versteht man unter $x_1, x_2, \ldots x_p$ beliebige Punkte, so lassen sich, wie schon oben §. 1 bemerkt, die Grössen $k_1, k_2, \ldots k_p$ von $z, x_1, x_2, \ldots x_p$ unabhängig so bestimmen, dass die Function:

$$(12.) \qquad \vartheta\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}\left(\int_{\varepsilon}^{z,s} du_h - \sum_1^p{}_i \int_{c_i}^{x_i} du_h + k_h\right)\right)$$

als Function von z betrachtet, gerade in den Punkten $x_1, x_2, \ldots x_p$ verschwindet. Die hier eingeführten unteren Grenzen gestatten eine sehr einfache Bestimmung dieser Constanten $k_1, k_2, \ldots k_p$. Der Festsetzung über die Constanten k_h gemäss wird nämlich für alle Werthe von $x_2, x_3, \ldots x_p$

$$(13.) \qquad \vartheta\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}\left(\int_{c_1}^{\varepsilon} + \int_{c_2}^{x_2} + \cdots + \int_{c_p}^{x_p} - k_h\right)\right) = 0.$$

Bestimmt man nun in der Function ζ (§. 2, (10.)) die Function φ im Zähler so, dass sie in den Punkten $x_2, x_3, \ldots x_p$ unendlich klein von der ersten Ordnung wird, so wird sie noch in $p-1$ anderen, durch diese bestimmten Punkten unendlich klein, die mit $x_2', x_3', \ldots x_p'$ bezeichnet sein mögen. Man hat demnach, dem *Abel*schen Theorem zufolge:

$$\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}\left(2\int_{c_1}^{\varepsilon} du_h + \sum_{i=2}^{i=p}\int_{c_i}^{x_i} du_h + \sum_{i=2}^{i=p}\int_{c_i}^{x_i'} du_h\right)\right) \equiv 0$$

oder, was dasselbe ist:

$$\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}\left(\int_{c_1}^{\varepsilon} du_h + \sum_{i=2}^{i=p}\int_{c_i}^{x_i} du_h\right)\right) \equiv -\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}\left(\int_{c_1}^{\varepsilon} du_h + \sum_{i=2}^{i=p}\int_{c_i}^{x_i'} du_h\right)\right)$$

und demnach neben (13.) die Gleichung:

$$(14.) \quad \vartheta\left(\sum_1^p h\left(\int_{c_1}^{\varepsilon} du_h + \int_{c_2}^{x_2'} du_h + \cdots + \int_{c_p}^{x_p'} du_h + k_h\right)\right) = 0.$$

Nun aber sind die Punkte $x_2', x_3', \ldots x_p'$ eben so willkürlich, als es die Punkte $x_2, x_3, \ldots x_p$ sind; das eine System ist durch das andere bestimmt, aber in (13.) kommen nur die Punkte $x_2, x_3, \ldots x_p$ vor, in (14.) nur die $x_2', x_3', \ldots x_p'$; und daraus geht hervor, dass die beiden Functionen:

$$(15.) \quad \vartheta\left(\sum_1^p h\left(\int_{\varepsilon}^{z,s} du_h - \sum_{i=1}^{i=p} \int_{c_i}^{x_i} du_h + k_h\right)\right); \quad \vartheta\left(\sum_1^p h\left(\int_{\varepsilon}^{z,s} du_h - \sum_{i=1}^{i=p} \int_{c_i}^{x_i} du_h - k_h\right)\right)$$

für dieselben Punkte $x_1, x_2, \ldots x_p$ verschwinden. Wenn aber zwei ϑ-Functionen, wie (15.) für dieselben p Punkte verschwinden, so können ihre Argumente nur um entsprechende Vielfache der Periodicitätsmoduln von einander verschieden sein, oder es muss sein:

$$(16.) \quad (2k_1, 2k_2, \ldots 2k_p) \equiv 0.$$

Die Grössen k_h selbst müssen also einander entsprechende Vielfache der halben Perioden sein, oder sie müssen die Form haben:

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{\mu_1}{2}\pi i + \frac{\nu_1}{2} a_{11} + \frac{\nu_2}{2} a_{21} + \cdots + \frac{\nu_p}{2} a_{p1}, \\
k_2 &= \frac{\mu_2}{2}\pi i + \frac{\nu_1}{2} a_{12} + \frac{\nu_2}{2} a_{22} + \cdots + \frac{\nu_p}{2} a_{p2}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
k_p &= \frac{\mu_p}{2}\pi i + \frac{\nu_1}{2} a_{1p} + \frac{\nu_2}{2} a_{2p} + \cdots + \frac{\nu_p}{2} a_{pp},
\end{aligned}$$

worin die Grössen $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_p$; $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_p$ ganze Zahlen sind; diese ganzen Zahlen können beliebig um Vielfache von 2 vermehrt oder vermindert werden, ohne dass die vorausgesetzte Eigenschaft der k dadurch beeinträchtigt wird, so dass man annehmen kann, die Zahlen μ_ϱ, ν_ϱ haben die Werthe 0 oder 1. Es sollen im Folgenden mit den Buchstaben $k_1, k_2, \ldots k_p$ durchweg solche einander entsprechende halbe Perioden bezeichnet werden, bei denen die Zahlen μ, ν die Werthe 0 oder 1 haben.

§. 5.

Es lässt sich nun umgekehrt nachweisen, dass zu jedem System entsprechender halber Perioden ein System unterer Grenzen $c_1, c_2, \ldots c_p$ ge-

funden werden kann, so dass die ϑ-Function (§. 4, (12.)) in den Punkten $x_1, x_2, \ldots x_p$ verschwindet, und dass alle diese Punktsysteme die charakteristische algebraische Eigenschaft haben, dass in ihnen eine Function $\psi_{(\varepsilon,c)}$ unendlich klein von der zweiten Ordnung wird.

Bedeuten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_p$ beliebige Punkte, so lässt sich, wie schon mehrfach erwähnt, das System der Constanten $K_1, K_2, \ldots K_p$ so bestimmen, dass

$$(17.) \qquad \vartheta\left(\sum_{1}^{h}{}^{p}\left(\int_{\varepsilon}^{z,s} du_h - \sum_{i=1}^{i=p}\int_{\gamma_i}^{x_i} du_h + K_h\right)\right)$$

in den Punkten $x_1, x_2, \ldots x_p$ verschwindet. Bestimmt man daher die Punkte $c_1, c_2, \ldots c_p$ mittelst der Congruenzen:

$$(18.) \qquad \left(\sum_{1}^{h}{}^{p}\left(\sum_{i=1}^{i=p}\int_{\gamma_i}^{c_i} du_h\right)\right) \equiv \left(\sum_{1}^{h}{}^{p}(K_h - k_h)\right),$$

was nach den von *Riemann* bewiesenen Sätzen über die Umkehrung der *Abel*schen Integrale immer geschehen kann, so geht die Function (17.) abgesehen von einem nicht verschwindenden Factor über in:

$$(19.) \qquad \vartheta\left(\sum_{1}^{h}{}^{p}\left(\int_{\varepsilon}^{z,s} du_h - \sum_{i=1}^{i=p}\int_{c_i}^{x_i} du_h + k_h\right)\right),$$

welche ebenfalls in den Punkten $x_1, x_2, \ldots x_p$ verschwindet.

Es muss nun gezeigt werden, wie man aus dieser transcendenten Definition des Punktsystems $c_1, c_2, \ldots c_p$ wieder zurück gelangt zu der im §. 2 aufgestellten algebraischen Bestimmungsweise.

Wenn die Function:

$$(20.) \qquad \vartheta\left(\sum_{1}^{h}{}^{p}\left(\int_{\varepsilon}^{z,s} du_h - r_h\right)\right)$$

in den Punkten $x_1, x_2, \ldots x_p$ verschwindet, so lässt sich durch die Umkehrung der *Abel*schen Integrale die Congruenz bilden:

$$(r_1, r_2, \ldots r_p) \equiv \left(\sum_{1}^{h}{}^{p}\left(\int_{c_1}^{x_1} du_h + \int_{c_2}^{x_2} du_h + \cdots + \int_{c_p}^{x_p} du_h - k_h\right)\right)$$

und zwar, wenn die Function (20.) nicht identisch verschwindet, nur auf eine Art. Wenn nun die Bedingung erfüllt ist:

$$(21.) \qquad \vartheta(r_1, r_2, \ldots r_p) = 0,$$

so muss einer der Punkte $x_1, x_2, \ldots x_p$, etwa x_1, mit ε zusammenfallen, und man hat den von *Riemann* im §. 23 der Abhandlung über die *Abel*schen Functionen bewiesenen Satz in einer etwas anderen Form:

Wenn die Function ϑ für das System Werthe $r_1, r_2, \ldots r_p$ ihrer Argumente verschwindet, so lässt sich die Congruenz erfüllen:

$$(22.) \qquad (r_1, r_2, \ldots r_p) \equiv \left(\begin{matrix} p \\ h \\ 1 \end{matrix}\left(\int_{c_1}^{\varepsilon} du_h + \int_{c_2}^{x_2} du_h + \cdots + \int_{c_p}^{x_p} du_h - k_h\right)\right).$$

Dieser Satz hört nicht auf richtig zu sein, wenn (19.) identisch verschwindet, nur sind in diesem Fall die $x_2, x_3, \ldots x_p$ nicht alle völlig bestimmt.

Da nun $k_1, k_2, \ldots k_p$ ein System entsprechender halber Perioden ist, so müssen die beiden Functionen:

$$\vartheta\left(\begin{matrix} p \\ h \\ 1 \end{matrix}\left(\int_{c_1}^{\varepsilon} du_h + \int_{c_2}^{x_2} du_h + \cdots + \int_{c_p}^{x_p} du_h - k_h\right)\right),$$

$$\vartheta\left(\begin{matrix} p \\ h \\ 1 \end{matrix}\left(\int_{c_1}^{\varepsilon} du_h + \int_{c_2}^{x_2} du_h + \cdots + \int_{c_p}^{x_p} du_h + k_h\right)\right)$$

für alle Lagen der Puncte $x_2, x_3, \ldots x_p$ verschwinden; ausserdem können gleichzeitig allen Argumenten der ϑ-Functionen die entgegengesetzten Zeichen gegeben werden, und wenn man daher in (21.) setzt:

$$-r_h = \int_{c_1}^{\varepsilon} du_h + \int_{c_2}^{x_2} du_h + \cdots + \int_{c_p}^{x_p} du_h + k_h,$$

so folgt aus der Congruenz (22.), dass sich für beliebige Lagen von $x_2, x_3, \ldots x_p$ die Congruenz erfüllen lässt:

$$(23.) \qquad \left(\begin{matrix} p \\ h \\ 1 \end{matrix}\left(2\int_{c_1}^{\varepsilon} du_h + \int_{c_2}^{x_2} du_h + \cdots + \int_{c_p}^{x_p} du_h + \int_{c_2}^{x'_2} du_h + \cdots + \int_{c_p}^{x'_p} du_h\right)\right) \equiv 0,$$

worin im Allgemeinen, d. h. wenn die $x_2, x_3, \ldots x_p$ nicht besondere Lagen haben, die $x'_2, x'_3, \ldots x'_p$ durch diese $x_2, x_3, \ldots x_p$ völlig bestimmt sind.

Bildet man nun eine Function φ, welche in den Punkten $x_2, x_3, \ldots x_p$ unendlich klein von der ersten Ordnung wird, so müssen die Punkte $x'_2, x'_3, \ldots x'_p$ diejenigen sein, in welchen diese Function (ausser den Punktepaaren γ, δ) noch verschwindet, oder, um mich der *Riemann*schen Ausdrucks-

weise zu bedienen, die Punkte $x_2, x_3, \ldots x_p; x_2', x_3', \ldots x_p'$ müssen durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpft sein *).

Nun muss aber in Folge der Congruenz (23.), nach der im §. 1 bewiesenen Umkehrung des *Abel*schen Theorems, eine rationale Function ζ von s und z existiren, welche unendlich gross von der zweiten Ordnung wird in den Punkten $c_1, c_2, \ldots c_p$, unendlich klein von der zweiten Ordnung in dem Punkt ε, und unendlich klein von der ersten Ordnung in den Punkten $x_2, x_3, \ldots x_p; x_2', x_3', \ldots x_p'$.

Es wird daher die Function $\frac{\zeta}{\varphi}$ unendlich gross von der zweiten Ordnung in den Punkten $c_1, c_2, \ldots c_p$ und unendlich gross von der ersten Ordnung in den Punktepaaren γ, δ, in welchen $\frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial z}$ gleichzeitig verschwinden, unendlich klein von der zweiten Ordnung im Punkt ε, und ausserdem für unendliche Werthe von s und z bezüglich unendlich klein wie s^{n-2} und z^{m-2}. Daraus folgt, dass das Integral

$$\int \frac{\varphi\, dz}{\zeta \frac{\partial F}{\partial s}}$$

ein Integral der zweiten Gattung ist von der Art der in §. 2 besprochenen, dass also $\frac{\varphi}{\zeta}$ in der Form darstellbar sein muss

$$\frac{\varphi}{\zeta} = \frac{\psi_{(\varepsilon,c)}}{l_\varepsilon}$$

oder

$$(24.) \qquad \zeta = \frac{l_\varepsilon \cdot \varphi}{\psi_{(\varepsilon,c)}}.$$

Es muss demnach, jedem System entsprechender halber Perioden zugeordnet, eine Function ψ existiren, die in einem System Punkte $c_1, c_2, \ldots c_p$ unendlich klein von der zweiten Ordnung wird; congruente Systeme halber Perioden sind dabei nicht als wesentlich verschieden zu betrachten, dagegen können nie zwei incongruente Systeme halber Perioden zu demselben Punktsystem c führen; daraus folgt, dass mindestens soviele Punktsysteme c, also auch Functionen $\psi_{(\varepsilon,c)}$ existiren, als incongruente Systeme einander entsprechender halber Perioden

*) Der Beweis dieser Behauptung findet sich im §. 16 der citirten *Riemann*schen Abhandlung. Man hat, um unseren Fall auf die dort zu Grunde gelegte Form zurückzuführen, nur die Congruenz (23.) in Bezug auf $x_2, x_3, \ldots x_p; x_2', x_3', \ldots x_p'$ zu differentiiren, so dass die Punkte $\varepsilon, c_1, c_2, \ldots c_p$ ungeändert bleiben.

vorhanden sind, nämlich, wie mehrfach bewiesen ist: 2^{2p} *). Es könnten möglicher Weise mehr solcher Functionen, dann aber unendlich viele, existiren, insofern nämlich das in der Congruenz (18.) enthaltene Umkehrproblem kein völlig bestimmtes wäre. Ob und in wieweit dies möglich ist, soll nun zunächst untersucht werden.

§. 6.

Im vorigen Paragraphen sind die Punktsysteme $c_1, c_2, \ldots c_p$ dadurch definirt worden, dass die Function

$$\vartheta\left(\sum_1^p{}_h\left(\int_\varepsilon^{z,s} du_h - \sum_{i=1}^{i=p}\int_{c_i}^{x_i} du_h + k_h\right)\right)$$

in den beliebigen Punkten $x_1, x_2, \ldots x_p$ verschwinde. Lässt man diese Punkte zusammenfallen mit den Punkten $c_1, c_2, \ldots c_p$, so kann man diese Punktsysteme auch definiren als diejenigen Punkte, in welchen die Function:

$$(25.) \qquad \vartheta\left(\sum_1^p{}_h\left(\int_\varepsilon^{z,s} du_h \pm k_h\right)\right)$$

unendlich klein von der ersten Ordnung wird, vorausgesetzt, dass diese Function nicht identisch verschwindet. Wenn also eine solche Function nicht identisch verschwindet, so liefert das betreffende System halber Perioden ein ganz bestimmtes System von Punkten $c_1, c_2, \ldots c_p$. Ein solches System halber Perioden existirt aber im Allgemeinen jedenfalls, nämlich das System $k_h = 0$, da die Function

$$(26.) \qquad \vartheta\left(\sum_1^p{}_h\left(\int_\varepsilon^{z,s} du_h\right)\right)$$

nur unter ganz speciellen Voraussetzungen identisch verschwinden kann, weil sonst

$$\vartheta(0, 0, \ldots 0) = 0$$

sein müsste, was ja schon bei den hyperelliptischen Integralen nicht allgemein der Fall ist. Die p Punkte also, in welchen die Function (26.) verschwindet, und die ein ganz bestimmtes System der Puncte c bilden, mögen im Folgen-

*) Vgl. *Roch*, über die Doppeltangenten an Curven vierter Ordnung. Dieses Journal Bd. 66. *Prym*, Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche. Zürich 1866.

den bezeichnet werden mit $c_1^{(0)}$, $c_2^{(0)}$, ... $c_p^{(0)}$; sie haben die Eigenschaft, dass die Function

$$(27.) \qquad \vartheta\begin{pmatrix} p \\ h \\ 1 \end{pmatrix}\left(\int_{\varepsilon}^{z,s} du_h - \sum_{i=1}^{i=p}\int_{c_i^{(0)}}^{x_i} du_h\right)$$

in den Punkten x_1, x_2, ... x_p verschwindet. Um also zu untersuchen, ob auch die anderen Systeme der Punkte c bestimmt sind, kommt es darauf an, festzustellen, ob Functionen der Form (25.) identisch verschwinden können.

Es soll untersucht werden, ob dies für beliebige Lagen des Punktes ε möglich ist, ob also eine Function (25.) als Function von ε und z identisch verschwinden kann.

Nehmen wir also an, es verschwinde identisch für jedes ε und z:

$$(28.) \qquad \vartheta\begin{pmatrix} p \\ h \\ 1 \end{pmatrix}\left(\int_{\varepsilon}^{z,s} du_h \pm k_h\right),$$

dagegen nicht identisch für jedes z, ε, z', ε':

$$(29.) \qquad \vartheta\begin{pmatrix} p \\ h \\ 1 \end{pmatrix}\left(\int^{z,s} du_h - \int_{\varepsilon'}^{z',s'} du_h \pm k_h\right),$$

so wird (29.), als Function von z betrachtet, in p Punkten verschwinden, von denen der eine mit z', s', der andere mit ε zusammenfällt, und die übrigen mögen sein: ξ_3, ξ_4, ... ξ_p. Man kann demnach, wie in (22.), setzen:

$$\begin{pmatrix} p \\ h \\ 1 \end{pmatrix}\left(\int_{\varepsilon'}^{z',s'} du_h \pm k_h\right) \equiv \begin{pmatrix} p \\ h \\ 1 \end{pmatrix}\left(\int_{c_1^{(0)}}^{\varepsilon} du_h + \int_{c_2^{(0)}}^{z',s'} + \int_{c_3^{(0)}}^{\xi_3} + \cdots + \int_{c_p^{(0)}}^{\xi_p}\right),$$

woraus sich unmittelbar durch Multiplication mit 2 die Congruenz ergiebt:

$$(30.) \qquad 0 \equiv \begin{pmatrix} p \\ h \\ 1 \end{pmatrix}\left(2\int_{c_1^{(0)}}^{\varepsilon} du_h + 2\int_{c_2^{(0)}}^{\varepsilon'} du_h + 2\int_{c_3^{(0)}}^{\xi_3} du_h + \cdots + 2\int_{c_p^{(0)}}^{\xi_p} du_h\right).$$

Diese Congruenz ist aber von der Form (23.) §. 5, woraus also wie dort hervorgeht, dass eine Function φ existiren muss, welche in den Punkten ε', ξ_3, ... ξ_p unendlich klein von der zweiten Ordnung wird. Von diesen $p-1$ Punkten ist aber der eine, nämlich ε' beliebig, was, wie im §. 3 gezeigt ist, eine Bedingungsgleichung zwischen den Moduln der Classe mit sich führt. Um so mehr müsste dies eintreten, wenn auch die Function (29.) identisch verschwinden würde, weil alsdann mehrere von den Punkten ε', ξ_3, ... ξ_p willkürlich gewählt werden könnten.

Damit ist nachgewiesen, dass im Allgemeinen, d. h. wenn zwischen den Moduln der Classe nicht besondere Bedingungsgleichungen erfüllt sind, über die Lage des Punktes ε immer so verfügt werden kann, dass von den Functionen (25.) keine identisch verschwindet, und dass demnach die sämmtlichen 2^{2p} Punktsysteme c völlig bestimmt sind.

Solche Bedingungen sind in der That erfüllt bei denjenigen algebraischen Functionen, die zu den hyperelliptischen Integralen führen.

Bezeichnet man demnach die dem betreffenden System k_h zugehörigen Punkte c, also diejenigen Punkte, in welchen die Function (25.) verschwindet, mit $c_1, c_2, \ldots c_p$, so ergiebt sich die Congruenz:

$$(31.) \qquad (k_1, k_2, \ldots k_p) \equiv \left(\begin{matrix} p \\ h \\ 1 \end{matrix}\left(\sum_{i=1}^{i=p} \int_{c_i^{(0)}}^{c_i} du_h\right)\right),$$

und man hat also die halben Perioden ausgedrückt durch gewisse Summen von p bestimmten Integralen.

Ein wichtiger Unterschied besteht aber zwischen den verschiedenen auf diese Weise bestimmten Punktsystemen c. Wenn nämlich für ein System halber Perioden k_h' die Gleichung

$$(32.) \qquad \vartheta(k_1', k_2', \ldots k_p') = 0$$

erfüllt ist, so muss nothwendig einer der Punkte $c_1, c_2, \ldots c_p$ mit ε zusammenfallen, so dass, wenn man die übrigen mit $c_2', c_3', \ldots c_p'$ bezeichnet, die Congruenz besteht:

$$(33.) \qquad (k_1', k_2', \ldots k_p') \equiv \left(\begin{matrix} p \\ h \\ 1 \end{matrix}\left(\int_{c_1^{(0)}}^{\varepsilon} du_h + \int_{c_2^{(0)}}^{c_2'} du_h + \cdots + \int_{c_p^{(0)}}^{c_p'} du_h\right)\right).$$

Die einem solchen System entsprechende Function $\psi_{(\varepsilon,c')}$, die ebenfalls völlig bestimmt ist, wird daher in dem Punkte ε unendlich klein von der zweiten Ordnung, und muss also durch den linearen Factor l_ε (§. 2) theilbar sein. Durch diese Division reducirt sie sich auf eine Function φ, die in den Punkten $c_2', c_3', \ldots c_p'$ unendlich klein von der zweiten Ordnung wird. Es werden also nur diejenigen Systeme halber Perioden, für welche die Gleichung (32.) nicht erfüllt ist, zu eigentlichen Functionen $\psi_{(\varepsilon,c)}$ führen, während diejenigen, die der Gleichung (32.) genügen, die in $p-1$ Punkten doppelt verschwindenden Functionen φ liefern. Andere Functionen φ, welche in $p-1$ Punkten doppelt verschwinden, als die auf diese Weise entstandenen können nicht

existiren; denn bildet man mit irgend einer solchen Function φ die Function:

$$\zeta = \frac{l_\varepsilon \varphi}{\psi_{(\varepsilon, c^{(0)})}},$$

so muss immer in Folge des *Abel*schen Theorems die Congruenz (33.) erfüllt sein.

§. 7.

Es sei nun ein System halber Perioden:

$$(34.)\quad \begin{cases} k_1 = \frac{\mu_1}{2}\pi i + \frac{\nu_1}{2}a_{11} + \frac{\nu_2}{2}a_{21} + \cdots + \frac{\nu_p}{2}a_{p1}, \\ k_2 = \frac{\mu_2}{2}\pi i + \frac{\nu_1}{2}a_{12} + \frac{\nu_2}{2}a_{22} + \cdots + \frac{\nu_p}{2}a_{p2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_p = \frac{\mu_p}{2}\pi i + \frac{\nu_1}{2}a_{1p} + \frac{\nu_2}{2}a_{2p} + \cdots + \frac{\nu_p}{2}a_{pp}. \end{cases}$$

Alsdann besteht in Folge der fundamentalen Eigenschaft der Function ϑ die Gleichung:

$$(35.)\quad \begin{cases} \vartheta(v_1+k_1, v_2+k_2, \ldots v_p+k_p) \\ = (-1)^{\sum_{h=1}^{h=p} \nu_h \mu_h}\, \vartheta(v_1-k_1, v_2-k_2, \ldots v_p-k_p)\, e^{-2\sum_{h=1}^{h=p} \nu_h v_h}. \end{cases}$$

Setzt man hierin $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, $\ldots$ $v_p = 0$ und berücksichtigt, dass die ϑ-Function eine gerade ist, so folgt, dass immer dann:

$$\vartheta(k_1, k_2, \ldots k_p) = 0$$

ist, wenn die Summe

$$(36.)\qquad \nu_1\mu_1 + \nu_2\mu_2 + \cdots + \nu_p\mu_p$$

eine ungerade Zahl ist; dass also die dieser Bedingung genügenden halben Perioden, die ich der Kürze wegen die ungeraden halben Perioden nennen will, zu denjenigen gehören, die oben mit k_h' bezeichnet wurden, die also nicht zu Functionen $\psi_{(c,\varepsilon)}$ führen, sondern zu Functionen φ, die in $p-1$ Punkten unendlich klein von der zweiten Ordnung werden.

Diejenigen Systeme k_h, für welche die Summe (36.) eine gerade Zahl ist, sollen die geraden halben Perioden genannt werden, und es wird sich zeigen, dass für die geraden halben Perioden im Allgemeinen die Function $\vartheta(k_1, k_2, \ldots k_p)$ nicht verschwinden kann. Die Gleichung (35.) lässt sich

nämlich in der Form schreiben:

$$(37.)\quad \begin{cases} e^{\Sigma_h v_h v_h}\,\vartheta(v_1+k_1, v_2+k_2, \ldots v_p+k_p) \\ = (-1)^{\Sigma_h v_h \mu_h}\, e^{-\Sigma_h v_h v_h}\,\vartheta(v_1-k_1, v_2-k_2, \ldots v_p-k_p). \end{cases}$$

Die Differentiation dieser identischen Gleichung in Bezug auf eines der v giebt:

$$(38.)\quad \begin{cases} e^{\Sigma_h v_h v_h}\left\{\nu_\varrho\,\vartheta\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}(v_h+k_h)\right)+\vartheta'(v_\varrho+k_\varrho)\right\} \\ = (-1)^{\Sigma_h v_h \mu_h}\, e^{-\Sigma_h v_h v_h}\left\{-\nu_\varrho\,\vartheta\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}(v_h-k_h)\right)+\vartheta'(v_\varrho-k_\varrho)\right\}, \end{cases}$$

worin unter $\vartheta'(v_\varrho)$ der partielle Differentialquotient der Function ϑ in Bezug auf das Argument v_ϱ zu verstehen ist.

Setzt man nun in (38.) sämmtliche v_h gleich 0, so ergiebt sich, da die Differentialquotienten von ϑ ungerade Functionen sind, dass für die geraden halben Perioden nicht

$$(39.)\qquad \vartheta(k_1, k_2, \ldots k_p) = 0$$

sein kann, wenn nicht gleichzeitig:

$$(40.)\qquad \vartheta'(k_1)=0, \quad \vartheta'(k_2)=0, \quad \ldots \quad \vartheta'(k_p)=0.$$

Die Gleichungen (40.) sind aber, wie *Riemann* bewiesen hat*), die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine Function wie:

$$\vartheta\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}\left(\int_\varepsilon^{z,s} du_h \pm k_h\right)\right)$$

für alle Werthe von ε und z verschwinde, und dass dies nur unter der Voraussetzung gewisser Bedingungsgleichungen zwischen den Moduln der Klasse möglich ist, wurde oben (§. 6) nachgewiesen.

Daraus folgt also, dass die Gleichung (39.) im Allgemeinen für kein System der geraden halben Perioden erfüllt sein kann, und ferner dass für kein System der ungeraden halben Perioden die Gleichungen (40.) alle zugleich erfüllt sein können. Die Anzahl aller incongruenten Systeme gerader halber Perioden beträgt aber $2^{p-1}(2^p+1)$, die der ungeraden $2^{p-1}(2^p-1)$**), und daraus ergiebt sich der Schluss:

---

*) Ueber das Verschwinden der ϑ-Functionen. Dieses Journal Bd. 65, pag. 161.

**) Vgl. z. B. *Prym* l. c.

Es giebt im Allgemeinen, zu jedem Punkt ε zugehörig, $2^{p-1}(2^p+1)$ Functionen $\psi_{(\varepsilon,c)}$, und, von der Wahl des Punktes ε unabhängig, $2^{p-1}(2^p-1)$ Functionen φ, die in $p-1$ Punkten unendlich klein von der zweiten Ordnung werden.

Aus der Gleichung (38.) ergiebt sich, indem man die Argumente v_h gleich 0 setzt, für den Fall, wo die k_h gerade halbe Perioden sind, das System Gleichungen:

$$(41.) \qquad \nu_\varrho = -\frac{\vartheta'(k_\varrho)}{\vartheta(k_1, k_2, \dots k_p)}, \qquad \varrho = 1, 2, \dots p.$$

Die Gleichung (37.) führt zu einem System von 2^{2p} Functionen, die der ursprünglichen ϑ-Function verwandt sind, und die auf folgende Weise bezeichnet werden:

$$(42.) \quad e^{\sum_h \nu_h v_h}\vartheta(v_1+k_1, v_2+k_2, \dots v_p+k_p) = \vartheta\begin{Bmatrix}\nu_1, \nu_2, \dots \nu_p\\ \mu_1, \mu_2, \dots \mu_p\end{Bmatrix}(v_1, v_2, \dots v_p),$$

wo der Zahlencomplex

$$\begin{Bmatrix}\nu_1, \nu_2, \dots \nu_p\\ \mu_1, \mu_2, \dots \mu_p\end{Bmatrix},$$

den man sich durch die Combinationen der Zahlen 0,1 gebildet denken kann, die Characteristik der ϑ-Functionen heisst *). Von diesen ϑ-Functionen sind $2^{p-1}(2^p+1)$ gerade Functionen, d. h. sie ändern ihren Werth nicht, wenn man allen Argumenten gleichzeitig die entgegengesetzten Werthe ertheilt, $2^{p-1}(2^p-1)$ ungerade Functionen, d. h. sie nehmen die entgegengesetzten Werthe an, wenn alle Argumente gleichzeitig die entgegengesetzten Werthe annehmen, wie aus der Gleichung (37.) hervorgeht. Die letzteren verschwinden alle, wenn die Argumente alle gleichzeitig verschwinden, von den ersteren verschwinden im Allgemeinen keine, wenn die Argumente alle gleichzeitig Null werden.

Die partiellen Differentialquotienten dieser ϑ-Functionen erhält man aus (42.)

$$(43.) \quad \frac{\partial\vartheta\begin{Bmatrix}\nu_1, \nu_2, \dots \nu_p\\ \mu_1, \mu_2, \dots \mu_p\end{Bmatrix}(v_1, v_2, \dots v_p)}{\partial c_\varrho} = e^{\sum_h \nu_h v_h}\left\{\nu_\varrho\,\vartheta\left(\sum_1^p h (v_h+k_h)\right)+\vartheta'(v_\varrho+k_\varrho)\right\}$$
$$\varrho = 1, 2, \dots p,$$

*) Vgl. hierüber die schon citirten Abhandlungen von *Roch* und *Prym*. Die dort gebrauchte Bezeichnung unterscheidet sich von der unsrigen durch einen constanten Factor.

§. 8.

Mit diesen 2^{2p} ϑ-Functionen steht in naher Beziehung ein System von ebensovielen Transcendenten zweiter Gattung, welches die Eigenschaft hat, dass alle ihm angehörigen Functionen ungerade sind.

Bedeuten nämlich $v_1, v_2, \ldots v_p$ ein System unabhängiger Variabeln, und setzt man:

$$(44.) \qquad v_\varrho = \int_{c_1^0}^{x_1} du_\varrho + \int_{c_2^0}^{x_2} du_\varrho + \cdots + \int_{c_p^0}^{x_p} du_\varrho, \qquad \varrho = 1, 2, \ldots p,$$

so sind aus diesen Gleichungen für jedes Werthsystem der v_ϱ nicht nur die Punkte $x_1, x_2, \ldots x_p$ im Allgemeinen völlig bestimmt, sondern es sind auch die Integrationswege innerhalb eines gewissen Spielraums dadurch gegeben. Ist nun $t_{(\xi)}$ ein Normalintegral der zweiten Gattung, d. h. ein solches, welches nur in dem Punkte ξ unendlich von der ersten Ordnung wird, dessen Periodicitätsmoduln an den Querschnitten a sämmtlich gleich Null, an dem Querschnitte b_μ gleich $-2\left(\frac{\partial u_\mu}{\partial z}\right)_{z=z_\xi}$ sind *), so kann man als Transcendente zweiter Gattung die Summen einführen:

$$(45.) \quad Z_\xi(v_1, v_2, \ldots v_p) = \int_{c_1^0}^{x_1} dt_\xi + \int_{c_2^0}^{x_2} dt_\xi + \cdots + \int_{c_p^0}^{x_p} dt_\xi,$$

indem man die Integrationswege ebenso nimmt, wie in den Gleichungen (44.) und die Grössen $v_1, v_2, \ldots v_p$ als unabhängige Variable betrachtet. Will man die Variablen $v_1, v_2, \ldots v_p$ um Vielfache der ganzen Periodicitätsmoduln ändern, so geschieht dies dadurch, dass man in (44.) und folglich auch in (45.) nur die Integrationswege in gewisser Weise verändert, die Punkte $x_1, x_2, \ldots x_p$ aber ungeändert lässt. Aus dieser Bemerkung ergiebt sich die Gleichung:

$$(46.) \quad \begin{cases} Z_\xi(v_1 + 2k_1, v_2 + 2k_2, \ldots v_p + 2k_p) \\ = Z_\xi(v_1, v_2, \ldots v_p) - 2\nu_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)_\xi - 2\nu_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)_\xi - \cdots - 2\nu_p\left(\frac{\partial u_p}{\partial z}\right)_\xi, \end{cases}$$

so dass also die Function Z für jedes einzelne Argument um πi periodisch ist, bei gleichzeitiger Aenderung aller Argumente um entsprechende Vielfache der andern Periodicitätsmoduln sich um ein hinzutretendes constantes

*) Vgl. meine Abhandlung über das Additionstheorem der *Abel*schen Functionen. Dieses Journal p. 193 dieses Bandes.

Glied ändert. Ertheilt man den Grössen $v_1, v_2, \ldots v_p$ die entgegengesetzten Werthe, so erhält man die Gleichung (Siehe meine oben citirte Abhandlung über das Additionstheorem):

$$(47.) \qquad \mathbf{Z}_\xi(v_1, v_2, \ldots v_p) + \mathbf{Z}_\xi(-v_1, -v_2, \cdots -v_p) = -\frac{\partial \lg \zeta'_{0(\xi)}}{\partial z_\xi},$$

worin ζ'_0 eine rationale Function von z und s bedeutet, die in den Punkten $c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, \ldots c_p^{(0)}$ unendlich gross von der zweiten Ordnung, in den Punkten $x_1, x_2, \ldots x_p$ und in noch p dadurch bestimmten Punkten $x'_1, x'_2, \ldots x'_p$ unendlich klein von der ersten Ordnung wird.

Nur in einem Falle kann auf der rechten Seite von (47.) statt der algebraischen Function Null zu stehen kommen, wenn nämlich in dem Punkte ξ zwei einander gleiche Werthe von ζ'_0 zusammenfallen.

Nun lässt sich aber die Function ζ'_0 folgendermassen darstellen:

$$\zeta'_0 = \frac{\psi}{\psi_{(\varepsilon, c^{(0)})}},$$

wo die Functionen ψ dieselbe Bedeutung haben wie im §. 2, so dass, wie dort bewiesen ist, der Zähler von ζ'_0 in die Form gesetzt werden kann:

$$\psi = a_0 \psi_{(\varepsilon, c^{(0)})} + l_\varepsilon (a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \cdots + a_p \varphi_p)$$

also:

$$(48.) \qquad \zeta'_0 = a_0 + l_\varepsilon \frac{a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \cdots + a_p \varphi_p}{\psi_{(\varepsilon, c)}}.$$

Daraus folgt, dass die Function $\zeta'_0 - a_0$ unendlich klein von der zweiten Ordnung wird in dem Punkt ε, dass also ε ein solcher Punkt ist, in welchem zwei einander gleiche Werthe von ζ'_0 zusammenfallen, so dass, wenn man in der Function Z_ξ den Punkt ξ in ε hineinfallen lässt, die Gleichung (47.) in folgende übergeht:

$$(47^a.) \qquad \mathbf{Z}_\varepsilon(v_1, v_2, \ldots v_p) + \mathbf{Z}_\varepsilon(-v_1, -v_2, \ldots -v_p) = 0,$$

und demnach ist die Function $Z_\varepsilon(v_1, v_2, \ldots v_p)$ eine ungerade Function.

In der oben erwähnten Arbeit über das Additionstheorem habe ich für die Function Z einen Ausdruck durch ϑ-Functionen aufgestellt, der sich in den hier gebrauchten Bezeichnungen folgendermassen gestaltet:

$$(49.) \qquad \mathbf{Z}_\xi(v_1, v_2, \ldots v_p) = -\frac{\partial \left\{ \lg \vartheta \begin{pmatrix} p \\ h \\ 1 \end{pmatrix} \left(\int_\varepsilon^\xi du_h - v_h \right) \right) - \lg \vartheta \begin{pmatrix} p \\ h \\ 1 \end{pmatrix} \left(\int_\varepsilon^\xi du_h \right) \right) \Big\}}{\partial z_\xi}.$$

Führt man auf der rechten Seite die Differentiation aus, und lässt nach der

Differentiation ξ mit ε zusammenfallen, so ergiebt sich:

$$(50.) \qquad Z_\varepsilon(v_1, v_2, \ldots v_p) = \sum_{h=1}^{h=p} \frac{\vartheta'(v_h)}{\vartheta(v_1, v_2, \ldots v_p)} \left(\frac{\partial u_h}{\partial z}\right)_\varepsilon .$$

Auch aus diesem Ausdruck ist zu erkennen, dass die Function Z_ε eine ungerade ist.

Es lässt sich nun ein ganzes System solcher ungeraden Z-Functionen bilden, entsprechend den 2^{2p} ϑ-Functionen.

Setzt man nämlich in der Gleichung (46.) an Stelle von v_h: $v_h - k_h$ und ε an Stelle von ξ, so erhält man:

$$(51.) \quad \begin{cases} Z_\varepsilon(k_1+v_1, k_2+v_2, \ldots k_p+v_p) + \nu_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)_\varepsilon + \nu_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)_\varepsilon + \cdots + \nu_p\left(\frac{\partial u_p}{\partial u}\right)_\varepsilon \\ = -Z_\varepsilon(k_1-v_1, k_2-v_2, \ldots k_p-v_p) - \nu_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)_\varepsilon - \nu_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)_\varepsilon - \cdots - \nu_p\left(\frac{\partial u_p}{\partial z}\right)_\varepsilon . \end{cases}$$

Daraus erhellt, dass die auf der linken Seite stehende Function ebenfalls eine ungerade Function der Argumente v_h ist, und als solche, den ϑ-Functionen analog, mit einer Characteristik versehen werden kann. Man erhält auf diese Weise 2^{2p} ungerade Z-Functionen, indem man setzt:

$$(52.) \quad \begin{cases} Z_\varepsilon(k_1+v_1, k_2+v_2, \ldots k_p+v_p) + \nu_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)_\varepsilon + \nu_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)_\varepsilon + \cdots + \nu_p\left(\frac{\partial u_p}{\partial z}\right)_\varepsilon \\ = Z_\varepsilon \begin{Bmatrix} \nu_1, \nu_2, \ldots \nu_p \\ \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_p \end{Bmatrix} (v_1, v_2, \ldots v_p). \end{cases}$$

Setzt man in der Gleichung (51.) $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, $\ldots$ $v_p = 0$, so erhält man:

$$(53.) \qquad Z_\varepsilon(k_1, k_2, \ldots k_p) = -\nu_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)_\varepsilon - \nu_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial z}\right)_\varepsilon - \cdots - \nu_p\left(\frac{\partial u_p}{\partial z}\right)_\varepsilon ,$$

vorausgesetzt, dass diese Grösse endlich ist. Setzt man aber nach der Congruenz (31.) §. 6

$$(k_1, k_2, \ldots k_p) \equiv \begin{pmatrix} p \\ h \\ 1 \end{pmatrix} \left(\sum_{i=1}^{i=p} \int_{c_i^{(0)}}^{c_i} du_h \right),$$

so ergiebt sich direct:

$$Z_\varepsilon(k_1, k_2, \ldots k_p) = \int_{c_1^{(0)}}^{c_1} dt_\varepsilon + \int_{c_2^{(0)}}^{c_2} dt_\varepsilon + \cdots + \int_{c_p^{(0)}}^{c_p} dt_\varepsilon .$$

Wenn nun die halben Perioden k_h zu den geraden gehören, so fällt keiner der Punkte c_1, c_2, $\ldots$ c_p mit ε zusammen, daher ist $Z_\varepsilon(k_1, k_2, \ldots k_p)$ endlich, und die Gleichung (53.) ist gültig. Gehören dagegen die halben Perioden k_h zu den ungeraden, so fällt nothwendig einer der Punkte c_1, c_2, $\ldots$ c_p mit ε

zusammen, und $Z_\varepsilon(k_1, k_2, \dots k_p)$ ist dann unendlich gross. Für die Functionen (52.) ergiebt sich daraus die Folgerung:

$$Z_\varepsilon \begin{Bmatrix} \nu_1, \nu_2, \dots \nu_p \\ \mu_1, \mu_2, \dots \mu_p \end{Bmatrix} (0, 0, \dots 0)$$

ist entweder Null oder unendlich gross, je nachdem die Summe

$$\nu_1\mu_1 + \nu_2\mu_2 + \cdots + \nu_p\mu_p$$

eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Die durch die Gleichung (52.) definirten ungeraden Z-Functionen gestatten nun alle einen völlig übereinstimmenden Ausdruck durch die entsprechenden ϑ-Functionen.

Setzt man nämlich in (50.) $v_h + k_h$ an die Stelle von v_h und substituirt den dadurch gewonnenen Werth von $Z_\varepsilon(v_1 + k_1, v_2 + k_2, \dots v_p + k_p)$ in (52.), so folgt:

$$Z_\varepsilon \begin{Bmatrix} \nu_1, \nu_2, \dots \nu_p \\ \mu_1, \mu_2, \dots \mu_p \end{Bmatrix} (v_1, v_2, \dots v_p) = \sum_{i=1}^{i=p} \frac{\vartheta'\left(k_i + v_i) + \nu_h \vartheta \begin{pmatrix} p \\ h \\ 1 \end{pmatrix} (k_h + v_h)\right)}{\vartheta \begin{pmatrix} p \\ h \\ 1 \end{pmatrix} (k_h + v_h)} \left(\frac{\partial u_i}{\partial z}\right)_\varepsilon$$

oder endlich, nach (42.) und (43.) §. 7,

$$(54.) \quad Z_\varepsilon \begin{Bmatrix} \nu_1, \nu_2, \dots \nu_p \\ \mu_1, \mu_2, \dots \mu_p \end{Bmatrix} (v_1, v_2, \dots v_p) = \sum_{i=1}^{i=p} \frac{\partial \lg \vartheta \begin{Bmatrix} \nu_1, \nu_2, \dots \nu_p \\ \mu_1, \mu_2, \dots \mu_p \end{Bmatrix} (v_1, v_2, \dots v_p)}{\partial v_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial z}\right)_\varepsilon;$$

Auch aus dieser Form lässt sich leicht ersehen, dass diese Z-Functionen alle ungerade sind.

Zwischen je zweien der Functionen Z besteht eine algebraische Relation, die man entweder mit Hülfe des Additionstheorems erhält, oder aus den Ausdrücken der Z-Functionen durch ϑ-Functionen.

Man hat nämlich in Folge der Gleichungen (50.) und (54.)

$$Z_\varepsilon \begin{Bmatrix} \nu_1, \nu_2, \dots \nu_p \\ \mu_1, \mu_2, \dots \mu_p \end{Bmatrix} (v_1, v_2, \dots v_p) - Z_\varepsilon(v_1, v_2, \dots v_p)$$

$$= -\left\{ \frac{\partial}{\partial z} \lg \frac{\vartheta \begin{Bmatrix} \nu_1, \nu_2, \dots \nu_p \\ \mu_1, \mu_2, \dots \mu_p \end{Bmatrix} \left(\begin{matrix} p \\ h \\ 1 \end{matrix} \left(\int_\varepsilon^{z,s} du_h - v_h \right) \right)}{\vartheta \left(\begin{matrix} p \\ h \\ 1 \end{matrix} \left(\int_\varepsilon^{z,s} du_h - v_h \right) \right)} \right\}_{z = z_\varepsilon},$$

und daraus ergiebt sich mit Hülfe der Sätze, die *Riemann* im §. 27 der Ab-

handlung über die *Abel*schen Functionen bewiesen hat:

$$(55.)\quad \begin{cases} Z_\varepsilon \begin{Bmatrix} \nu_1, \nu_2, \dots \nu_p \\ \mu_1, \mu_2, \dots \mu_p \end{Bmatrix} (v_1, v_2, \dots v_p) - Z_\varepsilon (v_1, v_2, \dots v_p) \\ \qquad = -\left\{ \dfrac{\partial \lg \chi \begin{Bmatrix} \nu_1, \nu_2, \dots \nu_p \\ \mu_1, \mu_2, \dots \mu_p \end{Bmatrix}}{\partial z} \right\}_{z = z_\varepsilon}. \end{cases}$$

Hierin ist $\chi \begin{Bmatrix} \nu_1, \nu_2, \dots \nu_p \\ \mu_1, \mu_2, \dots \mu_p \end{Bmatrix}$ eine Function, deren Quadrat rational durch s, z ausdrückbar ist, welche unendlich gross von der ersten Ordnung wird in den Punkten $x_1, x_2, \dots x_p$, die an dem Querschnitte a_h den Factor $(-1)^{\mu_h}$, an dem Querschnitte b_h den Factor $(-1)^{\nu_h}$ annimmt und dadurch bis auf einen von s und z unabhängigen Factor, der bei der logarithmischen Differentiation fortfällt, völlig bestimmt und rational durch die in $x_1, x_2, \dots x_p$ stattfindenden Werthe von s, z ausdrückbar ist.

§. 9.

Die bisher gewonnenen Resultate sollen nun auf das fundamentale Problem der Theorie der *Abel*schen Functionen, auf das Umkehrproblem, angewandt werden.

Die Aufgabe ist die, aus den als bekannt vorausgesetzten Werthen von $v_1, v_2, \dots v_p$ die Punkte $x_1, x_2, \dots x_p$ zu finden, welche den Bedingungen genügen:

$$(56.)\quad (v_1, v_2, \dots v_p) \equiv \left(\sum_1^p h \left(\int_{c_1^{(0)}}^{x_1} du_h + \int_{c_2^{(0)}}^{x_2} du_h + \dots + \int_{c_p^{(0)}}^{x_p} du_h \right) \right).$$

Dieses Problem ist immer, und falls die $v_1, v_2, \dots v_p$ nicht gewissen Bedingungen genügen, nur auf eine Weise lösbar. Es können demnach die Werthe, welche eine rationale Function von s und z in den Punkten $x_1, x_2, \dots x_p$ annimmt, als eindeutige, $2p$fach periodische Functionen der p unabhängigen Veränderlichen v_h angesehen werden.

Dass in der Congruenz (56.) gerade die Punkte $c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, \dots c_p^{(0)}$ als untere Grenzen genommen sind, ist eine an sich willkürliche Annahme, die aber die Formeln nicht unwesentlich vereinfacht. Wären die unteren Grenzen andere, so hätte man nur die Grössen $v_1, v_2, \dots v_p$ um gewisse Constanten zu vermehren, um die Form (56.) zu erhalten.

Die Lösung dieses Problems ist für den Fall der hyperelliptischen

Integrale von Herrn *Weierstrass* in einer sehr eleganten Form durchgeführt *). Um im allgemeinen Fall einen ähnlichen Weg einzuschlagen, müsste man von folgenden Grundgedanken ausgehen:

Bedeutet σ irgend eine rationale Function von s und z, so ist die Aufgabe die, die p Werthe zu finden, welche diese Function in den p Punkten $x_1, x_2, \ldots x_p$ annimmt, oder genauer ausgedrückt, es sollen die Coefficienten einer algebraischen Gleichung, durch $v_1, v_2, \ldots v_p$ dargestellt, gefunden werden, deren Wurzeln die p Werthe $\sigma_{(x_1)}, \sigma_{(x_2)}, \ldots \sigma_{(x_p)}$ sind, welche die Function σ in den Punkten $x_1, x_2, \ldots x_p$ annimmt. Bezeichnet man allgemein mit $\sigma_{(\xi)}$ den Werth, welchen die Function σ in einem Punkt ξ annimmt, so kann man dieser Gleichung die Form geben:

$$(57.) \qquad \frac{(\sigma-\sigma_{(x_1)})(\sigma-\sigma_{(x_2)})\ldots(\sigma-\sigma_{(x_p)})}{(\sigma-\sigma_{(c_1^{(0)})})(\sigma-\sigma_{(c_2^{(0)})})\ldots(\sigma-\sigma_{(c_p^{(0)})})} = 0$$

oder durch eine Partialbruchzerlegung:

$$(58.) \qquad \frac{P_1}{(\sigma-\sigma_{(c_1^{(0)})})}+\frac{P_2}{(\sigma-\sigma_{(c_2^{(0)})})}+\cdots+\frac{P_p}{(\sigma-\sigma_{(c_p^{(0)})})}+1 = 0.$$

Die Vergleichung von (57.) und (58.) ergiebt für diese Coefficienten $P_1, P_2, \ldots P_p$ den algebraischen Ausdruck:

$$(59.) \quad \begin{cases} P_1 = \dfrac{(\sigma_{(c_1^{(0)})}-\sigma_{(x_1)})(\sigma_{(c_1^{(0)})}-\sigma_{(x_2)})\ldots(\sigma_{(c_1^{(0)})}-\sigma_{(x_p)})}{(\sigma_{(c_1^{(0)})}-\sigma_{(c_2^{(0)})})(\sigma_{(c_1^{(0)})}-\sigma_{(c_3^{(0)})})\ldots(\sigma_{(c_1^{(0)})}-\sigma_{(c_p^{(0)})})}, \\ P_2 = \dfrac{(\sigma_{(c_2^{(0)})}-\sigma_{(x_1)})(\sigma_{(c_2^{(0)})}-\sigma_{(x_2)})\ldots(\sigma_{(c_2^{(0)})}-(\sigma_{(x_p)})}{(\sigma_{(c_2^{(0)})}-\sigma_{(c_1^{(0)})})(\sigma_{(c_2^{(0)})}-\sigma_{(c_3^{(0)})})\ldots(\sigma_{(c_2^{(0)})}-\sigma_{(c_p^{(0)})})}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_p = \dfrac{(\sigma_{(c_p^{(0)})}-\sigma_{(x_1)})(\sigma_{(c_p^{(0)})}-\sigma_{(x_2)})\ldots(\sigma_{(c_p^{(0)})}-\sigma_{(x_p)})}{(\sigma_{(c_p^{(0)})}-\sigma_{(c_1^{(0)})})(\sigma_{(c_p^{(0)})}-\sigma_{(c_2^{(0)})})\ldots(\sigma_{(c_p^{(0)})}-\sigma_{(c_{p-1}^{(0)})})}, \end{cases}$$

und die Aufgabe ist nun darauf zurückgeführt, diese Coefficienten $P_1, P_2, \ldots P_p$ durch die unabhängigen Veränderlichen $v_1, v_2, \ldots v_p$ auszudrücken.

Handelt es sich um die Umkehrung der hyperelliptischen Integrale, und nimmt man für die Function σ die Veränderliche z selbst, so erhalten die

*) Vgl. *Weierstrass*, Theorie der *Abel*schen Functionen. Dieses Journals Bd. 52. Die Endresultate sind angegeben in der Abhandlung des Herrn *Königsberger*, über die Transformation der *Abel*schen Functionen. Dieses Journals Bd. 64.

Grössen P sehr einfache Ausdrücke. Es werden nämlich die Quadratwurzeln der P, von constanten Factoren abgesehen, ausgedrückt durch die Quotienten von zwei ϑ-Functionen, deren Argumente geradezu die unabhängigen Veränderlichen $v_1, v_2, \ldots v_p$ sind. Eine gleich einfache Lösung existirt, wie sich alsbald zeigen wird, im allgemeinen Falle nicht; es lässt sich nachweisen, dass die Annahme, die Coefficienten $P_1, P_2, \ldots P_p$ können durch Quotienten von Producten von ϑ-Functionen ausgedrückt werden, deren Argumente einfach die unabhängigen Veränderlichen $v_1, v_2, \ldots v_p$ sind, die Voraussetzung von hyperelliptischen Integralen einschliesst.

Nehmen wir, um dies nachzuweisen, an, die Function P_1 liesse sich in der angedeuteten Weise durch Quotienten von ϑ-Functionen ausdrücken, deren Argumente geradezu die Grössen $v_1, v_2, \ldots v_p$ sind, so müsste eine ϑ-Function existiren:

$$\vartheta\begin{Bmatrix} v_1, v_2, \ldots v_p \\ \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_p \end{Bmatrix}(v_1, v_2, \ldots v_p),$$

welche die Eigenschaft hat, als Function von x_1 betrachtet, in dem Punkte $c_1^{(0)}$ zu verschwinden, welche Lage auch die Punkte $x_2, x_3, \ldots x_p$ haben mögen, weil nämlich P_1 offenbar diese Eigenschaft hat. Berücksichtigt man also die Bedeutung der mit Charakteristiken versehenen ϑ-Functionen, (42.) §. 7, setzt für die $v_1, v_2, \ldots v_p$ aus (56.) die Ausdrücke, nachdem man den Punkt x_1 mit dem Punkt $c_1^{(0)}$ hat zusammenfallen lassen, so folgt, dass ein System entsprechender halber Perioden k_h existiren muss, derart, dass die Function

$$(60.) \qquad \vartheta\left(\sum_1^p h \left(\int_{c_2^{(0)}}^{x_2} du_h + \int_{c_3^{(0)}}^{x_3} du_h + \cdots + \int_{c_p^{(0)}}^{x_p} du_h \pm k_h\right)\right)$$

für alle Werthe der $x_2, x_3, \ldots x_p$ verschwindet. Da nun aber (nach §. 1) die Function

$$(61.) \qquad \vartheta\left(\sum_1^p h \left(\int_{\varepsilon}^{z,s} du_h + \int_{c_2^{(0)}}^{x_2} du_h + \int_{c_3^{(0)}}^{x_3} du_h + \cdots + \int_{c_p^{(0)}}^{x_p} du_h \pm k_h\right)\right)$$

nicht für alle Werthe von $z, s; x_2, x_3, \ldots x_p$ verschwinden kann, so verschwindet diese Function ausser in dem Punkt ε, noch in $p-1$ anderen Punkten, die mit $\xi_2, \xi_3, \ldots \xi_p$ bezeichnet sein mögen. Diese Punkte müssen der folgenden Congruenz genügen:

$$(62.)\quad \begin{cases} \left(\begin{matrix} p \\ h \\ 1 \end{matrix}\left(\int_{c_2^{(0)}}^{x_2} du_h + \int_{c_3^{(0)}}^{x_3} du_h + \cdots + \int_{c_p^{(0)}}^{x_p} du_h \pm k_h\right)\right) \\ \equiv -\left(\begin{matrix} p \\ h \\ 1 \end{matrix}\left(\int_{c_1^{(0)}}^{\varepsilon} du_h + \int_{c_2^{(0)}}^{\xi_2} du_h + \cdots + \int_{c_p^{(0)}}^{\xi_p} du_h\right)\right). \end{cases}$$

Setzt man nun nach §. 6 (31.)

$$(63.)\qquad (k_1, k_2, \ldots k_p) \equiv \left(\begin{matrix} p \\ h \\ 1 \end{matrix}\left(\sum_{i=1}^{i=p} \int_{c_i^{(0)}}^{c_i} du_h\right)\right),$$

so kann man immer einen der Punkte $c_1, c_2, \ldots c_p$ mit ε zusammenfallen lassen, denn in Folge von (60.) ist:

$$\vartheta(k_1, k_2, \ldots k_p) = 0,$$

demnach müssen die halben Perioden k_h entweder zu den ungeraden gehören, in welchem Fall nach §. 6 eines der $c_1, c_2, \ldots c_p$ mit ε zusammenfallen muss, oder, falls die k_h zu den geraden halben Perioden gehören, ist einer der Punkte $c_1, c_2, \ldots c_p$ beliebig und kann in den Punkt ε verlegt werden. Nimmt man also an, der Punkt c_1 falle mit ε zusammen, so folgt aus (62.) die Congruenz:

$$(64.)\quad \left(\begin{matrix} p \\ h \\ 1 \end{matrix}\left(\int_{c_2^{(0)}}^{\xi_2} du_h + \int_{c_3^{(0)}}^{\xi_3} du_h + \cdots + \int_{c_p^{(0)}}^{\xi_p} du_h + \int_{c_2}^{x_2} du_h + \int_{c_3}^{x_3} du_h + \cdots + \int_{c_p}^{x_p} du_h\right)\right) \equiv 0.$$

Aus dieser Congruenz folgt nun, dass die Punkte $\xi_2, \xi_3, \ldots \xi_p$ mit den $x_2, x_3, \ldots x_p$ durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpft sind, ebenso wie die Punkte $c_2^{(0)}, c_3^{(0)}, \ldots c_p^{(0)}$ mit den Punkten $c_2, c_3, \ldots c_p$, oder mit anderen Worten, dass eine Function φ existiren muss, welche in den Punkten $c_2^{(0)}, c_3^{(0)}, \ldots c_p^{(0)}$, $c_2, c_3, \ldots c_p$ unendlich klein von der ersten Ordnung wird. Nun wird aber eine Function φ unendlich klein von der zweiten Ordnung in den Punkten $c_2, c_3, \ldots c_p$, und daraus folgt, dass auch die Congruenz bestehen muss:

$$(65.)\qquad \left(\begin{matrix} p \\ h \\ 1 \end{matrix}\left(\int_{c_2^{(0)}}^{c_2} du_h + \int_{c_3^{(0)}}^{c_3} du_h + \cdots + \int_{c_p^{(0)}}^{c_p} du_h\right)\right) \equiv 0,$$

welche mit Hülfe von (63.) die Congruenz ergiebt:

$$(66.)\quad (k_1, k_2, \ldots k_p) \equiv \left(\int_{c_1^{(0)}}^{\varepsilon} du_1, \int_{c_1^{(0)}}^{\varepsilon} du_2, \ldots \int_{c_1^{(0)}}^{\varepsilon} du_p\right).$$

Da nun der Punkt $c_1^{(0)}$ nicht mit ε zusammenfallen kann, weil sonst $\vartheta(0, 0, \ldots 0)$ verschwinden müsste, so folgt aus (66.) dass eine rationale Function von s und z existiren muss, die nur in einem Punkt unendlich gross, in einem Punkt unendlich klein von der zweiten Ordnung wird; mit deren Hülfe die Fläche, welche die Verzweigungsart von s darstellt, auf eine zweiblättrige abgebildet werden könnte. Mit anderen Worten, es müssen sich unter der hier gemachten Voraussetzung die Integrale, um die es sich handelt, auf hyperelliptische transformiren lassen.

§. 10.

Da nun also die Unmöglichkeit der Darstellung der Functionen P_1, P_2, $\ldots$ P_p in der gedachten einfachen Weise dargethan ist, so handelt es sich vor Allem darum, eine andere Darstellungsweise zu finden. Es wird sich ergeben, dass es erforderlich ist, zu den Argumenten v_1, v_2, $\ldots$ v_p gewisse Constanten hinzuzufügen.

Der Coefficient P_1, als Function von x_1 betrachtet, wird unendlich klein von der ersten Ordnung in dem Punkte $c_1^{(0)}$ und in denjenigen $\mu-1$ Punkten, in welchen die Function σ ausserdem noch denselben Werth $\sigma_{(c_1^{(0)})}$ annimmt. Diese Punkte, einschliesslich $c_1^{(0)}$, mögen bezeichnet werden mit:

$$\underset{(1)}{c_1^{(0)}} \quad \underset{(2)}{c_1^{(0)}} \quad \ldots \quad \underset{(\mu)}{c_1^{(0)}};$$

ferner wird P_1 unendlich gross von der ersten Ordnung in den μ Punkten, in welchen σ selbst unendlich wird, und die mit

$$\xi_0^{(1)} \quad \xi_0^{(2)} \quad \ldots \quad \xi_0^{(\mu)}$$

bezeichnet sein sollen. Dieselben Eigenschaften kommen der Function P_1 zu, wenn man resp. die x_2, x_3, $\ldots$ x_p als die Veränderlichen betrachtet. Untersuchen wir nun den ϑ-Quotienten:

$$Q^{(i)} = \frac{\vartheta\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}\left(\int_{\varepsilon}^{c_1^{(0)}(i)} du_h - \int_{c_1^{(0)}}^{x_1} du_h - \int_{c_2^{(0)}}^{x_2} du_h - \cdots - \int_{c_p^{(0)}}^{x_p} du_h\right)\right)}{\vartheta\left(\begin{matrix}p\\h\\1\end{matrix}\left(\int_{\varepsilon}^{\xi_0^{(i)}} du_h - \int_{c_1^{(0)}}^{x_1} du_h - \int_{c_2^{(0)}}^{x_2} du_h - \cdots - \int_{c_p^{(0)}}^{x_p} du_h\right)\right)}$$

als Function von x_1 in Bezug auf sein Verschwinden und unendlich Werden. Der Zähler dieses Quotienten verschwindet in dem Punkte $c_1^{(0)}_{(i)}$ und in $p-1$ anderen Punkten $\xi_2, \xi_3, \ldots \xi_p$, die man mittelst der Congruenz erhält:

$$\left(\sum_1^p h \left(2\int_{c_1^{(0)}}^{\varepsilon} du_h + \int_{c_2^{(0)}}^{x_2} du_h + \cdots + \int_{c_p^{(0)}}^{x_p} du_h + \int_{c_2^{(0)}}^{\xi_2} du_h + \int_{c_3^{(0)}}^{\xi_3} du_h + \cdots + \int_{c_p^{(0)}}^{\xi_p} du_h\right)\right) \equiv 0,$$

woraus, wie aus §. 5 (23.), geschlossen wird, dass die Punkte $\xi_2, \xi_3, \ldots \xi_p$ mit den $x_2, x_3, \ldots x_p$ durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpft sind. Der Nenner von $Q^{(i)}$ verschwindet demnach in dem Punkte $\xi_0^{(i)}$ und in denselben Punkten $\xi_2, \xi_3, \ldots \xi_p$, so dass $Q^{(i)}$ selbst, als Function von x_1 nur in dem Punkte $\xi_0^{(i)}$ unendlich gross, in $c_1^{(0)}_{(i)}$ unendlich klein von der ersten Ordnung wird. Genau dasselbe gilt, wenn man $x_2, x_3, \ldots x_p$ als Veränderliche betrachtet.

Lässt man x_1 über einen Querschnitt a hinübergehen, so bleibt $Q^{(i)}$ stetig, während $Q^{(i)}$ beim Ueberschreiten des Querschnitts b_ν den Factor erhält:

$$e^{2\int_{\xi_0^{(i)}}^{c_1^{(0)}_{(i)}} du_\nu},$$

wobei der Integrationsweg im Exponenten aus den beiden in den ϑ-Functionen von $Q^{(i)}$ enthaltenen zusammengesetzt ist. Dasselbe gilt für die Variablen $x_2, \ldots x_p$.

Das Product:

$$Q^{(1)} \cdot Q^{(2)} \cdot \ldots \cdot Q^{(\mu)}$$

wird also, als Function von jeder der Variablen $x_1, x_2, \ldots x_p$ in denselben Punkten Null und unendlich, wie die Function P_1, nimmt aber an dem Querschnitt b_ν den Factor an:

$$e^{2\sum_{i=1}^{i=\mu}\int_{\xi_0^{(i)}}^{c_1^{(0)}_{(i)}} du_\nu}.$$

Der Exponent ist hierin, nach dem *Abel*schen Theorem ein Vielfaches der Perioden, und der Einfachheit halber kann man voraussetzen, die Integrations-

wege $\int_{\varepsilon}^{c_1^{(i)}}$, $\int_{\varepsilon}^{\xi_0^{(i)}}$ seien so bestimmt, dass dieses Vielfache der Perioden gleich Null wird. (Sollte diese Voraussetzung nicht gemacht werden, so muss zu dem Product der $Q^{(i)}$ noch eine gewisse Exponentialfunction als Factor hinzugefügt werden.) Demnach ist das Product der $Q^{(i)}$ als Function von x_1 auch an den Querschnitten b_ν stetig, und ist daher eine rationale Function von z_{x_1}, s_{x_1}, ebenso auch von z_{x_2}, s_{x_2}; ... z_{x_p}, s_{x_p}. Diese Function wird aber in denselben Punkten Null und unendlich wie die Function P_1, und kann daher nur durch einen constanten, d. h. von allen x_1, x_2, ... x_p und mithin auch von v_1, v_2, ... v_p unabhängigen Factor von P_1 sich unterscheiden. Nennt man diesen Factor A_1, so ist:

$$P_1 = A_1 \prod_{i=1}^{i=\mu} \frac{\vartheta\begin{pmatrix} p \\ h \\ 1 \end{pmatrix}\left(v_h - \int_{\varepsilon}^{c_1^{(i)}} du_h\right)}{\vartheta\begin{pmatrix} p \\ h \\ 1 \end{pmatrix}\left(v_h - \int_{\varepsilon}^{\xi_0^{(i)}} du_h\right)}.$$

Den constanten Factor A_1 kann man dadurch bestimmen, dass man für v_1, v_2, ... v_p irgend welche speciellen Werthe einsetzt, zu denen die zugehörigen x_1, x_2, ... x_p bekannt sind. Die Werthe 0 sind dazu nicht geeignet, weil für $v_h = 0$ beide Seiten der obigen Gleichung verschwinden; wohl aber kann man ein beliebiges System halber Perioden für v_1, v_2, ... v_p setzen: k_1, k_2, ... k_p, zu denen sich, wie oben gezeigt wurde, die zugehörigen Punkte x_1, x_2, ... x_p, nämlich die früher mit c_1, c_2, ... c_p bezeichneten, auf algebraischem Wege bestimmen lassen. Man erhält auf diese Weise, indem man auf die Functionen P_2, P_3, ... P_p dieselben Betrachtungen anwendet, das nachstehende System von Formeln, in welchem die vollständige Lösung des Problems der Umkehrung enthalten ist. Zur Abkürzung soll die Bezeichnung gebraucht werden:

$$\chi(\sigma) = (\sigma - \sigma_{(c_1)})(\sigma - \sigma_{(c_2)}) \ldots (\sigma - \sigma_{(c_p)}),$$

$$\chi_0(\sigma) = (\sigma - \sigma_{(c_1^{(0)})})(\sigma - \sigma_{(c_2^{(0)})}) \ldots (\sigma - \sigma_{(c_p^{(0)})}).$$

Alsdann ergiebt sich:

$$P_1 = \frac{\chi(\sigma_{(c_1^{(0)})})}{\chi_0'(\sigma_{(c_1^{(0)})})} \prod_{i=1}^{i=\mu} \frac{\vartheta\begin{pmatrix} p \\ h \\ 1 \end{pmatrix}\left(v_h - \int_{\varepsilon}^{c_1^{(0)}} {}_{(i)}\, du_h\right) \vartheta\begin{pmatrix} p \\ h \\ 1 \end{pmatrix}\left(k_h - \int_{\varepsilon}^{\xi_0^{(i)}} du_h\right)}{\vartheta\begin{pmatrix} p \\ h \\ 1 \end{pmatrix}\left(v_h - \int_{\varepsilon}^{\xi_0^{(i)}} du_h\right) \vartheta\begin{pmatrix} p \\ h \\ 1 \end{pmatrix}\left(k_h - \int_{\varepsilon}^{c_1^{(0)}} {}_{(i)}\, du_h\right)},$$

$$P_2 = \frac{\chi(\sigma_{(c_2^{(0)})})}{\chi_0'(\sigma_{(c_2^{(0)})})} \prod_{i=1}^{i=\mu} \frac{\vartheta\begin{pmatrix} p \\ h \\ 1 \end{pmatrix}\left(v_h - \int_{\varepsilon}^{c_2^{(0)}} {}_{(i)}\, du_h\right) \vartheta\begin{pmatrix} p \\ h \\ 1 \end{pmatrix}\left(k_h - \int_{\varepsilon}^{\xi_0^{(i)}} du_h\right)}{\vartheta\begin{pmatrix} p \\ h \\ 1 \end{pmatrix}\left(v_h - \int_{\varepsilon}^{\xi_0^{(i)}} du_h\right) \vartheta\begin{pmatrix} p \\ h \\ 1 \end{pmatrix}\left(k_h - \int_{\varepsilon}^{c_2^{(0)}} {}_{(i)}\, du_h\right)},$$

. . . . . .

$$P_p = \frac{\chi(\sigma_{(c_p^{(0)})})}{\chi_0'(\sigma_{(c_p^{(0)})})} \prod_{i=1}^{i=\mu} \frac{\vartheta\begin{pmatrix} p \\ h \\ 1 \end{pmatrix}\left(v_h - \int_{\varepsilon}^{c_p^{(0)}} {}_{(i)}\, du_h\right) \vartheta\begin{pmatrix} p \\ h \\ 1 \end{pmatrix}\left(k_h - \int_{\varepsilon}^{\xi_0^{(i)}} du_h\right)}{\vartheta\begin{pmatrix} p \\ h \\ 1 \end{pmatrix}\left(v_h - \int_{\varepsilon}^{\xi_0^{(i)}} du_h\right) \vartheta\begin{pmatrix} p \\ h \\ 1 \end{pmatrix}\left(k_h - \int_{\varepsilon}^{c_p^{(0)}} {}_{(i)}\, du_h\right)}.$$

Heidelberg, im Mai 1869.

Ueber eine Darstellung des Imaginären in der Geometrie.

(Von Herrn *S. Lie* in Christiania.)

Cap. 1.

§. 1. Der Imaginär-Punkt.

Es seien Z und X complexe Variabeln

$$Z = z + pi, \qquad X = x + yi.$$

Ich betrachte x y z als die Raumcoordinaten eines Punktes, p als das Gewicht desselben. Der Imaginär-Punkt (ZX) hat folglich eine gewisse Lage im Raume und ein gewisses Gewicht. Wenn $p=0$ ist, nenne ich den Punkt einen Null-punkt. Die Cartesische Plangeometrie betrachtet nur den Fall, wo sowohl p als y gleich Null sind.

Anm. 1. Die geometrische Bedeutung von p wird in den folgenden Paragraphen dargethan werden.

Anm. 2. Ich supponire das Coordinatensystem orthogonal, die xy-Ebene horizontal, die positive x-Axe gegen Süden gerichtet; die Wörter Höhe und Azimuth verstehen sich damit von selbst. Ich rede von einer positiven Rotation um eine verticale Axe.

§. 2. Die Imaginär-Curve.

Es sei $F(ZX) = 0$ eine Relation zwischen Z und X mit complexen Coefficienten. Jedes System (ZX), welches der Gleichung genügt, definirt einen Imaginär-Punkt. Das Ensemble derselben constituirt die Imaginärcurve. Ihre sinnliche Repräsentation ist eine gestreifte Fläche. Die Streifen sind von Punkten desselben Gewichtes constituirt. Die Nullpunkte der Imaginär-curve bilden eine continuirliche Linie, den Nullstreifen.

Die gemeinschaftlichen Imaginär-Punkte zweier Imaginär-Curven werden von denjenigen Systemen (ZX) bestimmt, welche den Gleichungen beider genügen. Sie sind auf dem Durchschnitte der repräsentirenden Flächen gelegen.

§. 3. Die Imaginär-Gerade.

Die Imaginär Gerade ist durch eine lineäre Relation definirt:

$$BZ = X - A \quad | \quad B = b_1 + b_2 i;\ A = a_1 + a_2 i.$$

Die complexe Gleichung löst sich in zwei reelle auf *)

$$b_1 z - b_2 p = x - a_1,$$
$$b_2 z + b_1 p = y - a_2.$$

Durch Elimination ergiebt sich das äquivalente System

$$(b_1^2 + b_2^2) z = b_1 (x - a_1) + b_2 (y - a_2), \quad | \quad U = 0,$$
$$(b_1^2 + b_2^2) p = b_1 (y - a_2) - b_2 (x - a_1). \quad | \quad V = 0.$$

$U = 0$ definirt die Lage der I-Punkte **) der I-Geraden. Sie sind in einer Ebene. Wenn p variirt, definirt $V = 0$ parallele Verticalebenen, welche die horizontale Spur von U orthogonal schneiden (Fig. 1). Die Streifen von U sind folglich parallele Gerade (die Linien der grössten Neigung der Ebene U).

Wenn h die gemeinschaftliche Höhe ***) der Streifen und d die Entfernung eines I-Punktes von der Null-Linie ist, ergiebt sich

$$p = d . \operatorname{tg} h.$$

p ist positiv für einen Punkt, wenn die aufsteigende Richtung der Null-Linie, horizontal projicirt, um die Verticale des Punktes eine positive Rotation bestimmt.

Man bemerke die Eigenschaft der speciellen Formen $X = \text{Const.}$, $Z = \text{Const.}$

$Z = 0$ definirt, was ich die I-Grundlinie nenne.

Die I-Gerade ($BZ = X - A$) schneidet die I-Grundlinie in dem Punkte $Z = 0$, $X = A$.

A ist folglich die complexe Grösse, die durch die Gerade in der xy-Ebene vom Coordinaten-Anfang zum Durchschnitt mit der Null-Linie repräsentirt wird.

---

*) Für $p = 0$ ergeben sich die Gleichungen der Nullgeraden

$$b_1 z = x - a_1,$$
$$b_2 z = y - a_2;$$

b_1, b_2, a_1, a_2 sind folglich Strahlen-Coordinaten der Nullgeraden (*Plücker*, neue Geometrie des Raumes 1868 p. 1).

**) Ich schreibe der Kürze willen I-Punkt, I-Gerade für Imaginär-Punkt, Imaginär-Gerade.

***) D. h. der Neigungswinkel gegen die Horizontalebene.

Wenn man $Z = 1 (z = 1, p = 0)$ setzt in der Gleichung $BZ = X - A$, so findet sich

$$B = X - A.$$

B bezeichnet folglich in Grösse und Richtung die horizontale Projection einer Strecke des Nullstreifens, die von den horizontalen Ebenen $z = 0$, $z = 1$, begrenzt wird.

A und B definiren folglich unmittelbar die Nullgerade. Sie sind die Coordinaten der I-Geraden.

Terminologie. Die Wörter: Punkt, Linie, Ebene ... benutze ich in gewöhnlicher Bedeutung. I-Gerade, I-Curve bezeichnen gestreifte Flächen. Es seien $P, P_1, P_2, P_3 \ldots$ I-Punkte. Ich rede von den I-Geraden PP_1, PP_2, PP_3, ..., die ich der Kürze willen L_1, L_2, L_3, ... nenne. Ihre Null-Geraden sind $l_1, l_2, l_3, \ldots$; ihre Coordinaten $(A_1 B_1)$, $(A_2 B_2)$, $(A_3 B_3) \ldots$ In Analogie damit nenne ich die Coordinaten der I-Punkte P, P_1, P_2, ... (ZX), $(Z_1 X_1)$, $(Z_2 X_2)$. (Der ausgezeichnete Streifen ist in Fig. 1 und 2 die Nullgerade.)

§. 4. I-Gerade, die durch einen gegebenen I-Punkt gehen.

Wenn wir in der Gleichung $BZ = X - A$ die Grössen Z und X als constant, B und A als variabel betrachten, so definirt die Gleichung die I-Geraden, die durch den I-Punkt (XZ) gehen.

Ich denke mir um den Punkt (xyz) eine Ebene rotirend; jeder Lage derselben entspricht eine bestimmte Streifung, eine bestimmte Null-Gerade (Fig. 2). Die Null-Geraden constituiren eine Linien-Congruenz von besonderer Art, definirt durch die Gleichung

$$p = d . \operatorname{tg} h;$$

$(x y z)$ ist das Centrum, die verticale Gerade durch $(x y z)$ die Axe der Congruenz.

Der wesentliche Charakter dieser Congruenz ist, dass die Geraden derselben in horizontalen Ebenen ähnliche Figuren bestimmen.

Wenn man in der xy-Ebene Punkte wählt, die einen Kreis bilden, constituiren die entsprechenden Geraden einer solchen Congruenz ein einfaches Hyperboloid mit horizontalem Kreisschnitte *).

---

*) Die Directricen unserer Linien-Congruenz sind nach den unendlich entfernten imaginären Kreispunkten gerichtet. $p\sqrt{-1}$ ist die Constante derselben (S. p. 10 des obengenannten Werkes).

Umgekehrt: Die Generatricen des einen Systems eines solchen Hyperboloids können immer als Null-Gerade von I-Geraden durch denselben I-Punkt betrachtet werden.

Die zwei Systeme von Generatricen entsprechen verschiedenen I-Punkten.

Unter der Congruenz P verstehe ich die Congruenz der Null-Geraden von denjenigen I-Geraden, die durch den I-Punkt P gehen.

Die I-Gerade PP_1 ist die I-Gerade, die sowohl durch P als durch P_1 geht.

Die Null-Gerade von der I-Geraden PP_1 ist die gemeinschaftliche Gerade der zwei Congruenzen P und P_1.

§. 5. Die I-Curve von n-tem Grade.

Es sei $F_n(ZX) = 0$ eine Relation von n-tem Grade zwischen Z und X. Die Gleichung löst sich in zwei reelle auf

$$F_n(zpxy) = 0, \qquad F_n'(zpxy) = 0.$$

Durch Elimination ergiebt sich

$$f_{n^2}(zxy) = U = 0, \qquad f_{n^2}'(pxy) = V = 0.$$

$U = 0$ definirt eine algebraische Fläche vom Grade n^2. Dies ist der geometrische Ort von den I-Punkten der I-Curve. $V = 0$ definirt eine Familie verticaler Cylinder, die U orthogonal schneiden. Die Streifen sind folglich *die Linien der grössten Neigung* der Fläche U.

I-Tangente. Die gestreifte Ebene der I-Tangente berührt die Fläche U. Im Berührungspunkte sind Gewicht und Streifenrichtung dieselben.

§. 6. Complexe geometrische Grössen.

$\sqrt{(Z_1 - Z_2)^2 + (X_1 - X_2)^2}$ nenne ich wie gewöhnlich die Entfernung der zwei I-Punkte P_1 und P_2. Die Gleichung

$$P_1P_2 = P_3P_4$$

löst sich in zwei reelle auf. Es müssen folglich zwei geometrische Bedingungen stattfinden. Nur in besonderen Fällen ist die Gleichheit in gewöhnlicher Bedeutung der entsprechenden Längen die eine derselben.

$\frac{B_1 - B_2}{1 + B_1B_2}$ nenne ich wie gewöhnlich $\operatorname{tg}(L_1L_2)$.

Die Gleichung $\operatorname{tg}(L_1L_2) = 0$ giebt $B_1 = B_2$; folglich sind die entsprechen-

den Nullgeraden parallele ($l_1 \neq l_2$). Die Gleichung $\operatorname{tg}(L_1 L_2) = \infty$ giebt $1 + B_1 B_2 = 0$, d. h. die zwei Nullgeraden haben supplementäre Azimuth, complementäre Höhen.

Ebenso werden die anderen Grössenbegriffe generalisirt.

Auch die Ueberführung anderer Begriffe von der Ebene zum Raume wird aus unserer Theorie resultiren.

§. 7. Allgemeine Betrachtung.

Ein geometrischer Satz kann gewöhnlich algebraisch aufgefasst werden als ausdrückend, dass die Gleichheit gewisser Grössen die Consequenz gegebener Gleichheiten sei.

Die Sätze der ebenen Geometrie, die nicht durch die Algebra hergeleitet werden können, sind in unserer Theorie leicht zu verificiren.

Weil die Algebra das Imaginäre umfasst, ist einleuchtend, dass jeder plangeometrische Satz (den man algebraisch aussprechen kann) von unseren Imaginär-Dingen gilt.

Man kann daher allgemein aussprechen:

Jeder plangeometrische Satz ist ein besonderer Fall eines stereometrischen Doppelsatzes in der Geometrie der Liniencongruenzen.

§. 8. Anharmonische Function.

Die anharmonische Function von vier I-Geraden $(L_1 L_2 L_3 L_4)$, die durch einen I-Punkt P gehen, ist

$$\frac{A_1 - A_3}{A_1 - A_4} : \frac{A_2 - A_3}{A_2 - A_4}.$$

Man hat ein Viereck in der Grundebene zu betrachten. Der Modul dieser Function ist das Verhältniss der Producte der entgegengesetzten Seiten. Die Amplitude ist die Summe zweier entgegengesetzten Winkel.

Die Bedingung der Realität ist, dass die vier Punkte $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$ auf einem Kreise liegen. Ein besonderer Fall ist, dass die vier Punkte auf einer Geraden liegen.

Wenn $l_1 l_2 l_3 l_4$ in derselben Ebene gelegen sind, gilt die Gleichung

$$(L_1 L_2 L_3 L_4) = (l_1 l_2 l_3 l_4).$$

(Im entgegengesetzten Falle hat $(l_1 l_2 l_3 l_4)$ keine Bedeutung.)

Die anharmonische Function von vier Punkten $(P_1 P_2 P_3 P_4)$ derselben

I-Geraden ist

$$\frac{X_1-X_3}{X_1-X_4} : \frac{X_2-X_3}{X_2-X_4}.$$

Man hat folglich ein Viereck in der Grundebene zu betrachten.

$L_1\ L_2\ L_3\ L_4$ seien durch die I-Gerade L (deren Nullgerade ich mit ζ bezeichne) geschnitten. Ich nehme an, dass ζ die Nullgeraden $l_1\ l_2\ l_3\ l_4$ in den vier Punkten $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3\ \lambda_4$ schneide. Dann gilt die Gleichung

$$L(L_1 L_2 L_3 L_4) = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4).$$

Cap. 2.

§. 9. Der Kreisradius trifft die Tangente orthogonal.

Wir betrachten nur die Null-Linie des I-Kreises $[Z^2+X^2 = A_1+A_2 i]$; wir erhalten den stereometrischen Satz:

Radius Vector vom Coordinatenanfange zu einem beliebigen Punkte der Raumcurve $[z^2+x^2-y^2=A_1, 2xy=A_2]$ und die Tangente in demselben Punkte haben supplementäre Azimuth, complementäre Höhen.

§. 10. Anharmonische Sätze.

a) Vier Gerade $L_1\ L_2\ L_3\ L_4$ (Fig. 3), die durch denselben Punkt P gehen, bestimmen auf einer beliebigen Geraden ein constantes anharmonisches Verhältniss.

b) Es seien $l_1\ l_2\ l_3\ l_4$ (Fig. 4) vier Generatricen des einen Systems eines einfachen Hyperboloids mit horizontalem Kreisschnitte. Die entsprechenden I-Geraden $L_1\ L_2\ L_3\ L_4$ gehen durch einen I-Punkt P. Es sei ζ eine variable Generatrix des anderen Systems, L die entsprechende I-Gerade. ζ schneidet $l_1\ l_2\ l_3\ l_4$ in den Punkten $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3\ \lambda_4$.

Wie wir wissen, ist

$$L(L_1 L_2 L_3 L_4) = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4);$$

die linke Seite ist constant nach dem Euklidischen Satze; folglich auch die rechte. Dies ist der bekannte Satz von den vier Generatricen einer Linienfläche zweiten Grades.

§. 11. Imaginärer Kegelschnitt. Imaginärer Kreis mit reellem Radius.

a. Es seien $P_1\ P_2\ P_3\ P_4$ (Fig. 5) vier feste Punkte, P ein variabler Punkt eines Kegelschnitts. Man hat die Gleichung

$$P(P_1P_2P_3P_4) = \text{Const.}$$

b. Es seien $P\ P_1\ P_2\ P_3\ P_4$ I-Punkte eines I-Kegelschnitts (Fig. 6). Das Viereck $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$ ist zwei Bedingungen unterworfen.

c. Wir betrachten etwas näher den I-Kreis $Z^2+X^2=M_1^2$ [wo M_1 reell ist]. Die Gleichungen des Nullstreifens sind

$$z^2+x^2-y^2 = M_1^2,$$
$$xy = 0.$$

Die Null-Linie hat zwei ebene Zweige *) (Fig. 7)

$$z^2+x^2=M_1^2,\quad y=0. \qquad \Big|\qquad z^2-y^2=M_1^2,\quad x=0.$$

Wir nehmen die vier festen Punkte auf dem einen ebenen Zweige.

Weil wir auch P auf demselben ebenen Zweige wählen können, muss diese constante anharmonische Function $P(P_1P_2P_3P_4)$ reell sein. Folglich sind $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$ auf einem Kreise, $l_1\ l_2\ l_3\ l_4$ sind Generatricen eines einfachen Hyperboloids mit horizontalem Kreisschnitte. Wenn P_4 die Null-Linie durchläuft, beschreibt A_4 zwei Kreise, l_4 zwei Hyperboloide mit horizontalem Kreisschnitte.

Einfache Consequenz. *Jeder Punkt der Raumcurve* $[z^2+x^2-y^2=M_1^2,\ xy=0]$ *projicirt dieselbe in der xy-Ebene in Kreis und Gerade.*

§. 12. Homographie.

Es sei eine Homographie durch die Gleichungen

$$X' = \frac{AX+BZ+C}{DX+EZ+F};\qquad Z' = \frac{GX+HZ+K}{DZ+EZ+F}$$

festgestellt **). Wir fordern, dass die Nullpunkte einander entsprechen; dann

---

*) Siehe *Hamilton,* Lectures on quaternions p. 685, wo sich derselbe so ausdrückt: of which the consideration has presented itself to some former writers in connexion with modes of interpreting certain results respecting the ordinary $\sqrt{-1}$.

In seiner Géométrie supérieure betrachtet *Chasles* den I-Kreis $Z^2+X^2=-R^2$, dessen Nullstreifen in der vorliegenden Theorie durch die Gleichungen $z^2-y^2=-R^2$, $x=0$ definirt wird. Den Scheitel dieser Hyperbel betrachtet *Chasles* als Repräsentant des I-Kreises.

**) S. *Chasles,* Géométrie supérieure, Chap. XXV, p. 362.

muss P' auf einer Fläche U', P auf U sein (U und U' sind Linienflächen zweiten Grades).

Punkten einer U-Generatrix entsprechen wie in der gewöhnlichen räumlichen Homographie Punkte einer U'-Generatrix.

Dagegen. *Einer ebenen U'-Curve* (Fig. 8) *entspricht gewöhnlich eine U-Curve dritter Ordnung* (Fig. 9).

$P(P_1P_2P_3P_4) = P'(P_1'P_2'P_3'P_4')$ = einer reellen Constante. Folglich liegen $A_1A_2A_3A_4$ auf demselben Kreise.

Jeder Punkt der Raum-Curve projicirt dieselbe in der Grundebene in Kreise.

Es sei eine gewöhnliche Involution oder Homographie zwischen den Punkten der ebenen U'-Curve festgestellt. Hierbei erlangt man eine interessante Involution oder Homographie auf der Raum-Curve *).

Man hätte unmittelbar eine Homographie zwischen den I-Punkten eines I-Kegelschnitts aufstellen können. Gewöhnlich würde man hierdurch nicht eine Homographie zwischen Nullpunkten erlangen.

Es sei eine Involution auf der Raum-Curve aufgestellt; m und m' seien correspondirende Punkte. Dann liegt die Gerade mm' auf einem Hyperboloide mit horizontalem Kreisschnitte.

---

*) S. *Chasles,* Sections coniques, Chap. VIII, p. 147.

Christiania, Februar 1869.

Zur Integration der gleichzeitigen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

(Notiz von Herrn *F. E. Prym* in Würzburg.)

Mit der Integration des obigen Systems von Differentialgleichungen, unter Zugrundelegung von charakteristischen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen, beschäftigen sich die beiden Arbeiten von *Riemann*: „*Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse 1851*“ und „*Theorie der Abelschen Functionen 1857*“. Die in der erstern Arbeit begonnenen Untersuchungen über die Integration des obigen Systems hat *Riemann* in der zweiten Arbeit ausgedehnt auf eine allenthalben $n$blättrige, zusammenhangende, unbegrenzte, geschlossene Fläche T mit einer endlichen Anzahl beliebig gelegener Verzweigungspunkte, aus der mit Hülfe von $2p$ Querschnitten eine einfach zusammenhangende Fläche T' gebildet wird. Als ein grossartiges Resultat dieser letzteren Untersuchungen ergab sich die Erkenntniss, dass zu jeder graphisch willkürlich gewählten Fläche T immer eine Gruppe sogenannter *Abel*scher, in der Fläche T' oder T'' (s. w. u. art. 2) einwerthiger Integrale existirt, und ferner, dass eben diese *Abel*schen Integrale solche Functionen $u+vi$ von x und y sind, dass dieselben durch die Bedingung, den obigen Differentialgleichungen zu genügen, und durch passend gewählte, von einander unabhängige Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen vollständig bestimmt werden können.

Nach diesen Entdeckungen *Riemann*s lag es nahe, einen weitern Fortschritt in der Functionenlehre von der Theorie der partiellen Differentialgleichungen aus, als dem Centrum der bisherigen Untersuchungen, zu erwarten. Gelänge es, das obige System unter Zugrundelegung neuer charakteristischer Grenzbedingungen zu integriren, so würde das Resultat die Entdeckung und die Erkenntniss neuer Gruppen von Functionen der complexen Variable $x+yi$ sein. Dass dieser Versuch bis jetzt nicht gemacht wurde, mag theilweise wohl seinen Grund haben in gewissen, der jüngsten Zeit angehörigen Bestrebungen, die einfachen, weil naturgemässen Methoden *Riemann*s durch com-

plicirte, vielfachen Ausnahmefällen unterworfene, algebraische zu ersetzen. Dadurch traten andere Probleme in den Vordergrund, die von der ursprünglichen, von *Riemann* eingeschlagenen Richtung nur zu frühe abzulenken geeignet waren. Ein Versuch von *Roch* in der Arbeit: „*De theoremate quodam circa functiones abelianas 1863*“: die obigen Differentialgleichungen unter Fixirung neuer Grenzbedingungen zu behandeln, muss als verfehlt betrachtet werden, da namentlich nothwendige Relationen zwischen den in die Grenzbedingungen einzuführenden Constanten übersehen wurden: doch lässt sich auch dieser Fall noch mit Hülfe der von *Riemann* geschaffenen Methoden vollständig behandeln.

Betrachtet man nun genauer die bis jetzt bekannten Fälle, in denen es gelungen ist, das obige System von Differentialgleichungen zu integriren, so erkennt man leicht, dass in jedem dieser Fälle die Grenzbedingungen so gewählt sind, dass die Lösung der Aufgabe von der Integration einer einzigen partiellen Differentialgleichung, der Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, abhängig gemacht werden kann, und dass diese Erscheinung darin ihren Grund hat, dass die Grenzbedingungen u allein enthalten. In Folge dessen erscheint die Function u für sich bestimmbar, und nachdem u gefunden, lässt sich in jedem Falle die zugehörige Function v durch ein einfaches, u enthaltendes Integral ausdrücken. Man erkennt weiter, dass es unmöglich ist, auf diese einfache Form das Problem zu reduciren, wenn die Grenzbedingungen u und v untrennbar enthalten, und auch, dass die von *Riemann* angewandten Methoden für die Behandlung solcher Fälle nicht mehr ausreichen.

Mehrjährige Untersuchungen auf dem Gebiete der Functionenlehre, die jetzt vollständig abgeschlossen vor mir liegen und in ihrer Gesammtheit in kurzer Zeit veröffentlicht werden sollen, haben mich nun in den Stand gesetzt, unter Anwendung neuer Methoden das obige System von Differentialgleichungen auch in solchen Fällen zu integriren, wo die Grenzbedingungen u und v untrennbar enthalten. Die folgende kurze Notiz hat den Zweck, vorläufig nur ein Resultat dieser meiner Untersuchungen zur allgemeinen Kenntniss zu bringen, das mir aus dem Grunde schon jetzt einer Mittheilung nicht unwerth erscheint, weil es zeigt, dass die, zu jeder Fläche T existirenden sogenannten *Abel*schen Integrale, deren Verhalten an der Begrenzung der aus T zu bildenden Fläche T' oder T'' dadurch charakterisirt ist, dass sie, in T' oder T'' einwerthig, beim Ueberschreiten der Querschnitte um Constante, Periodicitätsmodulen ge-

nannt, zunehmen, nur specielle Fälle sind aus einer grossen Klasse allgemeinerer Functionen $u+vi$ der complexen Variable $x+yi$, die ebenfalls wie die sogenannten *Abel*schen Integrale, in T' oder T'' einwerthig, durch von einander unabhängige Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen vollständig bestimmt werden können, und deren Verhalten an der Begrenzung der Fläche T' oder T'' sich kurz dahin charakterisiren lässt, dass sie beim Ueberschreiten der Querschnitte in lineare Ausdrücke von sich selbst übergehen.

1.

Die complexe Grösse $z = x+yi$ denke man sich nach der *Gauss*schen Methode vertreten durch den Punkt einer unbegrenzten, im Unendlichen geschlossenen Ebene, dessen rechtwinklige Coordinaten x, y sind. In dieser Z-Ebene denke man sich eine allenthalben $n$fach ausgebreitete, unbegrenzte, im Unendlichen als geschlossen zu betrachtende, zusammenhangende Fläche T mit einer endlichen Anzahl beliebig gelegener Verzweigungspunkte graphisch willkürlich angenommen. Einem jeden Punkte der Fläche T entspricht dann ein und nur ein Werthepaar x, y; umgekehrt aber entsprechen jedem Werthepaare x, y im allgemeinen n übereinanderliegende Punkte der Fläche T, und zwar einer in jedem Blatte. Ist w die Anzahl der einfachen Verzweigungspunkte dieser $n$blättrigen, unbegrenzten, geschlossenen Fläche, $2p+1$ die Zahl, die den Zusammenhang der Fläche angiebt, so hat man stets $w = 2(p+n-1)$, $2p = w-2n+2$ (cf. *Riemann A. F. 7. pag. 29*). Der specielle Fall $w = 2n-2$, $p = 0$ bleibe im Folgenden ausgeschlossen. Die $\overline{2p+1}$fach zusammenhangende Fläche T kann dann auf die verschiedensten Weisen durch $2p$ Querschnitte in eine einfach zusammenhangende Fläche T' zerlegt werden. Als die, für die weiteren Betrachtungen passendste Zerschneidung hat sich die folgende ergeben.

Man zerlege zunächst in der Weise, wie es *Riemann (A. F. 19. pag. 43)* angegeben, die Fläche T in eine einfach zusammenhangende durch ein, mit all seinen Theilen im Endlichen liegendes Schnittnetz, welches aus p Paaren von zwei, in einem und demselben Punkte anfangenden und endenden Schnitten a_1, b_1; ...; a_ν, b_ν; ...; a_p, b_p besteht und aus $p-1$ Schnitten c_1, c_2, ..., c_{p-1}, welche die einzelnen Paare in der Weise verbinden, dass allgemein c_ν von einem Punkte von b_ν nach einem Punkte von $a_{\nu+1}$ geht. Betrachtet man die

beiden Seiten eines jeden Schnittes a, b, c als zur Begrenzung der, durch diese Zerschneidung aus T entstandenen einfach zusammenhangenden Fläche gehörig, so besteht diese Begrenzung aus *einem* Stücke, und dieselbe wird positiv durchlaufen, wenn dabei in jedem Punkte die Richtung des Fortschreitens zu der Richtung der nach dem Innern des anstossenden Flächentheiles ziehbaren Normale in derselben Beziehung steht wie die Richtung der X-Axe zur Richtung der Y-Axe. Diese Richtung markire man längs dêr Begrenzung durch Pfeile. Bei den Schnitten a, b unterscheide man eine positive und negative Seite, und zwar wähle man die Bezeichnung so, dass man, auf der positiven Seite von a_ν in der Richtung der Pfeile (ohne Rücksicht auf den etwa einmündenden Schnitt $c_{\nu-1}$) sich fortbewegend, von der negativen Seite von b_ν auf die positive Seite von b_ν geführt wird: und folglich, auf der positiven Seite von b_ν in der Richtung der Pfeile (ohne Rücksicht auf den etwa einmündenden Schnitt c_ν) sich fortbewegend, von der positiven Seite von a_ν auf die negative Seite von a_ν gelangt. Dies ist stets ausführbar, und man kann immer, entweder bei a_ν oder bei b_ν zuerst die Bezeichnung willkürlich wählen.

Man nehme dann die $p-1$ Schnitte $c_1, c_2, \ldots, c_{p-1}$ weg und ersetze sie durch p neue Schnittlinien $c_1, c_2, \ldots, c_p$, die man von einem willkürlich gewählten, im Endlichen liegenden Punkte π der Fläche in der Weise zieht, dass allgemein c_ν vom Punkte π nach dem gemeinschaftlichen Anfangs- und Endpunkte der Schnitte a_ν, b_ν führt und dort auf der positiven Seite von a_ν wie von b_ν mündet. Die Linie c_ν soll während ihres Laufes weder sich selbst, noch irgend eine andere der Linien a, b, c schneiden oder berühren. Beide Seiten eines Schnittes c_ν betrachte man als zur Begrenzung gehörig, und bezeichne allgemein bei dem Schnitte c_ν, vom Punkte π aus gesehen, die rechte Seite als positive, die linke als negative. Bei dieser Art der Bezeichnung führt ein Durchlaufen des, von den beiden Seiten der Schnitte a_ν und b_ν gebildeten Theiles der Begrenzung in der Richtung der Pfeile stets von der negativen Seite des Schnittes c_ν auf die positive Seite von c_ν. Die Schnitte a, b bilden dann mit diesen Schnitten $c_1, c_2, \ldots, c_p$ auch ein Schnittnetz, welches die $\overline{2p+1}$fach zusammenhangende Fläche T in eine einfach zusammenhangende Fläche zerlegt. Diese Art der Zerschneidung soll den folgenden Betrachtungen zu Grunde gelegt, und die dadurch aus T entstehende, von den beiden Seiten der Schnitte a, b, c begrenzte, einfach zusammenhangende Fläche fortan als Fläche T' bezeichnet werden. Es erscheint nicht überflüssig, zu bemerken, dass man dieses neue Schnittnetz aus dem ursprünglichen auch durch einfache

Dehnungen der Schnitte $c_1, c_2, \ldots, c_{p-1}$, verbunden mit Verschiebungen ihrer Mündungspunkte auf den Schnitten a, b erhalten kann.

2.

In der Fläche T' fixire man beliebig r Punkte $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\varrho, \ldots, \varepsilon_r$, und bilde aus der Fläche T' eine neue Fläche, indem man von dem früher angenommenen Punkte π, in welchem die sämmtlichen Schnitte c zusammenstossen, durch das Innere der Fläche T' r, einander und auch sich selbst nicht schneidende Linien l nach den r Punkten ε zieht, allgemein nach ε_ϱ die Linie l_ϱ. Eine jede solche Linie l_ϱ fasse man als einen Schnitt in der Fläche T' auf, und bezeichne, vom Punkte π aus gesehen, die rechte Seite eines solchen Schnittes als positive, die linke als negative. Die auf diese Weise, durch Einführung der r Schnitte l aus der Fläche T' entstehende, von den beiden Seiten der Schnitte a, b, c, l begrenzte, einfach zusammenhangende Fläche bezeichne man als Fläche T''. In der Begrenzung dieser Fläche T'' nenne man entsprechende Punkte überhaupt je zwei, denen dasselbe Coordinatenpaar x, y zukommt, und die sich nur dadurch unterscheiden, dass der eine auf der positiven, der andere auf der negativen Seite eines Schnittes a, b, c oder l liegt.

Bezeichnet man die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes ε_ϱ in Bezug auf das gewählte Axensystem durch x_ϱ, y_ϱ, setzt $x_\varrho + y_\varrho i = z_\varrho$, und versteht unter r_ϱ entweder den Ausdruck $z - z_\varrho$, oder den Ausdruck $(z-z_\varrho)^{\frac{1}{\nu}}$, oder den Ausdruck $\frac{1}{z}$, oder endlich den Ausdruck $\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{\nu}}$, jenachdem der Punkt ε_ϱ entweder im Endlichen liegt und kein Verzweigungspunkt ist, oder im Endlichen liegt und ein $\overline{\nu-1}$facher Verzweigungspunkt ist, oder im Unendlichen liegt und kein Verzweigungspunkt ist, oder endlich im Unendlichen liegt und ein $\overline{\nu-1}$facher Verzweigungspunkt ist: so wird r_ϱ in der Umgebung des Punktes ε_ϱ eine einwerthige und stetige Function des Ortes sein, die im Punkte ε_ϱ unendlich klein von der ersten Ordnung (0^1) wird *(R. A. F. 2. pag. 17)*. Bezeichnet man dann ferner durch $\varphi_\varrho(r_\varrho)$ einen endlichen Ausdruck von der Form

$$\varphi_\varrho(r_\varrho) = L_\varrho l n r_\varrho + L_\varrho^{(1)} \frac{1}{r_\varrho} + L_\varrho^{(2)} \frac{1}{r_\varrho^2} + \cdots,$$

wo L_ϱ, $L_\varrho^{(1)}$, $L_\varrho^{(2)}$, ... willkürliche Constante bedeuten, die auch theilweise den Werth Null haben können, so wird die Function $\varphi_\varrho(r_\varrho)$ in der Umgebung

des Punktes ε_ϱ, wenn z den Schnitt l_ϱ nicht überschreitet, einwerthig sein, im Punkte ε_ϱ unstetig werden in der, durch den Ausdruck φ bestimmten Art, und in den Punkten auf der positiven Seite des, in die Umgebung des Punktes ε_ϱ hineinfallenden Stückes des Schnittes l_ϱ um die Constante $-2\pi i L_\varrho$ grösser sein als in den entsprechenden Punkten auf der negativen Seite. Einem jeden der r Punkte ε_ϱ ordne man nun eine solche Function $\varphi_\varrho(r_\varrho)$ zu, ohne damit etwa später zu treffenden Bestimmungen über die Constanten L vorzugreifen.

3.

Nach diesen Vorbereitungen lässt sich das, in der Einleitung erwähnte Resultat folgendermassen aussprechen:

„Nimmt man, den $2p$ Schnitten a_ν, b_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$ entsprechend, $2p$ constante Grössen A_ν, B_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$, die sämmtlich den Modul 1 besitzen, willkürlich an: nennt, mit Rücksicht auf Folgendes, A_ν, B_ν ein Factorenpaar der ersten Art, wenn nicht beide Grössen A_ν, B_ν den Werth 1 haben, dagegen ein Factorenpaar der zweiten Art, wenn beide Grössen gleich 1 sind: nimmt ferner zu jedem Factorenpaare A_ν, B_ν eine Grösse Δ_ν an: deren Werth beliebig gewählt werden darf, wenn A_ν, B_ν ein Factorenpaar der ersten Art ist, deren Werth dagegen Null sein soll, wenn A_ν, B_ν ein Factorenpaar der zweiten Art ist: nimmt endlich, sooft für einen Index ν die drei Grössen A_ν, B_ν, Δ_ν die Werthe 1, 1, 0 resp. haben, noch eine vierte Grösse Δ'_ν willkürlich an, und legt den r, in den oben angenommenen Ausdrücken $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ vorkommenden Constanten $L_1, L_2, \ldots, L_r$ solche Werthe zu, dass der Gleichung

$$2\pi i \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} L_\varrho = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \Delta_\nu$$

Genüge geleistet wird, während die Werthe der noch übrigen Constanten in den Ausdrücken φ keinen Beschränkungen unterliegen sollen und vollständig willkürlich gewählt werden mögen; so existirt zu der Fläche T'' immer eine complexe Function $u+vi$ der Coordinaten x, y mit folgenden Eigenschaften:

1) *Die Function $u+vi$ ist eine in der Fläche T'' allenthalben einwerthige, und mit Ausnahme der Punkte $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$ auch stetige Function des Ortes oder Punktes x, y, die in der ganzen Fläche T'' den Differentialgleichungen $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ genügt.*
2) *Für die r Punkte $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$ wird diese Function der complexen Variable $x+yi$ unstetig, und zwar allgemein für den Punkt ε_ϱ unstetig in*

der, durch den Ausdruck

$$\varphi_\varrho(r_\varrho) = L_\varrho ln r_\varrho + L_\varrho^{(1)} \frac{1}{r_\varrho} + L_\varrho^{(2)} \frac{1}{r_\varrho^2} + \cdots$$

angegebenen Art, so dass die Differenz $(u+vi)-\varphi_\varrho(r_\varrho)$ *für den Punkt* ε_ϱ *stetig bleibt.*

3) *Die Werthe von* $u+vi$ *in je zwei entsprechenden Punkten auf der positiven und negativen Seite der, von den beiden Seiten der Schnitte a, b, c, l gebildeten Begrenzung der Fläche T'', die man durch* $(u+vi)^+$ *und* $(u+vi)^-$ *bezeichne, sind in der Weise verknüpft, dass allgemein*

$$\begin{aligned}
&\text{längs } a_\nu \quad \{(u+vi)^+ = A_\nu (u+vi)^- + A_\nu',\\
&\text{längs } b_\nu \quad \{(u+vi)^+ = B_\nu (u+vi)^- + B_\nu',\\
&\text{längs } c_\nu \quad \{(u+vi)^+ = (u+vi)^- + \Delta_\nu,\\
&\text{längs } l_\varrho \quad \{(u+vi)^+ = (u+vi)^- - 2\pi i L_\varrho,
\end{aligned}$$

für $\nu = 1, 2, \ldots, p$; $\varrho = 1, 2, \ldots, r$; *wobei zwischen den* $5p$ *Constanten* A_ν, B_ν, Δ_ν, A_ν', B_ν' $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$ *die* p *Relationen*

$$\Delta_\nu = B_\nu'(A_\nu - 1) - A_\nu'(B_\nu - 1)$$

für $\nu = 1, 2, \ldots, p$ *stattfinden.*

4) *Durch die bis jetzt erwähnten Eigenschaften (immer mit Rücksicht auf die vorher gemachten Annahmen, wonach also die Werthe der sämmtlichen Constanten* A, B, Δ, L, $L^{(1)}$, $L^{(2)}$, ... *festgelegt sind, und ausserdem noch die Werthe all der Constanten* A_ν', *die zu Indices* ν *gehören, für die* $A_\nu, B_\nu, \Delta_\nu = 1, 1, 0$ *resp.) ist die Function* $u+vi$ *bis auf eine additive willkürliche Constante bestimmt.*"

Man bemerke, dass die $p+1$ Relationen:

$$2\pi i \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} L_\varrho = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \Delta_\nu; \qquad \Delta_\nu = B_\nu'(A_\nu - 1) - A_\nu'(B_\nu - 1); \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, p)$$

die zwischen den $5p+r$, in den Grenzbedingungen *3)* auftretenden Constanten stattfinden, nicht den Charakter von Beschränkungen haben, sondern aus der Einwerthigkeit der Function $u+vi$ allein schon nothwendig folgen. Sind alle p Factorenpaare A_ν, B_ν von der zweiten Art, so ergiebt sich $\Sigma L_\varrho = 0$ (cf. *R. A. F. 3. pag. 19*). Das unter *4)* enthaltene Resultat lässt sich auch folgendermassen aussprechen:

„*Eine in der Fläche T' (die die Schnitte l nicht enthält) allenthalben einwerthige und stetige Function* $u+vi$ *der complexen Variable* $x+yi$, *deren Werthe in je zwei entsprechenden Punkten auf der positiven und negativen Seite der, von den beiden Seiten der Schnitte a, b, c gebildeten Begrenzung*

der Fläche T' in der Weise verknüpft sind, dass allgemein (für $\nu=1,2,\ldots,p$)

$$\begin{aligned} &\text{längs } a_\nu \ \{(u+vi)^+ = A_\nu(u+vi)^- + A'_\nu,\\ &\text{längs } b_\nu \ \{(u+vi)^+ = B_\nu(u+vi)^- + B'_\nu,\\ &\text{längs } c_\nu \ \{(u+vi)^+ = (u+vi)^-, \end{aligned}$$

ist immer eine Constante, wenn nur die $2p$ Grössen A_ν, B_ν sämmtlich den Modul 1 besitzen, und ferner von den $2p$ übrigen Constanten A'_ν, B'_ν all die Constanten A'_ν, die zu Indices ν gehören, für die gleichzeitig $A_\nu=1$, $B_\nu=1$ ist, den Werth Null haben.

Durch diese Resultate meiner Untersuchungen erscheint nun auch die Theorie dieser merkwürdigen transcendenten Functionen $u+vi$ auf eine, von der Ausdrucksform unabhängige, keinen Ausnahmefällen unterworfene Grundlage gestützt. Nennt man von den unzählig vielen Functionen $u+vi$ der complexen Variable $x+yi$, deren Existenz im Vorigen ausgesprochen wurde, zu derselben Gruppe gehörig alle diejenigen, für die die $2p$ Constanten A_ν, B_ν dieselben sind, und bezeichnet eine solche Gruppe durch das Symbol $\binom{A_1, A_2, \ldots, A_p}{B_1, B_2, \ldots, B_p}$, Gruppencharakteristik genannt, so erkennt man sofort, dass die Gesammtheit der, zu der Fläche T' gehörigen sogenannten *Abel*schen Integrale die Gruppe $\binom{1, 1, \ldots, 1}{1, 1, \ldots, 1}$ bildet. Diese specielle, von *Riemann* untersuchte Gruppe nimmt zu den übrigen Gruppen gleichsam eine Ausnahmestellung dadurch ein, dass von den zu ihr gehörigen allenthalben endlichen Functionen eine jede sich durch je p specielle dieser Functionen, die linearunabhängig sind, linear ausdrücken lässt *(R. A. F. 4. pag. 20)*, während von den, zu irgend einer andern Gruppe gehörigen allenthalben endlichen Functionen $u+vi$ eine jede sich schon durch je $p-1$ specielle dieser Functionen, die linearunabhängig sind, linear ausdrücken lässt.

Es existirt noch eine zweite grosse Klasse von Functionen $U+Vi$ der complexen Variable $x+yi$, die, in T' oder T'' einwerthig, nur in den Punkten ε_ϱ unstetig werden wie Functionen $\varphi_\varrho(r_\varrho)$ und beim Ueberschreiten der Querschnitte in lineare Ausdrücke von sich selbst übergehen. Sie unterscheiden sich von den vorher betrachteten Functionen $u+vi$ wesentlich dadurch, dass für sie die $2p$ Constanten A_ν, B_ν nicht sämmtlich den Modul 1 besitzen, und dass sie in Folge dessen nicht wie die Functionen $u+vi$ durch von einander unabhängige Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen allein bestimmt werden können. Alle diese noch übrigen Functionen $U+Vi$ sind in der Form

$$U+Vi = C+\int e^J \frac{d(u+vi)}{d(x+yi)}\, d(x+yi)$$

darstellbar, wobei J eine allenthalben endliche Function der Gruppe $\binom{1, 1, \ldots, 1}{1, 1, \ldots, 1}$ bedeutet, $u+vi$ eine der vorher betrachteten Functionen, und C eine Constante. Meine in der Einleitung erwähnte, demnächst erscheinende Arbeit, auf die ich wegen weiterer Ausführungen hier verweisen muss, enthält die vollständige Theorie sowohl der Functionen $u+vi$ wie der Functionen $U+Vi$: eine Theorie, dadurch bemerkenswerth, dass aus ihr die Haupteigenschaften der durch Quotienten von ϑ-Functionen darstellbaren Gebilde (vergl. meine Arbeit: *„Zur Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche, Zürich 1866.“*) unabhängig vom Ausdrucke, ohne also die Kenntniss der ϑ-Function vorauszusetzen, abgeleitet werden können. Schliesslich bemerke ich noch, dass einige meiner hierhergehörigen Methoden und Resultate durch meine sich regelmässig wiederholenden Vorlesungen über Functionentheorie schon in den Besitz meiner Schüler übergegangen sind.

Würzburg, im Sommer 1869.

Ueber die Vertheilung der Reste und Nichtreste einer Primzahl von der Form $4n+3$ innerhalb des Intervalles 1 bis $\frac{p-1}{2}$.

(Von Herrn *Götting* in Torgau.)

1. Man bezeichne die quadratischen Reste zu p mit a, die Nichtreste mit b, mit A und B die Anzahlen derselben von 1 bis $p-1$ und theile die letzteren Zahlen in vier Intervalle

I von 1 bis $\frac{p}{4}$, $\frac{p-3}{4}$ Zahlen

II von $\frac{p}{4}$ bis $\frac{p}{2}$, $\frac{p+1}{4}$ Zahlen

III von $\frac{p}{2}$ bis $\frac{3p}{4}$, $\frac{p+1}{4}$ Zahlen

IV von $\frac{3p}{4}$ bis $p-1$, $\frac{p-3}{4}$ Zahlen;

ferner mögen resp. A_1, A_2, A_3, A_4 und B_1, B_2, B_3, B_4 die Anzahlen der Reste und der Nichtreste in den vier Intervallen bedeuten. Da $p-a=b$ ist, so wird stets $A_2=B_3$, $A_3=B_2$ sein müssen. Die doppelten Zahlen I und die doppelten um p verminderten Zahlen III sind nun genau die Zahlen I und II. Hieraus folgt für

1) $p=8n+7$, also $\left(\frac{2}{p}\right)=+1$,

$$A_1+A_3=A_1+A_2, \qquad B_1+B_3=B_1+B_2,$$

also

$$A_3=A_2, \quad B_3=B_2 \quad \text{und} \quad A_3=B_3, \quad A_2=B_2,$$

d. h. im Intervall II und ebenso im Intervall III sind gleichviel Reste und Nichtreste enthalten.

2) $p=8n+3$, also $\left(\frac{2}{p}\right)=-1$,

$$A_1+A_3=B_1+B_2, \quad B_1+B_3=A_1+A_2, \quad \text{also} \quad A_1=B_1,$$

d. h. in dem Intervall I sind gleichviel Reste und Nichtreste enthalten. Bekanntlich drückt $A_1+A_2-B_1-B_2$ die Klassenanzahl der zur Determinante $-p$ gehörigen quadratischen Formen erster Art aus. Für Primzahlen $8n+7$ ist

also diese Klassenanzahl gleich der Differenz A_1-B_1, für Primzahlen $8n+3$ gleich A_2-B_2.

In diesem Journal Bd. 21 ist von *Dirichlet* gezeigt, dass, wenn $p=8n+7$ und α die Zahlen I und II bezeichnet, $\Sigma\left(\frac{\alpha}{p}\right)\alpha = A_2-B_2$ ist. Hieraus folgt, dass die Summe der in I und II vorkommenden Reste vermindert um die Summe der Nichtreste gleich Null ist.

2. Theilt man, wenn p eine Primzahl von der Form $8n+7$ bedeutet, die Zahlen von 1 bis $p-1$ in die sechs Intervalle

I 1 bis $\frac{p}{6}$, $\frac{p-1}{6}$ oder $\frac{p-5}{6}$ Zahlen

II $\frac{p}{6}$ bis $\frac{p}{3}$, $\frac{p-1}{6}$ oder $\frac{p+1}{6}$ Zahlen

III $\frac{p}{3}$ bis $\frac{p}{2}$, $\frac{p-1}{6}$ oder $\frac{p+1}{6}$ Zahlen

IV $\frac{p}{2}$ bis $\frac{2p}{3}$, $\frac{p-1}{6}$ oder $\frac{p+1}{6}$ Zahlen u. s. w.

und bezeichnet die Anzahlen der Reste und Nichtreste mit A_1, A_2, ..., B_1, B_2, ..., so ist ebenso wie oben $A_3=B_4$, $A_4=B_3$, ferner sind die doppelten Zahlen I und die doppelten um p verminderten Zahlen IV genau die Zahlen I und II. Hieraus folgt

$$A_1+A_4=A_1+A_2, \quad B_1+B_4=B_1+B_2, \quad \text{also}$$
$$A_2=A_4=B_3, \qquad A_3=B_4=B_2 \text{ und } A_2+A_3=B_2+B_3,$$

d. h. unter den Zahlen von $\frac{p}{6}$ bis $\frac{p}{2}$ sind gleichviel Reste und Nichtreste enthalten.

Torgau, Mai 1868.

Ueber ternäre quadratische Formen.

(Von Herrn *Paul Bachmann* in Breslau.)

Bei den ternären quadratischen Formen bildet bekanntlich die Aufgabe, eine gegebene binäre quadratische Form durch eine solche darzustellen, das Analogon zur Darstellung einer gegebenen Zahl durch eine binäre Form. Indem ich versuchte, diese Aufgabe nach Principien, welche in ähnlichen Fällen von *Dirichlet* angewendet worden sind, vollständig zu lösen, ist es mir zunächst gelungen, für den Begriff einer Gruppe von Darstellungen ein Analogon zu bestimmen, und so auf arithmetischem Wege zu den Transformationsformeln zu gelangen, welche Herr *Hermite* in diesem Journal Bd. 47 pag. 326 zuerst gegeben hat. —

1. Es bezeichne $f(x, x', x'')$ die ternäre Form

$$ax^2+a'x'^2+a''x''^2+2bx'x''+2b'x''x+2b''xx'$$

mit der Determinante Δ, und $F(x, x', x'')$ ihre adjungirte Form

$$Ax^2+A'x'^2+A''x''^2+2Bx'x''+2B'x''x+2B''xx'.$$

Man beweist leicht nachstehende Gleichung:

$$(1.)\quad \left\{\begin{array}{c} f(x, x', x'').f(y, y', y'') \\ = (Xy+X'y'+X''y'')^2-F(x'y''-x''y', x''y-xy'', xy'-x'y), \end{array}\right.$$

in welcher

$$X=ax+b''x'+b'x'', \qquad X'=b''x+a'x'+bx'', \qquad X''=b'x+bx'+a''x'',$$

und welche als die gemeinsame Quelle aller nachfolgenden Resultate zu betrachten ist. —.

Eine binäre quadratische Form (p, q, r) heisst durch f darstellbar, wenn diese letztere durch die Substitution

$$x=\alpha t+\beta u, \qquad x'=\alpha' t+\beta' u, \qquad x''=\alpha'' t+\beta'' u$$

in $pt^2+2qtu+ru^2$ übergeht. Sind A, A', A'' die Werthe von X, X', X'',

wenn man die x durch die α ersetzt, so ergeben sich für den Fall der Darstellbarkeit folgende Gleichungen:

$$p = f(\alpha, \alpha', \alpha''), \quad q = A\beta + A'\beta' + A''\beta'', \quad r = f(\beta, \beta', \beta'').$$

Ist daher D die Determinante der quadratischen Form (p, q, r), so findet man, wenn man in (1.) die x und die y resp. durch die α und die β ersetzt, nachstehende nothwendige Bedingungsgleichung:

$$D = F(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta', \alpha''\beta - \alpha\beta'', \alpha\beta' - \alpha'\beta),$$

d. h. *die Determinante jeder durch f darstellbaren Form ist durch die zu f adjungirte Form F darstellbar.* Wir betrachten nur die eigentlichen Darstellungen d. h. diejenigen, für welche die Zahlen

$$\lambda = \alpha'\beta'' - \alpha''\beta', \quad \lambda' = \alpha''\beta - \alpha\beta'', \quad \lambda'' = \alpha\beta' - \alpha'\beta$$

ohne gemeinsamen Theiler sind. Für diese können also drei ganze Zahlen γ, γ', γ'' der Gleichung

$$\lambda\gamma + \lambda'\gamma' + \lambda''\gamma'' = 1$$

gemäss bestimmt werden.

Wendet man nun die Gleichung (1.) auf die adjungirte Form an, so erhält man:

$$F(x, x', x'').F(y, y', y'')$$
$$= (Yx + Y'x' + Y''x'')^2 - \Delta . f(x'y'' - x''y', x''y - xy'', xy' - x'y),$$

wenn

$$Y = Ay + B''y' + B'y'', \quad Y' = B''y + A'y' + By'', \quad Y'' = B'y + By' + A''y''$$

gesetzt wird. Aus dieser Gleichung aber ergiebt sich für $y = \lambda$, $y' = \lambda'$, $y'' = \lambda''$, wenn man

$$v = \alpha x + \alpha' x' + \alpha'' x'', \quad w = \beta x + \beta' x' + \beta'' x''$$

setzt und bemerkt, dass wegen der Darstellung von (p, q, r) durch f die Gleichung

$$f(\alpha w - \beta v, \alpha' w - \beta' v, \alpha'' w - \beta'' v) = pw^2 - 2qwv + rv^2$$

stattfindet, folgende wichtige Congruenz:

$$(Lx + L'x' + L''x'')^2 \equiv \Delta(pw^2 - 2qwv + rv^2) \pmod{D},$$

in welcher L, L', L'' die Werthe von Y, Y', Y'' für $y = \lambda$, $y' = \lambda'$, $y'' = \lambda''$ bezeichnen. Sei nun

$$\mu = \gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha', \quad \mu' = \gamma''\alpha - \gamma\alpha'', \quad \mu'' = \gamma\alpha' - \gamma'\alpha;$$
$$\nu = \beta'\gamma'' - \beta''\gamma', \quad \nu' = \beta''\gamma - \beta\gamma'', \quad \nu'' = \beta\gamma' - \beta'\gamma.$$

Wenn man dann die x einmal durch die μ, das andere Mal durch

die ν, endlich durch die $\mu+\nu$ ersetzt, so erhält man aus jener Congruenz die folgenden drei:

$$\left.\begin{aligned}(L\mu+L'\mu'+L''\mu'')^2 &\equiv p\Delta\\ (L\nu+L'\nu'+L''\nu'')^2 &\equiv r\Delta\\ (L\mu+L'\mu'+L''\mu'')(L\nu+L'\nu'+L''\nu'') &\equiv -q\Delta\end{aligned}\right\} \pmod{D},$$

welche lehren, *dass jede eigentliche Darstellung einer Form* (p, q, r) *durch* f *zu einem bestimmten Systeme von Wurzeln der Congruenzen*

$$W^2 \equiv p\Delta, \quad WW' \equiv -q\Delta, \quad W'^2 \equiv r\Delta \pmod{D}$$

gehört, nämlich zu den Wurzeln

$$W \equiv (A\lambda+B''\lambda'+B'\lambda'')\mu+(B''\lambda+A'\lambda'+B\lambda'')\mu'+(B'\lambda+B\lambda'+A''\lambda'')\mu'',$$
$$W' \equiv (A\lambda+B''\lambda'+B'\lambda'')\nu+(B''\lambda+A'\lambda'+B\lambda'')\nu'+(B'\lambda+B\lambda'+A''\lambda'')\nu''.$$

Durch passende Wahl der Zahlen γ, γ', γ'' können diese Congruenzen in Gleichungen verwandelt werden.

2. Wenn (p, q, r) durch die Form f mittelst der Werthe α, α', α''; β, β', β'' dargestellt wird, so besteht die Gleichung

$$f(\alpha t+\beta u, \alpha' t+\beta' u, \alpha'' t+\beta'' u) = pt^2+2qtu+ru^2$$

für alle t, u. Man bezeichne nun mit τ, v alle ganzzahligen Auflösungen der Gleichung $\tau^2-Dv^2=1$ und setze

$$\mathfrak{a}=\tau-qv, \quad \mathfrak{b}=-rv, \quad \mathfrak{c}=pv, \quad \mathfrak{d}=\tau+qv,$$
$$t=\mathfrak{a}t'+\mathfrak{b}u', \quad u=\mathfrak{c}t'+\mathfrak{d}u',$$

so ist bekanntlich

$$pt^2+2qtu+ru^2 = pt'^2+2qt'u'+ru'^2.$$

Man hat also eine zweite Darstellung von (p, q, r) durch f mittelst folgender Werthe:

$$(2.) \qquad \begin{cases}\alpha_1=\alpha\mathfrak{a}+\beta\mathfrak{c}, & \alpha_1'=\alpha'\mathfrak{a}+\beta'\mathfrak{c}, & \alpha_1''=\alpha''\mathfrak{a}+\beta''\mathfrak{c};\\ \beta_1=\alpha\mathfrak{b}+\beta\mathfrak{d}, & \beta_1'=\alpha'\mathfrak{b}+\beta'\mathfrak{d}, & \beta_1''=\alpha''\mathfrak{b}+\beta''\mathfrak{d}.\end{cases}$$

Bezeichnet man die, dieser zweiten Darstellung zugehörigen Grössen durch die entsprechenden Zeichen mit unterem Index, so findet man

$$(3.) \qquad \lambda_1=\lambda, \quad \lambda_1'=\lambda', \quad \lambda_1''=\lambda'',$$

so dass, wenn h, k beliebige ganze Zahlen bedeuten,

$$(4.) \qquad \gamma_1=\gamma+h\alpha_1+k\beta_1, \quad \gamma_1'=\gamma'+h\alpha_1'+k\beta_1', \quad \gamma_1''=\gamma''+h\alpha_1''+k\beta_1''$$

gefunden werden. Untersucht man, zu welchen Wurzeln die zweite Darstel-

lung gehört, so findet man aus den vorigen Werthen leicht

$$W_1 = \mathfrak{a}W - \mathfrak{c}W' - kD, \qquad W_1' = -\mathfrak{b}W + \mathfrak{d}W' - hD.$$

Nun sind die beiden Ausdrücke $qW+pW'$, $rW+qW'$ durch D theilbar, daher kann man die vorigen Gleichungen nach Substitution der Werthe von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ als Congruenzen schreiben, wie folgt:

$$(5.) \qquad W_1 \equiv \tau W, \quad W_1' \equiv \varkappa W' \pmod{D}.$$

Bedeutet aber T, U die Fundamentalauflösung der *Pell*schen Gleichung, so ist

$$\tau + \upsilon\sqrt{D} = \pm(T+U\sqrt{D})^n.$$

Entweder ist nun $\pm T \equiv 1 \pmod{D}$ oder doch das, dem obern Zeichen und $n=2$ entsprechende $\tau \equiv 1 \pmod{D}$. Man kann also eine gewisse kleinste Auflösung T, Y angeben, deren $\mathrm{T} \equiv 1 \pmod{D}$ ist, von der Art, dass die Formel

$$(6.) \qquad \tau + \upsilon\sqrt{D} = \pm(\mathrm{T}+\mathrm{Y}\sqrt{D})^n$$

alle τ, welche $+1$ oder $-1 \pmod{D}$ congruent sind, ergiebt, jenachdem man in derselben das obere oder untere Zeichen wählt. Hiernach ergeben die Congruenzen (5.) folgendes Resultat:

Sind τ, υ in den Gleichungen (2.) *durch die Formel* (6.) *bestimmt, so bilden die Werthe* (2.) *eine Darstellung von (p, q, r) durch f, welche zu denselben oder zu den entgegengesetzten Wurzeln gehört, wie die erste Darstellung, jenachdem man in* (6.) *das obere oder untere Vorzeichen genommen hat.*

Dieser Satz lässt sich folgendermassen umkehren: *Alle Darstellungen von (p, q, r) durch f, welche zu denselben oder zu einander entgegengesetzten Wurzeln gehören und für welche die Werthe von λ, λ', λ'' dieselben bleiben, werden mittelst der Gleichungen* (2.) *aus einer beliebigen unter ihnen erhalten, wenn darin τ, υ durch die Formel* (6.) *bestimmt werden.* — In der That, nach den Voraussetzungen bestehen einerseits die Gleichungen (3.) und (4.), aus welchen sich die folgenden ergeben:

$$\mu_1 = \gamma'\alpha_1'' - \gamma''\alpha_1' - k\lambda, \quad \mu_1' = \gamma''\alpha_1 - \gamma\alpha_1'' - k\lambda', \quad \mu_1'' = \gamma\alpha_1' - \gamma'\alpha_1 - k\lambda'',$$
$$\nu_1 = \beta_1'\gamma'' - \beta_1''\gamma' - h\lambda, \quad \nu_1' = \beta_1''\gamma - \beta_1\gamma'' - h\lambda', \quad \nu_1'' = \beta_1\gamma' - \beta_1'\gamma - h\lambda''.$$

Andererseits kann man die Zahlen γ und γ_1 so gewählt denken, dass, wenn man mit W, W' die Wurzeln bezeichnet, zu welchen die erste Darstellung gehört,

$$W = L\mu + L'\mu' + L''\mu'' = \pm(L\mu_1 + L'\mu_1' + L''\mu_1''),$$
$$W' = L\nu + L'\nu' + L''\nu'' = \pm(L\nu_1 + L'\nu_1' + L''\nu_1'')$$

ist, wo die oberen oder unteren Zeichen gelten, jenachdem beide Darstellungen zu denselben oder zu entgegengesetzten Wurzeln gehören. So sind die Zeichen auch in den folgenden Gleichungen zu wählen, die leicht aus den vorigen folgen:

$$(7.)\quad \begin{cases} (hD \pm W')\alpha_1 + (kD \pm W)\beta_1 = W'\alpha + W\beta, \\ (hD \pm W')\alpha_1' + (kD \pm W)\beta_1' = W'\alpha' + W\beta', \\ (hD \pm W')\alpha_1'' + (kD \pm W)\beta_1'' = W'\alpha'' + W\beta'', \end{cases}$$

oder in diesen beiden:

$$(8.)\quad \begin{cases} hD \pm W' = W'(\beta_1\mu + \beta_1'\mu' + \beta_1''\mu'') - W(\beta_1\nu + \beta_1'\nu' + \beta_1''\nu''), \\ kD \pm W = -W'(\alpha_1\mu + \alpha_1'\mu' + \alpha_1''\mu'') + W(\alpha_1\nu + \alpha_1'\nu' + \alpha_1''\nu''), \end{cases}$$

deren Determinante gleich Eins ist.

Endlich bestehen für alle t, u die beiden Gleichungen:

$$f(\alpha t + \beta u,\ \alpha' t + \beta' u,\ \alpha'' t + \beta'' u) = pt^2 + 2qtu + ru^2,$$
$$f(\alpha_1 t + \beta_1 u,\ \alpha_1' t + \beta_1' u,\ \alpha_1'' t + \beta_1'' u) = pt^2 + 2qtu + ru^2,$$

aus denen, in Folge der Gleichungen (7.) oder (8.), sich

$$p(hD \pm W')^2 + 2q(hD \pm W')(kD \pm W) + r(kD \pm W)^2 = pW'^2 + 2qW'W + rW^2$$

ergiebt. Da diese Gleichung für unendlich viele Systeme W, W' besteht, ohne dass die Coefficienten der Substitution (8.) sich ändern, so bilden diese Gleichungen (8.) eine Transformation der Form (p, q, r) in sich selbst; daher findet man

$$\beta_1\mu + \beta_1'\mu' + \beta_1''\mu'' = \tau - qv, \quad \alpha_1\mu + \alpha_1'\mu' + \alpha_1''\mu'' = -pv,$$
$$\beta_1\nu + \beta_1'\nu' + \beta_1''\nu'' = rv, \quad \alpha_1\nu + \alpha_1'\nu' + \alpha_1''\nu'' = \tau + qv$$

und daraus Werthe für die α_1 und die β_1, welche sich von den durch (2.) bestimmten nicht wesentlich unterscheiden. Hieraus folgt die Richtigkeit des Satzes, da vorher bewiesen, dass die so bestimmte zweite Darstellung nur dann zu denselben oder zu entgegengesetzten Wurzeln gehören kann als die zweite, wenn τ, v durch die Formel (6.) bestimmt werden.

Wenn wir nun alle Darstellungen, für welche λ, λ', λ'' dieselben bleiben, und welche zu gleichen oder zu entgegengesetzten Wurzeln gehören, *eine Darstellungsgruppe* nennen, so erhalten wir den Satz: *Alle Darstellungen einer Gruppe ergeben sich aus einer beliebigen unter ihnen mittelst der Gleichungen* (2.), *in welchen* τ, v *durch die Formel* (6.) *zu bestimmen sind.*

3. Wir machen nun von den erhaltenen Resultaten eine Anwendung auf die Transformation der Formen, indem wir zwei beliebige Darstellungen

einer Gruppe betrachten, welche dem oberen Vorzeichen der Formel (6.) entsprechen. Die Zahlen h, k können so gewählt werden, dass $W_1 = W$, $W_1' = W'$ wird, man findet nämlich

$$h = \frac{\tau - 1}{D} \cdot W' + \frac{qW' + rW}{D} \cdot v, \qquad k = \frac{\tau - 1}{D} \cdot W - \frac{pW' + qW}{D} \cdot v.$$

Geht dann die Form f mittelst der Substitution

$$S = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{pmatrix}$$

in die Form $\varphi = \begin{pmatrix} p, & r, & s \\ m, & n, & q \end{pmatrix}$ mit der adjungirten Form $\begin{pmatrix} F, & E, & D \\ W, & W', & W'' \end{pmatrix}$ über, so muss ein Gleiches auch für die Substitution

$$S_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \alpha_1', & \beta_1', & \gamma_1' \\ \alpha_1'', & \beta_1'', & \gamma_1'' \end{pmatrix}$$

geschehen, also die Form φ in sich selbst übergehen durch die aus der umgekehrten Substitution S_1 und aus S zusammengesetzte Substitution, für welche man leicht findet:

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{d}, & -\mathfrak{b}, & -h \\ -\mathfrak{c}, & \mathfrak{a}, & -k \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

So liefern die zu einer Gruppe gehörigen Darstellungen eine unendliche Schaar von Transformationen der Form φ in sich selbst von der charakteristischen Form, dass die letzte Variable ungeändert bleibt. Man kann hinzufügen, sie liefern alle solche Transformationen; denn sei

$$t = \alpha T + \beta U + \gamma V, \qquad u = \alpha' T + \beta' U + \gamma' V, \qquad v = V$$

eine derselben, so giebt offenbar $t = \alpha T + \beta U$, $u = \alpha' T + \beta' U$ eine Transformation der Form $pt^2 + 2qtu + ru^2$ in sich selbst, also ist

$$\alpha = \tau - qv, \qquad \beta = -rv, \qquad \alpha' = pv, \qquad \beta' = \tau + qv.$$

Zur Bestimmung von γ, γ' ergeben sich sodann die Gleichungen

$$\begin{aligned} p\beta\gamma + r\beta'\gamma' + m\beta' + n\beta + q(\beta\gamma' + \beta'\gamma) &= m, \\ p\alpha\gamma + r\alpha'\gamma' + m\alpha' + n\alpha + q(\alpha\gamma' + \alpha'\gamma) &= n, \\ p\gamma^2 + r\gamma'^2 + 2m\gamma' + 2n\gamma + 2q\gamma\gamma' &= 0, \end{aligned}$$

aus deren beiden ersten man, mit Rücksicht auf die Gleichungen

$q^2 - pr = D$, $nr - mq = W'$, $mp - nq = W$, $Dm = -(rW + qW')$, $Dn = -(qW + pW')$

leicht folgende Werthe ableitet:

$$\gamma = -W'.\frac{\tau-1}{D}+\frac{rW+qW'}{D}\cdot v, \quad \gamma' = -W.\frac{\tau-1}{D}-\frac{qW+pW'}{D}\cdot v;$$

die dritte wird von denselben ebenfalls erfüllt. Diese Werthe werden allgemein nur ganzzahlig, wenn τ, v durch die Gleichung (6.) bestimmt werden, alsdann unterscheidet sich aber diese Transformation von der vorher abgeleiteten nur durch das entgegengesetzte Vorzeichen von v, was unwesentlich ist.

So sind wir auf anderm Wege zu den Formeln des Herrn *Hermite* gelangt. —

Breslau, 1869.

Inhaltsverzeichniss der Bände 61 bis 70.

Aronhold.

	Band	Seite
Ueber eine neue algebraische Behandlungsweise der Integrale irrationaler Differentiale von der Form $\Pi(x, y)\,dx$, in welcher $\Pi(x, y)$ eine beliebige rationale Function ist, und zwischen x und y eine allgemeine Gleichung zweiter Ordnung besteht.	61.	95—145
Ueber eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie. . . .	62.	281—345
Neuer und directer Beweis eines Fundamentalsatzes der Invariantentheorie.	69.	185—189

F. August.

Ein *Steiner*scher Satz über Krümmungskreise bei Kegelschnitten und ein allgemeinerer *Steiner*scher Satz über osculirende Kegelschnitte bei Curven dritten Grades.	68.	235—241
Geometrische Betrachtung der Normalen, welche sich von einem beliebigen Punkte auf eine algebraische Fläche fällen lassen. .	68.	242—245

Bachmann in Breslau.

Zur Theorie der complexen Zahlen.	67.	200—204
Ueber ternäre quadratische Formen	70.	365—371

Bauer in München.

Ueber Kegelschnitte, die einer gewissen Bedingung genügen. . . .	68.	293—296
Ueber Kegelschnitte.	69.	293—318

Bertram.

Ueber eine Vorsichtsmassregel beim Gebrauch des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten.	64.	284—287

Bischoff in München.

Geometrisches.	61.	369—373
Ueber Curvenbüschel, die sich gegenseitig berühren.	64.	185—186

Paul du Bois-Reymond in Heidelberg.

Hauptlehrsätze der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit drei Variabeln.	64.	271—283

	Band	Seite
Notiz über zwei Systeme von partiellen Differentialgleichungen. . .	68.	180—184
Ueber die allgemeinen Eigenschaften der Klasse von Doppelintegralen, zu welcher das *Fourier*sche Doppelintegral gehört.	69.	65—108
Bemerkungen über die verschiedenen Werthe, welche eine Function zweier reellen Variabeln erhält, wenn man diese Variabeln entweder nach einander oder gewissen Beziehungen gemäss gleichzeitig verschwinden lässt.	70.	10— 45
Ueber die Integration lineärer totaler Differentialgleichungen, denen durch ein Integral Genüge geschieht.	70.	299—313

† Boole in Cork (Irland).

Ueber die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung $Rr + Ss + Tt + U(s^2 - rt) = V$.	61.	309—333

Brill in Giessen.

Ueber diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als hyperelliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen.	65.	269—283

Brioschi in Mailand.

Note relative à la lettre de M. *Hermite* à M. *Brioschi.* (Bd. 63, pag. 30—32.)	63.	32— 33

Cayley in Cambridge.

Note sur la réalité des racines d'une équation quadratique. . . .	61.	367—368
Nouvelles recherches sur l'élimination et la théorie des courbes. . .	63.	34— 39
Suite des recherches sur l'élimination et la théorie des courbes. . .	64.	167—171
Note sur la surface du quatrième ordre de *Steiner*.	64.	172—174
Note sur les singularités supérieures des courbes planes.	64.	369—371
Sur un théorème relatif à huit points situés sur une conique. . . .	65.	180—184
Sur un cas particulier de la surface du quatrième ordre avec seize points singuliers.	65.	284—290
Note sur une transformation géométrique.	67.	95— 96
Note sur l'algorithme des tangentes doubles d'une courbe du quatrième ordre.	68.	176—179

Christoffel.

Verallgemeinerung einiger Theoreme des Herrn *Weierstrass*. . . .	63.	255—272
Ueber die kleinen Schwingungen eines periodisch eingerichteten Systems materieller Punkte.	63.	273—288
Ueber die Bestimmung der Gestalt einer krummen Oberfläche durch lokale Messungen auf derselben.	64.	193—209
Zur Theorie der einwerthigen Potentiale.	64.	321—368
Ueber den Einfluss von Realitäts- und Stetigkeits-Bedingungen auf die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen.	66.	1— 14
Ueber einige allgemeine Eigenschaften der Minimumsflächen. . . .	67.	218—228
Beweis des Fundamentalsatzes der Invariantentheorie.	68.	246—252
Theorie der bilinearen Formen.	68.	253—272

	Band	Seite
Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades.	70.	46— 70
Ueber ein die Transformation homogener Differentialausdrücke zweiten Grades betreffendes Theorem.	70.	241—245

Clebsch in Göttingen.

Ueber das *Pfaff*sche Problem. Zweite Abhandlung.	61.	146—179
Bemerkung zur Abhandlung des Herrn *Röthig*: „Ueber das Potential eines homogenen rechtwinkligen Cylinders.“ (Bd. 61, pag. 180 bis 186.)	61.	187—194
Ueber die Reflexion an einer Kugelfläche.	61.	195—262
Ueber das Problem der Normalen bei Curven und Oberflächen der zweiten Ordnung.	62.	64—109
Ueber eine Klasse von Gleichungen, welche nur reelle Wurzeln besitzen.	62.	232—245
Ueber die Wendungsberührebenen der Raumcurven.	63.	1— 8
Zur Theorie der algebraischen Flächen.	63.	14— 26
Ueber einen Satz von *Steiner* und einige Punkte der Theorie der Curven dritter Ordnung.	63.	94—121
Bemerkung zu *Jacobi*s Beweis für die Anzahl der Doppeltangenten.	63.	186—188
Ueber die Anwendung der *Abel*schen Functionen in der Geometrie.	63.	189—243
Ueber diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind.	64.	43— 65
Ueber die Elimination aus zwei Gleichungen dritten Grades. . . .	64.	95— 97
Ueber die Singularitäten algebraischer Curven.	64.	98—100
Note zur Abhandlung des Herrn *Cremona:* Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements.	64.	124—125
Ueber diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen.	64.	210—270
Ueber einige von *Steiner* behandelte Curven.	64.	288—293
Ueber die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen.	65.	257—268
Die Geometrie auf den Flächen dritter Ordnung.	65.	359—380
Ueber die *Steiner*sche Fläche.	67.	1— 22
Ueber ein Problem der Forstwissenschaft.	67.	248—265
Ueber simultane binäre cubische Formen.	67.	360—370
Zur Theorie der binären Formen vierten Grades.	67.	371—380
Ueber die Curven der Haupttangenten bei windschiefen Flächen. .	68.	151—161
Ueber das simultane Formensystem einer quadratischen und einer cubischen binären Form.	68.	162—169
Ueber die Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen.	69.	142—184
Ueber eine Eigenschaft von Functionaldeterminanten.	69.	355—358
Note zu dem Aufsatze „über eine Eigenschaft von Functionaldeterminanten“ Bd. 69 pag. 355 dieses Journals.	70.	175—181

Combescure in St. Etienne.

Sur quelques problèmes relatifs aux surfaces réglées.	62.	174—187
Sur le déplacement d'une courbe, invariable de forme, qui reste tangente à une courbe fixe.	63.	332—359

Cremona in Mailand.

	Band	Seite
Sur les hyperboloïdes de rotation qui passent par une cubique gauche donnée.	63.	141—144
Sur la surface du quatrième ordre qui a la propriété d'être coupée suivant deux coniques par chacun de ses plans tangents. . . .	63.	315—328
Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements.	64.	101—123
Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre. . .	68.	1—133

Dietrich in Regensburg.

Ueber den Zusammenhang gewisser Determinanten mit Bruchfunctionen.	69.	190—196

Franke in Bernburg.

Ueber Determinanten aus Unterdeterminanten.	61.	350—355

Fuchs in Greifswald.

Ueber die Perioden, welche aus den Wurzeln der Gleichung $\omega^n = 1$ gebildet sind, wenn n eine zusammengesetzte Zahl ist.	61.	374—386
Ueber die aus Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen von periodischem Verhalten, insbesondere die Bestimmung der Klassenanzahl derselben.	65.	74—111
Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten.	66.	121—160
Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten. (Ergänzungen zu der im 66sten Bande dieses Journals enthaltenen Abhandlung.)	68.	354—385

Geiser in Zürich.

Ueber die Normalen der Kegelschnitte.	65.	381—383
Ueber zwei geometrische Probleme.	67.	78— 89
Zur Theorie der Flächen zweiten und dritten Grades.	69.	197—221
Ueber die Flächen vierten Grades, welche eine Doppelcurve zweiten Grades haben.	70.	249—257

Goetting in Torgau.

Ueber die Vertheilung der Reste und Nichtreste einer Primzahl der Form $4n+3$ innerhalb des Intervalles 1 bis $\frac{p-1}{2}$.	70.	363—364

Gordan in Giessen.

Beziehungen zwischen Theta-Producten.	66.	185—192
Beweis, dass jede Covariante und Invariante einer binären Form eine ganze Function mit numerischen Coefficienten einer endlichen Anzahl solcher Formen ist.	69.	323—354

Grube in Schleswig.

	Band	Seite
Ueber die Anziehungscomponente eines geraden elliptischen Cylinders in der Richtung der Axe, wenn die Elementaranziehung irgend einer Potenz der Entfernung umgekehrt proportional ist. . . .	65.	62— 73
Ueber die Anziehung eines homogenen Ellipsoids.	69.	359—364

Hankel in Tübingen.

Darstellung symmetrischer Functionen durch die Potenzsummen. . .	67.	90— 94

Heine in Halle a. d. S.

Der *Abel*sche Satz.	61.	276—282
Ueber einige bestimmte Integrale.	61.	356—366
Die speciellen *Lamé*schen Functionen erster Art von beliebiger Ordnung.	62.	110—141
Mittheilung über Kettenbrüche. (Auszug aus dem Monatsbericht der Akademie der Wissenschaften zu Berlin.)	67.	315—326
Geometrische Bedeutung der Kugelfunctionen.	68.	386—389
Die *Fourier-Bessel*sche Function.	69.	128—141

† Hennig in Gnesen.

Beitrag zur Theorie der ebenen Rouletten.	65.	52— 61
Auszug aus einem Schreiben an den Herausgeber.	66.	382

Henrici in Kiel.

Bemerkung zu „*Hesse*, Zerlegung der Bedingung für die Gleichheit der Hauptaxen eines auf einer Oberfläche zweiter Ordnung liegenden Kegelschnittes in die Summe von Quadraten“ (Bd. 60, pag. 305).	64.	187—192
Transformation von Differentialausdrücken erster Ordnung zweiten Grades mit Hülfe der verallgemeinerten elliptischen Coordinaten.	65.	1— 25

Hermes.

Erläuterung zu „Regel zur Bestimmung des Inhalts der Sternpolygone. Bruchstück aus den hinterlassenen Papieren von *C. G. J. Jacobi*.“	65.	174—176
Ausdehnung der *Jacobi*schen Regel zur Bestimmung des Inhalts der Sternpolygone für den Fall vielfacher Punkte.	65.	177—179
Ueber einige besondere Punkte des Tetraeders.	65.	293—319
Ueber Strahlensysteme der ersten Ordnung und der ersten Klasse. .	67.	153—178
Untersuchungen über Strahlenquadrupel.	67.	279—292

Hermite in Paris.

Extrait d'une lettre de M. *Hermite* à M. *Brioschi*.	63.	30— 32
Extrait d'une lettre de M. *Hermite* à M. *Borchardt*.	64.	294—296

Hesse in München.

Die cubische Gleichung, von welcher die Lösung des Problems der Homographie von M. *Chasles* abhängt.	62.	188—192

	Band	Seite
Jacob Steiner.	62.	199—200
Zur Involution.	63.	179—185
Transformationsformeln für rechtwinklige Raum-Coordinaten.	63.	247—251
Satz aus der Lehre von den Kegelschnitten. Auszug aus einem Schreiben an den Herausgeber.	65.	384
Ein Uebertragungsprincip.	66.	15— 21
Ueber die Reciprocität der *Pascal-Steiner*schen und der *Kirkman-Cayley-Salmon*schen Sätze von dem Hexagrammum mysticum.	68.	193—207
Ein Determinantensatz.	69.	319—322

Hill in Lund.

Remarques sur les fonctions entières à diviseurs binômes.	70.	103—104
Note sur les indices à module composé et sur une table d'une nouvelle espèce de logarithmes.	70.	282—288

Hirst in London.

Sur les volumes des surfaces podaires. (Extrait du mémoire lu dans la séance du 20 novembre 1862 de la société royale de Londres et imprimé dans les Philosophical Transactions of the Royal Society. Vol. 153.)	62.	246—264

Hoppe.

Ebene Curven, zwischen deren Bogen und Coordinaten eine Gleichung zweiten Grades besteht	62.	193—198
Darstellung der Curven durch Krümmung und Torsion. Fortsetzung zu Bd. 60, pag. 182.	63.	122—140

† C. G. J. Jacobi.

De investigando ordine systematis aequationum differentialium vulgarium cujuscunque. Ex ill. *C. G. J. Jacobi* manuscriptis posthumis in medium protulit *C. W. Borchardt.*	64.	297—320
Regel zur Bestimmung des Inhalts der Sternpolygone. Bruchstück aus den hinterlassenen Papieren von *C. G. J. Jacobi*, mitgetheilt durch Herrn *O. Hermes.*	65.	173—174
Ueber die Auflösung der Gleichung $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = f.u.$ Aus den hinterlassenen Papieren von *C. G. J. Jacobi*, mitgetheilt durch Herrn *E. Heine.*	69.	1— 28
Allgemeine Theorie der kettenbruchähnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus *drei* vorhergehenden gebildet wird. Aus den hinterlassenen Papieren von *C. G. J. Jacobi* mitgetheilt durch Herrn *E. Heine.*	69.	29— 64

Jochmann.

Ueber die durch einen Magnet in einem rotirenden Stromleiter inducirten electrischen Ströme.	63.	158—178
Nachschrift zu der Abhandlung über Induction in rotirenden Leitern.	63.	329—331

de Joncquières in Paris.

	Band	Seite
Mémoire sur les contacts multiples d'ordre quelconque des courbes de degré *r*, qui satisfont à des conditions données, avec une courbe fixe du degré *m*; suivi de quelques réflexions sur la solution d'un grand nombre de questions concernant les propriétés projectives des courbes et des surfaces algébriques.	66.	289—321

Jordan in Paris.

Recherches sur les polyèdres.	66.	22— 85
Résumé de recherches sur la symétrie des polyèdres non eulériens. .	66.	86— 91
Recherches sur les polyèdres (Second mémoire).	68.	297—349
Note sur la symétrie inverse des polyèdres non eulériens.	68.	350—353
Sur une équation du 16ème degré.	70.	182—184
Sur les assemblages de lignes.	70.	185—190

Kirchhoff in Heidelberg.

Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen.	70.	289—298

Königsberger in Heidelberg.

Ueber die Transformation der *Abel*schen Functionen erster Ordnung.	64.	17— 42
Ueber die Transformation der *Abel*schen Functionen erster Ordnung.	65.	335—358
Ueber die Transformation des zweiten Grades für die *Abel*schen Functionen erster Ordnung.	67.	58— 77
Ueber die Transformation dritten Grades und die zugehörigen Modulargleichungen der *Abel*schen Functionen erster Ordnung. . . .	67.	97—113

Kronecker.

Ueber bilineare Formen (Aus dem Monatsbericht der Berliner Akademie vom 15. October 1866).	68.	273—285
Zur Potential-Theorie.	70.	246—248

Küpper in Trier.

Considérations géométriques, destinées à faciliter l'étude de la théorie des transcendantes elliptiques.	63.	40— 57

Kummer.

Ueber atmosphärische Strahlenbrechung. (Aus dem Monatsbericht der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin.)	61.	263—275
Ueber die Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten liegen. (Abgedruckt aus dem Monatsbericht der Berliner Akademie vom 16. Juli 1863.)	64.	66— 76

Lie in Christiania.

Ueber eine Darstellung des Imaginären in der Geometrie.	70.	346—353

Lipschitz in Bonn.

	Band	Seite
Untersuchungen über die Anwendung eines Abbildungsprincips auf die Theorie der Vertheilung der Electricität.	61.	1— 21
Untersuchungen über die Anwendung eines Abbildungsprincips auf die Theorie der Gravitation.	61.	22— 65
Versuch zur Herleitung eines Gesetzes, dass die Dichtigkeit für die Schichten im Innern der Erde annähernd darstellt, aus den gegebenen Beobachtungen.	62.	1— 35
Beitrag zur Theorie des Gleichgewichts eines nicht homogenen flüssigen rotirenden Sphäroids.	63.	289—295
De explicatione per series trigonometricas instituenda functionum unius variabilis arbitrariarum, et praecipue earum, quae per variabilis spatium finitum valorum maximorum et minimorum numerum habent infinitum, disquisitio.	63.	296—308
Beiträge zur Theorie der Variation der einfachen Integrale.	65.	26— 41
Ueber gewisse Beziehungen zwischen räumlichen Gebilden.	66.	267—284
Ueber einen algebraischen Typus der Bedingungen eines bewegten Massensystems.	66.	363—374
Beitrag zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen.	69.	109—127
Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen.	70.	71—102

Lüroth in Karlsruhe.

Zur Theorie der windschiefen Flächen.	67.	130—152
Ueber die Anzahl der Kegelschnitte, welche acht Gerade im Raume schneiden.	68.	185—190

A. Mayer in Leipzig.

Ueber die Kriterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale.	69.	238—263

Mehler in Danzig.

Bemerkungen zur Theorie der mechanischen Quadraturen.	63.	152—157
Note über die Evoluten sphärischer Curven.	64.	183—184
Ueber die Entwicklung einer Function von beliebig vielen Variabeln nach *Laplace*schen Functionen höherer Ordnung.	66.	161—176
Ueber die Anziehung eines homogenen Polyeders. (Im Auszuge mitgetheilt aus den Schriften der naturforschenden Gesellschaft zu Danzig vom Jahre 1865.).	66.	375—381
Ueber die Vertheilung der statischen Electricität in einem von zwei Kugelkalotten begrenzten Körper.	68.	134—150

Mertens in Krakau.

De functione potentiali duarum ellipsoidium homogenearum.	63.	360—372
Bestimmung des Potentials eines homogenen Polyeders.	69.	286—288
Zur Theorie der symmetrischen Functionen.	69.	289—290
Bestimmung des Potentials eines homogenen Ellipsoids.	70.	1— 9

O. E. Meyer in Breslau.

	Band	Seite
Ueber die Reibung der Flüssigkeiten. Nachtrag zu der Abhandlung S. 229. Bd. 59 dieses Journals.	62.	201—214

Most in Stettin.

Ueber die Differentialquotienten der Kugelfunctionen.	70.	163—168

C. Neumann in Leipzig.

Ueber das Gleichgewicht der Wärme und das der Electricität in einem Körper, welcher von zwei nicht concentrischen Kugelflächen begrenzt wird.	62.	36— 49
Ueber die Entwickelung beliebig gegebener Functionen nach den *Bessel*schen Functionen.	67.	310—314

Oettinger in Freiburg im Breisgau.

Ueber ein bestimmtes Integral.	63.	252—254
Ueber einige Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung, ins Besondere über das Rouge et Noire und den Vortheil der Bank bei diesem Spiele. Ein Beitrag zur Wahrscheinlichkeitsrechnung.	67.	327—359

Olivier in Schaffhausen.

Ueber einige allgemeine Eigenschaften der geometrischen Curven. .	70.	156—162

Painvin in Douai.

Propriétés du système des surfaces du second ordre conjuguées par rapport à un tétraèdre fixe.	63.	58— 93
Recherche des points à l'infini sur les surfaces algébriques. Première Partie.	65.	112—160
Recherche des points à l'infini sur les surfaces algébriques. Deuxième Partie.	65.	198—256

Pasch (Rosanes und Pasch) in Breslau.

Ueber das einem Kegelschnitte umbeschriebene und einem andern einbeschriebene Polygon.	64.	126—166
Ueber eine algebraische Aufgabe, welche einer Gattung geometrischer Probleme zu Grunde liegt.	70.	126—174

Preisfragen.

Programme pour le prix Carpi (Proposé par l'Académie Pontificale des Nuovi Lincei).	65.	188
Preisfrage der physikalisch mathematischen Klasse der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften für das Jahr 1868. .	66.	383—384
Preisfrage der physikalisch mathematischen Klasse der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften für das Jahr 1870. .	69.	291—292

Prym in Würzburg.

	Band	Seite
Zur Integration der gleichzeitigen Differentialgleichungen $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.	70.	354—362

Reye in Zürich.

Lehrsätze über das Strahlensystem erster Ordnung und erster Klasse und den linearen Strahlencomplex.	69.	365—369

Richelot in Königsberg.

Ueber die einfachste Correlation in zwei räumlichen Gebieten. . .	70.	137—155

† Riemann in Göttingen.

Ueber das Verschwinden der ϑ-Functionen.	65.	161—172

S. Roberts in London.

Sur l'ordre des conditions de la coexistence des équations algébriques à plusieurs variables.	67.	266—278

W. Roberts in Dublin.

Application des coordonnées elliptiques à la recherche des surfaces orthogonales.	62.	50— 60

† Roch in Halle.

Anwendung der Potentialausdrücke auf die Theorie der molekular-physikalischen Fernewirkungen und der Bewegung der Electricität in Leitern.	61.	283—308
Ueber eine Transformation des Potentials.	63.	9— 13
Ueber die Anzahl der willkürlichen Constanten in algebraischen Functionen.	64.	372—376
Ueber die dritte Gattung der *Abel*schen Integrale erster Ordnung. .	65.	42— 51
Ueber die Doppeltangenten an Curven vierter Ordnung.	66.	97—120
Ueber Theta-Functionen vielfacher Argumente.	66.	177—184
Ueber *Abel*sche Integrale dritter Gattung.	68.	170—175

Roethig.

Das Potential eines homogenen rechtwinkligen Cylinders.	61.	180—186

Rosanes (Rosanes und Pasch) in Breslau.

Ueber das einem Kegelschnitte umbeschriebene und einem anderen einbeschriebene Polygon.	64.	126—166
Ueber eine algebraische Aufgabe, welche einer Gattung geometrischer Probleme zu Grunde liegt.	70.	169—174

Scheibner in Leipzig.

	Band	Seite
Satz aus der Störungstheorie. (Auszug aus einem Schreiben an den Herausgeber.)	65.	291—292
Ueber das Problem der drei Körper. (Auszug aus einem Schreiben an den Herausgeber.)	68.	390—392

Schemmel.

Ueber relative Primzahlen.	70.	191—192

Schlaefli in Bern.

Ueber invariantive Elemente einer orthogonalen Substitution, wenn dieselbe als Ausdruck einer Bewegung jeder Gruppe von Werthen der Variabeln aus dem identischen Zustande in den transformirten gefasst wird.	65.	185—187
Erweiterung des Satzes, dass zwei polare Dreiecke perspectivisch liegen, auf eine beliebige Zahl von Dimensionen.	65.	189—197
Ergänzung der Abhandlung über die Entwickelung des Products $1.(1+x)(1+2x)(1+3x)\ldots(1+(n-1)x) = \Pi(x)$ in Bd. XLIII dieses Journals.	67.	179—182
Ueber die Entwickelbarkeit des Quotienten zweier bestimmten Integrale von der Form $\int dx\,dy\ldots dz$.	67.	183—199

Schröter in Breslau.

Problematis geometrici ad superficiem secundi ordinis per data puncta construendam spectantis solutio nova.	62.	215—231
Nachweis der 27 Geraden auf der allgemeinen Oberfläche dritter Ordnung.	62.	265—280
Ueber die *Steiner*sche Fläche vierten Grades. (Abgedruckt aus dem Monatsbericht der Berliner Akademie vom 26. Novbr. 1863.)	64.	79— 94
Erweiterung einiger bekannten Eigenschaften des ebenen Dreiecks.	68.	208—234

Schwarz in Zürich.

Elementarer Beweis des *Pohlke*schen Fundamentalsatzes der Axonometrie.	63.	309—314
De superficiebus in planum explicabilibus primorum septem ordinum.	64.	1— 16
Ueber die geradlinigen Flächen fünften Grades.	67.	23— 57
Ueber einige Abbildungsaufgaben. Aus einer Mittheilung an Herrn *Richelot* in Königsberg.	70.	105—120
Conforme Abbildung der Oberfläche eines Tetraeders auf die Oberfläche einer Kugel.	70.	121—136

Siebeck in Liegnitz.

Ueber die Determinante, deren Elemente die Quadrate der sechzehn Verbindungslinien der Eckpunkte zweier beliebiger Tetraeder sind.	62.	151—159
Ueber eine neue analytische Behandlungsweise der Brennpunkte.	64.	175—182
Ueber die Erzeugung der Curven dritter Klasse und vierter Ordnung durch Bewegung eines Punktes.	66.	344—362

Souillart in Caen (Normandie).

	Band	Seite
Sur les sections circulaires des surfaces du second ordre et les ombilics des surfaces quelconques.	65.	320—334

Spitzer in Wien.

Note über die Integration einer gewissen Gattung linearer Differentialgleichungen.	63.	27— 29

Spottiswoode in London.

Note sur la transformation de la cubique ternaire en sa forme canonique.	63.	244—246

† v. Staudt in Erlangen.

Ueber die *Steiner*schen Gegenpunkte, welche durch zwei in eine Curve zweiter Ordnung beschriebene Dreiecke bestimmt sind.	62.	142—150
Ueber die Functionen Y und Z, welche der Gleichung $\frac{4(x^p-1)}{x-1} = Y^2 \mp pZ^2$ Genüge leisten, wo p eine Primzahl der Form $4k \pm 1$ ist.	67.	205—217

† Steiner.

Geometrische Betrachtungen und Lehrsätze. Aus den hinterlassenen Manuscripten mitgetheilt von Herrn *C. F. Geiser* in Zürich. . .	66.	237—266
Construction der Fläche zweiten Grades durch neun Punkte. Nach den hinterlassenen Manuscripten *Jacob Steiner*s dargestellt von Herrn *C. F. Geiser* in Zürich.	68.	191—192

Stern in Göttingen.

Ueber eine der Theilung der Zahlen ähnliche Untersuchung und deren Anwendung auf die Theorie der quadratischen Reste.	61.	66— 94
Zur Theorie der quadratischen Reste.	61.	334—349
Ueber einen Satz aus der Determinantentheorie.	66.	285—288
Beweis eines Satzes von *Legendre*.	67.	114—129
Ueber einen besonderen Fall der orthogonalen Substitutionen. . . .	67.	293—298
Ueber einige Eigenschaften der Trigonalzahlen.	69.	370—380

Sturm in Bromberg.

Untersuchungen über das Flächennetz zweiter Ordnung.	70.	212—240

Thomae in Halle a. d. S.

Bestimmung von $d \lg \vartheta(0, 0, \ldots 0)$ durch die Klassenmoduln. . . .	66.	92—96
Beiträge zur Theorie der durch die *Heine*sche Reihe $1 + \frac{1-q^a}{1-q} \cdot \frac{1-q^b}{1-q^c} x + \frac{1-q^a}{1-q} \cdot \frac{1-q^{a+1}}{1-q^2} \cdot \frac{1-q^b}{1-q^c} \cdot \frac{1-q^{b+1}}{1-q^{c+1}} x^2 + \cdots$ darstellbaren Functionen.	70.	258—281

Thomé.

	Band	Seite
Ueber die Kettenbruchentwickelung der *Gauss*ischen Function $F(\alpha, 1, \gamma, x)$.	66.	322—336
Ueber die Reihen, welche nach Kugelfunctionen fortschreiten. . . .	66.	337—343
Ueber die Kettenbruchentwickelung des *Gauss*ischen Quotienten $\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}$	67.	299—309

VonderMühll in Leipzig.

Ueber die Abbildung von Ebenen auf Ebenen.	69.	264—285

H. Weber in Heidelberg.

Ueber singuläre Auflösungen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung.	66.	193—236
Ueber ein Princip der Abbildung der Theile einer krummen Oberfläche auf einer Ebene.	67.	229—247
Ueber eine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen. . .	68.	286—292
Ueber einige bestimmte Integrale.	69.	222—237
Ueber das Additionstheorem der *Abel*schen Functionen.	70.	193—211
Zur Theorie der Umkehrung der *Abel*schen Integrale.	70.	314—345

Weierstrass.

Note zur Abhandlung des Herrn *Kummer* „Ueber die Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten liegen". (Abgedruckt aus dem Monatsbericht der Berliner Akademie vom 16. Juli 1863.)	64.	77— 78

Weingarten.

Ueber die Flächen, deren Normalen eine gegebene Fläche berühren.	62.	61— 63
Ueber die Oberflächen, für welche einer der beiden Hauptkrümmungshalbmesser eine Function des anderen ist.	62.	160—173
Ueber die Bewegung der Electricität in Leitern, mit Bezugnahme auf die Abhandlung des Herrn *G. Roch*: Anwendung der Potentialausdrücke auf die Theorie der molekular-physikalischen Fernewirkungen und der Bewegung der Electricität in Leitern im 61sten Bande dieses Journals pag. 283.	63.	145—151

Wetzig in Leipzig.

Ueber das Minimum oder Maximum der Potenzsumme der Abstände eines Punktes von gegebenen Punkten, Geraden oder Ebenen. .	62.	346—396

Fig. 1.

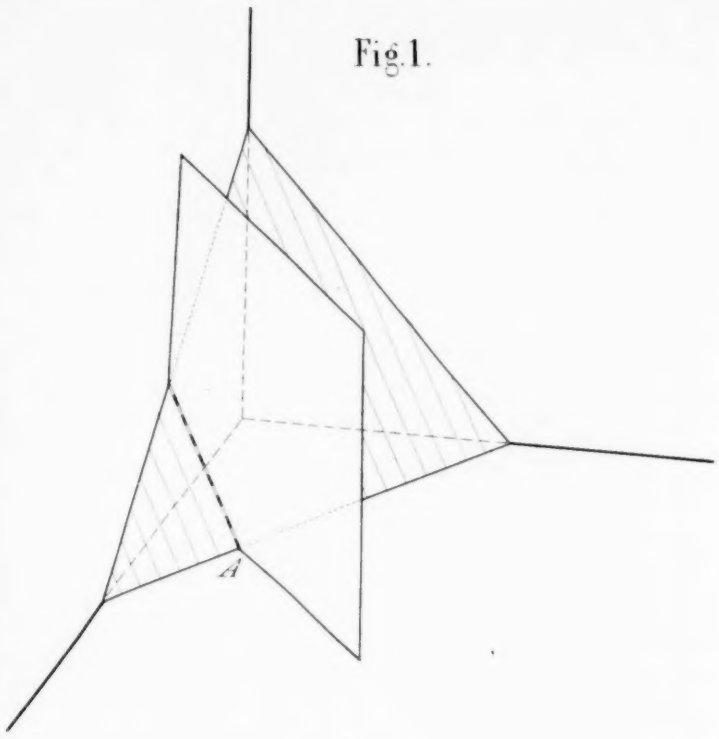


Fig. 2.

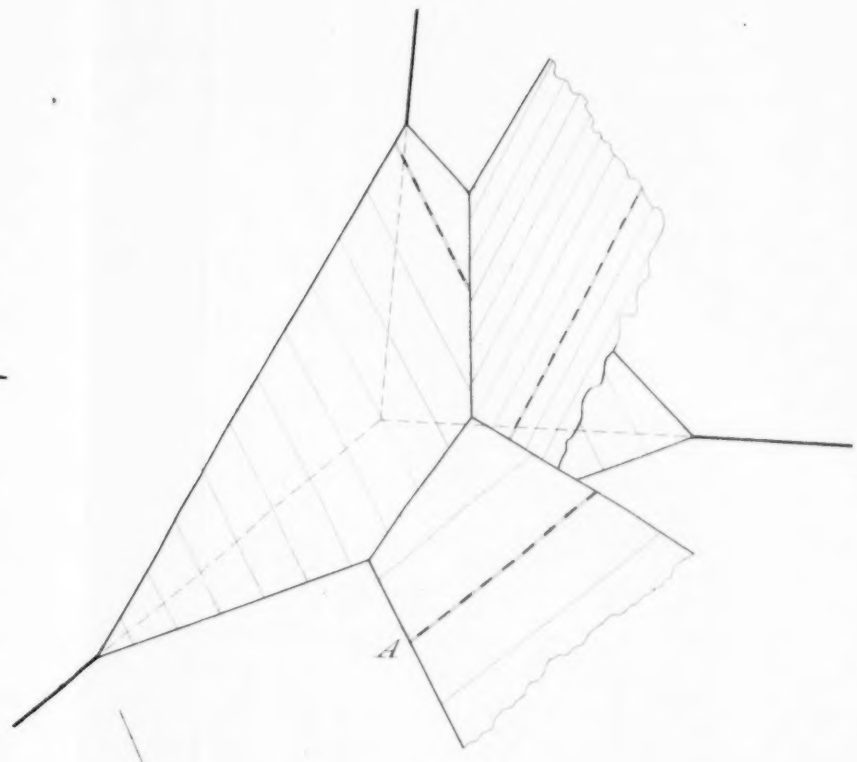


Fig. 3.

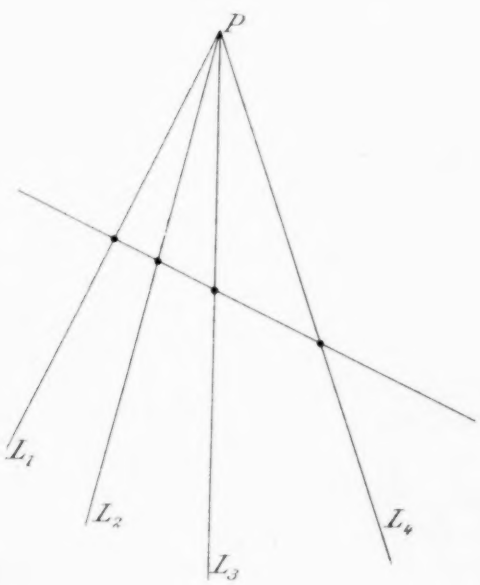


Fig. 4.

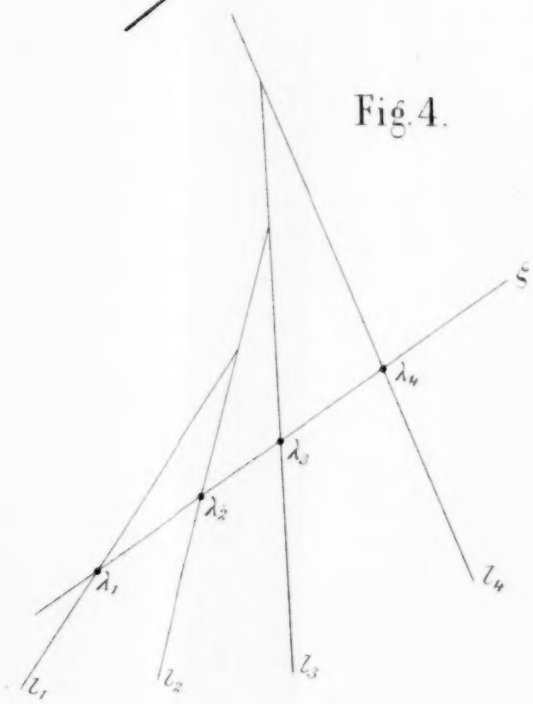


Fig. 8.

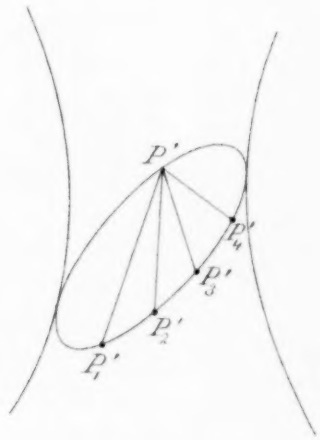


Fig. 5.

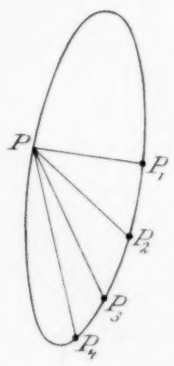


Fig. 6.

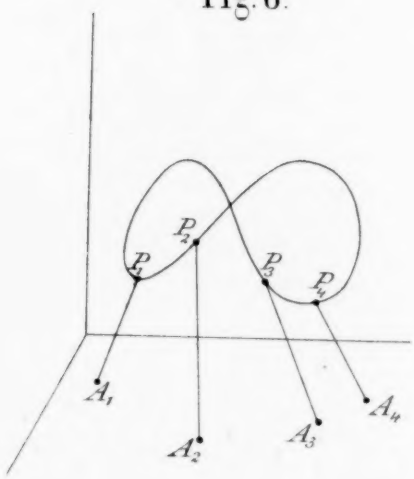


Fig. 7.

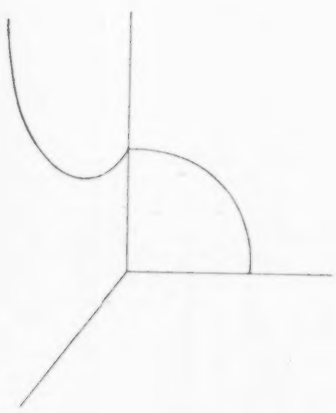
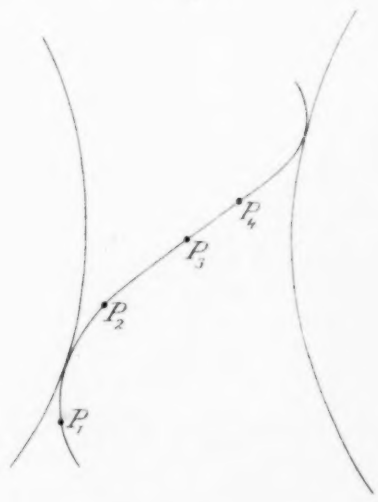



Fig. 9.